数学奥林匹克

一讲一练

主编：熊 斌 冯志刚

高二年级

上海科学普及出版社

数学奥林匹克

一讲一练

三年级
四年级
五年级
六年级
初一年级
初二年级
初三年级
高一年级
■ 高二年级
高三年级

ISBN 7-5427-2224-7
9 787542 722249 >

ISBN 7-5427-2224-7/O·56
定价：21.00元

数学奥林匹克

一讲一练

·高二年级·

主编　熊　斌　冯志刚

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克一讲一练．高二年级／熊斌，冯志刚主编．—上海：上海科学普及出版社，2002.7
ISBN 7－5427－2224－7

Ⅰ．数...　Ⅱ．①熊...②冯...　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 045862 号

责任编辑：高　峰

书　　名　数学奥林匹克一讲一练·高二年级·
主　编　熊　斌　冯志刚
出　版：上海科学普及出版社（上海中山北路 832 号　邮政编码 200070）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：昆山市亭林印刷总厂
开　本：787×1092　1/16　　印　张：16.25
字　数：408000
版　次：2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷
印　数：1－20000　　定　价：21.00 元
书　号：ISBN7-5427-2224-7/O·56

《数学奥林匹克一讲一练》编委会

本册编著　况亦军　冯志刚　顾　滨　赵漫其

序　言

纵观世界,中小学数学教育质量以我国为最好。

早在 1993 年,我国著名数学教育家张奠宙先生[1]就曾指出,中国数学教育是“双料冠军”:

(1) 我国在中学生国际数学奥林匹克中连获总分第一名(1989,1990,1992,1993)。

(2) 1988 年举行的国际教育进展评价(IAEP)的结果表明,在对 21 个国家和地区的 13 岁学生的测试中,中国大陆学生的数学得分率列第一位(80 分)。我国台湾地区和韩国并列第二(73 分),苏联(70 分),西欧、北美诸国均在 60 分左右。

时间过去近十年,我国中小学数学教育依然处于领先地位,不可动摇。我国中小学数学教育成绩卓著的原因可以举出很多,例如:

(1) 家长重视。自古以来就有“养不教,父之过”的说法,每一个合格的中国家长无不关心子女的教育,他们倾注了大量的心血与精力。

(2) 教师认真。“教不严,师之惰”。每一位称职的教师都会对学生严格要求,布置适当的作业,采用测试、考试等手段督促学生学习,决不放任自流。

(3) 学生努力。外国(尤其是欧美)很多学生视数学为畏途,甚至在小说中也说:“喏,如果你不喜欢我的故事,那么到教室里去背诵你的算术乘法表,看看你是不是更加喜欢它。”[2]中国学生,没有不会背乘法表的,即使是文盲也能说出“不管三七二十一”。成绩好的学生爱好数学,成绩中下的学生也都知道数学是一门主课,升学考试必考,因而要花力气去学。

(4) 风气纯正。我国舆论历来认为学生应当把学习搞好。虽然也曾出现过“白专道路”,“知识越多越反动”,“高分低能”等等谬论,但社会上仍然正确地坚持读书光荣,“知识就是力量”,对于分数也给予适当的重视。

我国尤其重视英才的培养。对于爱好数学的学生应当给他们更多的机会、更多的培养,其中最重要的一件事就是应当提供给他们一套好的书。由熊斌、冯志刚先生主编,上海科学普及出版社出版的《数学奥林匹克一讲一练》、《数学奥林匹克试题精编 ABC 卷》就是这样的书。

《数学奥林匹克一讲一练》将奥林匹克数学的内容以一讲一练的形式系统地

组织起来,每一讲设三部分内容:

(1) 将竞赛中所需的知识加以简明扼要的归纳、总结;

(2) 围绕竞赛的热点,选择典型的例题精讲,着重介绍竞赛中的基本思想与基本方法;

(3) 有针对地选择一些名题、好题、新题供读者练习,以提高解题能力。

《数学奥林匹克试题精编 ABC 卷》是同步练习册,A 卷是“一讲”内容的延伸与拓展,题目难度较小;B 卷进一步加强竞赛的基本功,突出了解题的基本技巧与方法;C 卷是为准备在竞赛中取得优异成绩的同学设计的,题目具有挑战性,是学生发挥自己的创造性,一显身手的用武之地。

