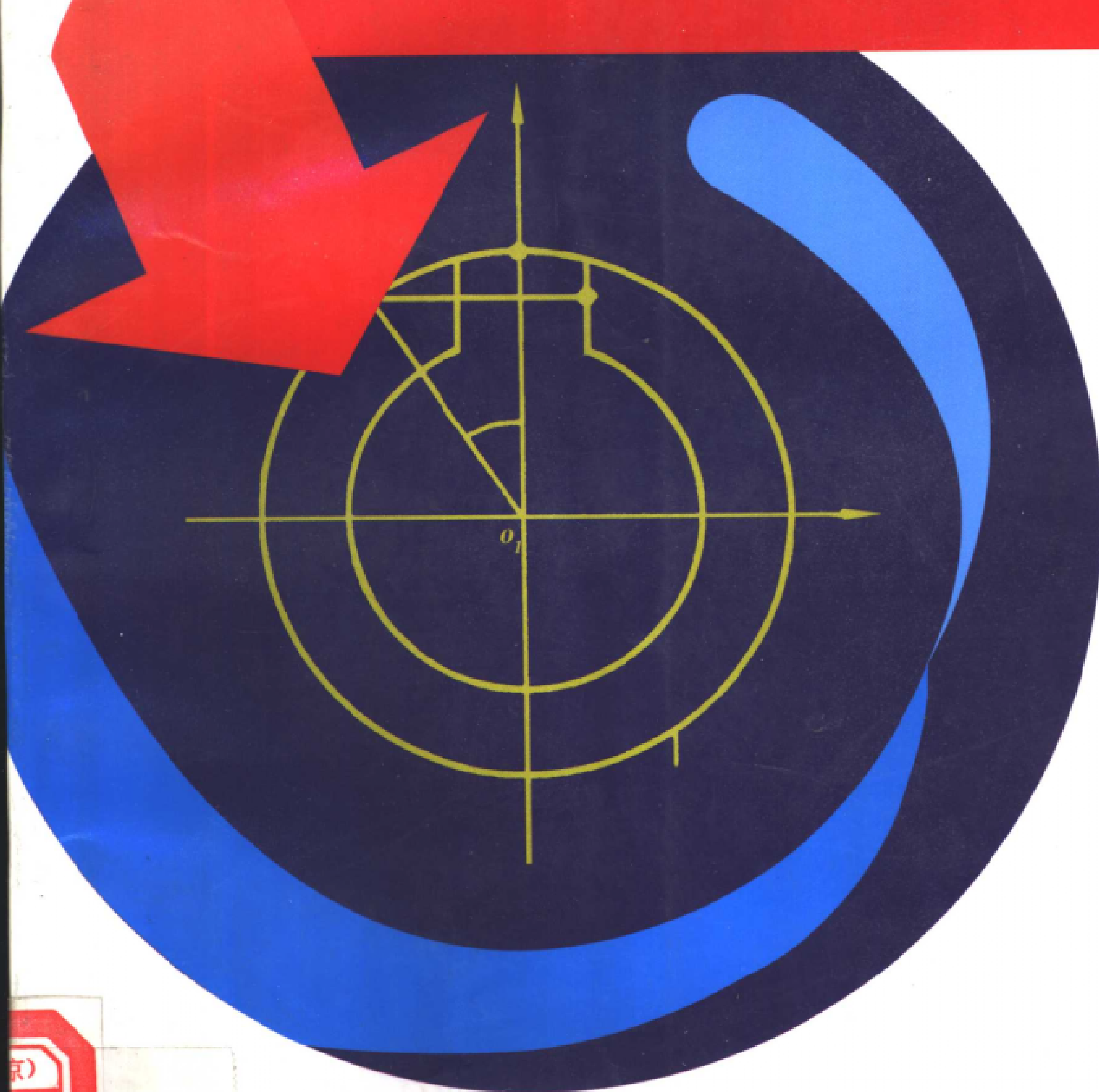
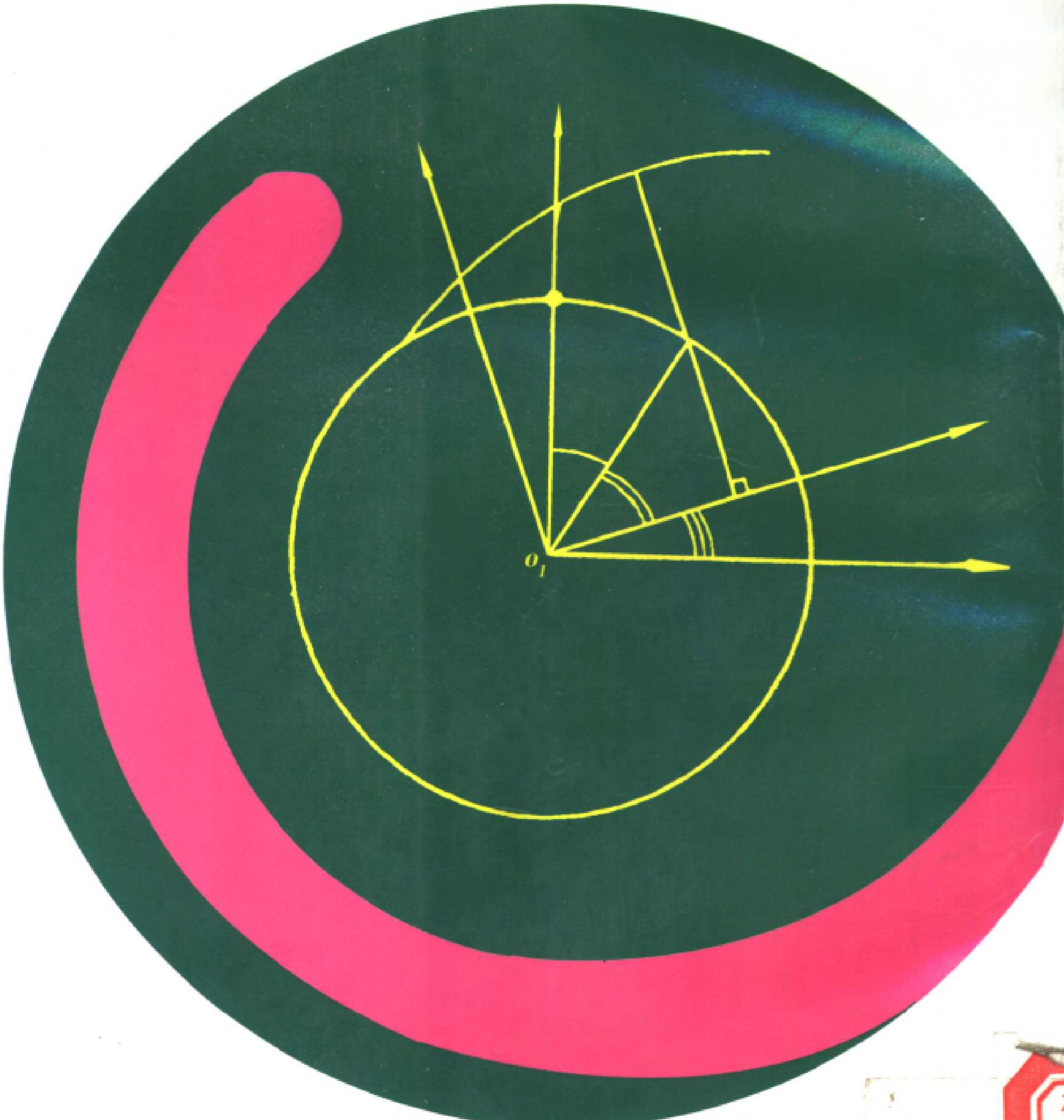
沈守范　张纪元　万金保　编著