如果你使用这两套书,经过一段时间,就会有显著的变化:视野开阔了,数学素养提高了,解题与应试的能力加强了,不仅在课内考试可以脱颖而出,在各种数学竞赛中也可望获得好的成绩。当然,书中的练习必须及时地、亲自地做一做。练是学好数学的第一个关键;练了以后还必须进行总结,将不必要的步骤尽量删去,使解题中的主要思想更加凸现,这是学好数学的第二个关键。

一道题目,想了很久,终于想了出来,这是一件非常愉快的事情,是任何其他东西所不能代替的。如果你曾经有过这样的体验,那么你就能学好数学。如果你还没有这样的体验,那么抓紧做练习吧,相信你很快就会享受到这种解题的快乐。

“学而时习之,不亦乐乎”。对孔夫子的这句话,使用本书的学生,一定会发出会心的微笑。

单　墫

[1] 张奠宙．中国数学教育的文化传统和未来走向．数学家谈数学教育．九章出版社,2000

[2] 查尔斯·金斯利．木偶译．水孩子．人民文学出版社,2000

前　　言

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克活动,可以更好地发现和培养优秀学生,并能提高教师的教学水平,促进教学改革。

本丛书从小学三年级至高中三年级共10册,将数学奥林匹克的内容以"一讲一练"的形式系统地组织起来,目的是希望能为学生提供一套强化知识、开阔视野、提高数学素质和能力的教材,让学生能借助这套教材的学习,具备或提高参加各种数学竞赛的知识和能力,使学生不仅能把自己的课内成绩提高,而且能在数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都由"讲"和"练"组成,每一讲分设三部分内容:

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点,选择典型的例题,通过对典型例题的分析、讲解,使学生能够掌握基本思想和基本方法,进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 能力训练习题。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。通过这样的练习,使得学生能更好地掌握所学的知识,提高解题能力,培养创新意识。

参加本套丛书编写的作者既有长期在数学竞赛辅导第一线的教师,又有曾获国际数学奥林匹克金牌的选手,还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家,由于他们的参与,保证了本套教材的质量。

本套丛书的编写,得到了单壿先生、顾鸿达先生、刘鸿坤先生的热情关怀和指导,借此对他们表示衷心的感谢。

熊　斌　冯志刚

目　录

第一讲　不等式的解法及其应用

竞赛热点、考点、知识点

对于一个含未知量的不等式,求出或指出使不等式成立的未知量的取值范围的过程称为解不等式.

介值定理　设函数 $f(x)$在某一区间 Δ 内有定义的初等函数.如果在这区间内的两点 $x=a,x=b(a<b)$处有不相等的函数值 $f(a)=A,f(b)=B(A\neq B)$,那么对于 A 与 B 之间的任一实数 C,必存在数 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=C$.特别地,若 A 与 B 异号,则必存在数 $c\in(a,b)$,使 $f(c)=0$.

设初等函数 $f(x)$在某一区间 Δ(不妨设为(a,b),其余情况结论类似)内有定义.

1. 若方程 $f(x)=0$ 在 Δ 内没有根,则函数 $f(x)$的值在 Δ 内保持相同的正负号;

2. 若方程 $f(x)=0$ 在 Δ 内的全部不同的根从小到大依次是$x_1,x_2,\cdots,x_n$,则这 n 个根将Δ 分成 $n+1$ 个小区间:$(a,x_1),(x_1,x_2,),\cdots,(x_n,b)$;在每一个这样的小区间内,函数 $f(x)$的值保持相同的正负号.

典型例题精讲

例 1　解不等式.

(1) $(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)<0$;　(2) $\dfrac{x^2(x-1)^3(x+2)}{x-3}>0$.

解　(1) 原不等式对应方程的根在实数轴上标出(见图 1).

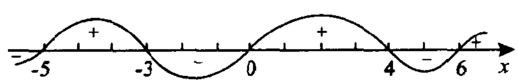

图 1

可知当 x 从右到左在各个区间内取值时,多项式 $f(x)=(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)$ 的符号依次为正、负、正、负、正、负,因此 $f(x)<0$ 的解集为$(-\infty,-5)\cup(-3,0)\cup(4,6)$.

(2) 原不等式等价于

$$\begin{cases}(x+2)(x-1)(x-3)>0\\ x\neq0\end{cases}\quad 即\begin{cases}-2<x<1 或 x>3\\ x\neq0\end{cases}.$$

故所求不等式的解集为$(-2,0)\cup(0,1)\cup(3,+\infty)$.

说明　本题实质是利用数轴标根法解题.

例 2　解不等式

$$\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0.$$

解　令$\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}=t$,则 $t\geqslant0$.此时原不等式等价于$\dfrac{1}{2}t^4-t^2-2t>0$,即 $t(t-2)(t^2+2t+2)>0$,所以 $t<0$(舍去)或 $t>2$.于是$\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>2$,解得 $2<x<8$.故原不等式的解集为$(2,8)$.

例 3 函数 $f(x)=\dfrac{(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)}{(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)}$ 的定义域用 D 表示，求使 $f(x)>0$，对于任何 $x\in D$ 均成立的实数 k 的取值范围？

解 若 $k+1=0$，则 $k=-1$，$f(x)=\dfrac{2x-10}{-3x^2-5}$，易知 $f(x)$ 的定义域 D 是实数. 但当 $x>5$ 时，$f(x)<0$，所以 $k=-1$ 不符合条件.

若 $f(x)>0$ 对于任何 $x\in D$ 均成立，设 $(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 有两个实根 x_1、x_2，则 x_1、x_2 一定为 $(2k-1)x^2+(k+1)x+(k-4)=0$ 的根. 于是题设的等价条件为

$$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2k-1}>0, & ①\\ x_1+x_2=-\dfrac{k+3}{k+1}=-\dfrac{k-4}{2k-1}, & ②\\ x_1x_2=\dfrac{2k-8}{k+1}=\dfrac{k-4}{2k-1}, & ③\\ \Delta=(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)\geqslant 0, & ④\end{cases}$$

②和③的公共解为 $k=1$，且 $k=1$ 满足①、④. 其实当 $k=1$ 时，$f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+2x-3}$，它的定义域为 $D=R\setminus\{1,-3\}$. 当 $x\neq 1,-3$ 时，$f(x)=2>0$；

若 $(k+1)x^2+(k+3)x+(2k-8)=0$ 无实根，则题设的等价条件为

$$\begin{cases}(k+3)^2-4(k+1)(2k-8)<0,\\ (k+1)^2-4(2k-1)(k-4)\leqslant 0,\\ \dfrac{k+1}{2k-1}>0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{或}k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7},\\ k\geqslant\dfrac{35}{7}\text{或}k\leqslant\dfrac{3}{7},\\ k>\dfrac{1}{2}\text{或}k<-1.\end{cases}$$

于是
$$k>\frac{15+16\sqrt{2}}{7}\text{或}k<\frac{15-16\sqrt{2}}{7}.$$

所以实数 k 的集合是 $\left\{k\,\middle|\,k=1,k>\dfrac{15+16\sqrt{2}}{7},k<\dfrac{15-16\sqrt{2}}{7}\right\}$.

例 4 解不等式 $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\leqslant\sqrt{2}|\tan x|(\sin x+\cos x)$.

解 因为 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$，及 $\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{|x|+|y|}{\pi}}\geqslant 0$，所以，由题没有 $\tan^2x+1\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\leqslant\sqrt{2}|\tan x|(\sin x+\cos x)\leqslant 2|\tan x|$

但是 $(|\tan x|-1)^2\geqslant 0$，即 $\tan^2x+1\geqslant 2|\tan x|$，于是上面的不等式都取等号，即

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}=0,\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2},|\tan x|=1.$$

于是得
$$|x|+|y|=\pi,\text{及 }x=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}.$$

因为 $|x|\leqslant\pi$，即 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，故 $k=0$，从而 $x=\dfrac{\pi}{4}$，$y=\pm\dfrac{3}{4}\pi$. 因此，不等式的解为

$$(x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)\text{或}\left(\frac{\pi}{4},-\frac{3}{4}\pi\right).$$

能力训练习题

一、填空题

1. 不等式 $3x^2+4x-6\leqslant 0$ 的解是(　　　　).

2. 已知不等式 $ax^2+abx+b>0$ 的解集为 $P=\{x\mid 2<x<3\}$，则 a 为(　　　　)，b 为(　　　　).

3. 不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$ 的解是(　　　　).

4. 不等式 $\arctan x+2\arctan\frac{1}{x}\leqslant\frac{3}{4}\pi$ 的解是(　　　　).

5. 不等式 $|x^2+3x+2|>1-2x+|2x^2-3x|$ 的解是(　　　　).

二、解答题

6. 解不等式 $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11$.

7. 解不等式 $\frac{1}{2^x-1}>\frac{1}{1-2^{x-1}}$.

8. 解不等式 $\frac{x-2}{x-1}+\frac{k}{x}>\frac{x+2}{x+1}-\frac{k}{x}$　$(k>1)$.

9. 解不等式 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0$.

10. 已知$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$与$x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$的解集分别记为$A$与$B$,其中$a$是实数,求使$A\subseteq B$成立的$a$的取值范围.

11. 求满足不等式组$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0 & ① \\ y+|x-1|<2 & ② \end{cases}$的整数对$(x,y)$.

12. 给定正整数$n\geqslant 2$,求最小的正数λ,使得对任意正数a_1、a_2、…、a_n及区间$\left[0,\frac{1}{2}\right]$中任意$n$个数$b_1$、$b_2$,…,$b_n$,只需$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=1$,就有$\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$成立.

13. 设n是给定的正整数,$n\geqslant 13$,对n个给定的实数a_1、a_2,…,a_n,记$|a_i-a_j|(1\leqslant i<j\leqslant n)$有最小值为$m$,求在$\sum\limits_{i=1}^{n}{a_i}^2=1$条件下的$m$的最大值.

14. 求所有正整数n,使得$\min\limits_{k\in\mathbf{N}^*}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=2001$,这里$\left[\frac{n}{k^2}\right]$表示不超过$\frac{n}{k^2}$的最大整数.

第二讲　平均不等式

竞赛热点、考点、知识点

平均不等式.

1. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正实数,记

$$H_n=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}},G_n=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}},A_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,Q_n=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}$$

分别称为这 n 个数的调和平均、几何平均、算术平均及平方平均,则

$$H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n.$$

2. **幂平均不等式.**

若 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n,n$ 为正整数,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}\leqslant\sqrt[3]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,3}}\leqslant\cdots\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,n}}.$$

3. **加权幂平均不等式.**

若 $a_i>0,p_i>0,i=1,2,\cdots,n$,则当 $s<r(s,r\in\mathbf{N}^*)$ 时,有

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i^{\,s}}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{s}}\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i^{\,r}}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

可将 s,r 推广至实数.

4. **算术—几何平均不等式的推广.**

设 $a_i>0,p_i>0,i=1,2,\cdots,n$,则有

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\geqslant\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}.$$

若令 $q_i=p_i\left(\sum\limits_{k=1}^{k}p_k\right)^{-1}$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}q_i=1$,上式为 $\sum\limits_{i=1}^{n}q_ia_i\geqslant\prod\limits^{n}a_i^{q_i}$.

以上所有不等式的等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取到.

典　型　例　题　精　讲

例 1　设 $a_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$,且 $p=\min\{a_i\},q=\max\{a_i\}(i=1,2,\cdots,n)$,证明:$A_n-G_n\geqslant\frac{1}{n}(\sqrt{q}-\sqrt{p})^2$.其中 $A_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n),G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

证明　不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则 $p=a_1,q=a_n$,利用 $A_n\geqslant G_n$,有

$$\frac{1}{n}\left(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_1a_n}\right)\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

两边同时加上 $\frac{1}{n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})^2$,得

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\frac{1}{n}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})^2,$$

移项即得.

例 2 已知 a_i、$a_j\in\mathbf{R}^+$, $i,j=1,2,\cdots,n$,求证 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{a_j}\right)}\geqslant 2^n$.

证明 因为 $a_i>0,a_j>0$,所以 $1+\frac{a_i}{a_j}\geqslant 2\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}$,所以 $\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{a_j}\right)\geqslant 2^n\cdot\sqrt{\frac{a_i^{\ n}}{a_1a_2\cdots a_n}}$,所以 $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{a_j}\right)\geqslant(2^n)^n$,即 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{a_i}{a_j}\right)}\geqslant 2^n$. 等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=n$ 时成立.

例 3 已知 n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的算术平均值为 a,证明

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|\right)^2.$$

证明 先证 $a=0$ 时的情形,此时 $0=(x_1+\cdots+x_n)^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$,即 $\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}=-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$,得 $\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}\leqslant 2\sum_{i\neq j}^{n}|x_ix_j|$,所以

$$2\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^{\ 2}+2\sum_{i\neq j}^{n}|x_ix_j|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2.$$

当 $a\neq 0$ 时,令 $y_k=x_k-a$, $k=1,2,\cdots,n$,则 $y_1,\cdots,y_n$ 的算术平均值为 0,于是

$$\sum_{k=1}^{n}y_k^{\ 2}\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|\right)^2.\text{所以}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-a|\right)^2.$$

例 4 设实系数多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根为实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其中 $n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$. 试证对于 $x>\max(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,有

$$f(x+1)\geqslant\frac{2n^2}{\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}}.$$

证明 当 $x\geqslant\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 时,有 $f(x+1)=\prod_{i=1}^{n}(1+x-bi)$. 由均值不等式有

$$f(x+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-bi}\geqslant n,f(x+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}}=n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}}.$$

因 $n\geqslant 2$,故 $n^2-2n(n-2)\leqslant 0$,于是对任意 $t>0$, $\frac{n(n-1)}{2}t^2-nt+1\geqslant 0$. 进而有 $(1+t)^n\geqslant 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2\geqslant 2nt$. 由 $(1+t)^n\geqslant 2nt$,有 $\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}\geqslant 2n$. 故

$$f(x+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}\geqslant n\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}2n}=2n^2.$$

即
$$f(x+1)\geqslant\frac{2n^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}}.$$

能力训练习题

一、填空题

1. 若 $a>0,b>0,c>0$ 且 $a+b+c=1$，则 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3+\left(b+\frac{1}{b}\right)^3+\left(c+\frac{1}{c}\right)^3$ 的最小值是（　　　）.

2. 设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$，则使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_1}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_2}{x_3}}1993\geqslant k\cdot\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993$ 恒成立的实数 k 的最大值是（　　　）.

3. 设 $x,y,z\geqslant0$ 且 $xy+yz+zx=1$，则 $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$ 的最大值是（　　　）.

4. 有一尺寸为 80×50 的矩形铁片，现要在四角上各截去一个同样大小的正方形，然后做成无盖盒子，则应截去边长为（　　　）的正方形，才能使这个无盖盒子的容积最大.

5. 设实数 A、B、C 使得不等式 $A(x-y)(x-z)+B(y-z)(y-x)+C(z-x)(z-y)\geqslant0$，对任何实数 x、y、z 都成立，则 A、B、C 应满足（　　　）（写出充要条件，并限定用只涉及 A、B、C 的等式或不等式来表示这条件）.

二、解答题

6. 设 $a>1,n\in\mathbf{N}^*$，求证 $a^n-1\geqslant n\left(a^{\frac{n+1}{2}}-a^{\frac{n-1}{2}}\right)$.

7. 对任意的正整数 n，求证 $\frac{n^2}{3}+n>(n!)^{\frac{2}{n}}$.

8. 设 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$，求证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}\leqslant\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$（这里 $x_{n+1}=x_1$）.

9. 数列 $\{F_n\}$ 定义如下：$F_1=1,F_2=2$，对任意正整数 n，有 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，求证对任意的正整数 n，$\sqrt[n]{F_{n+1}}\geqslant1+\frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$.

10．若 $x_i \in \mathbf{R}^+ (i=1,2,\cdots,n+1)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i}=1$，求证：$x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \geqslant n^{n+1}$.

11．设 $k, n \in \mathbf{N}^*$，$1<k \leqslant n$，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 k 个正整数，且它们的和等于它们的积，求证 $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_k^{n-1} \geqslant kn$.

12．求证：$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$，其中 a、b、c、d 为正实数.

13．若正数 a, b, c 及常数 k，满足不等式 $\frac{kabc}{a+b+c} \leqslant (a+b)^2+(a+b+4c)^2$，求常数 k 的最大值.

14．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个非负实数（$n>2, n \in \mathbf{N}^*$）且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=n$，$\sum\limits_{i=1}^{n} i x_i=2n-2$，求 $x_1+4x_2+\cdots+n^2 x_n$ 的最大值.