机构学的数学工具



上海交通大学出版社

责任编辑　陈　辉
封面设计　韦　人



ISBN 7-313-02128-3

9 787313 021281 >

ISBN7－313－02128－3/O·144

定价：33.00 元

本研究课题得到国家自然科学基金资助

机构学的数学工具

沈守范
张纪元　编著
万金保

上海交通大学出版社

内容简介

本书系统地介绍机构分析和综合所必需的数学工具。内容共分三篇：第一篇为代数工具，包括矢量的矩阵表示、D-H矩阵、旋转算子、对偶矩阵、四元代数和抽象代数；第二篇为几何工具，包括微分几何、射影几何、运动几何和图论；第三篇为其他数学工具，包括数论和组合数学。

本书可作机械学研究生的教材或参考书，也可供机构学工作者、计算机辅助设计和机械加工、刀具研究及其他工程技术人员参考。

机构学的数学工具

沈守范　张纪元　万金保　编著

上海交通大学出版社出版发行
上海市番禺路877号　邮政编码200030
电话　64281208　传真　64683798
全国新华书店经销
立信会计常熟市印刷联营厂・印刷
开本：787×1092(mm)1/16　印张：28.25　字数：701千字
版次：1999年1月　第1版
印次：1999年1月　第1次
ISBN 7-313-02128-3/O・144
定价：33.00元

前　言

机构学包括机构的分析和综合两方面，其内容涉及到很多数学分支，几乎数学手册[1]中所列的全部内容都要用到。对于机构学各个领域都有用的公共数学基础有：数学分析、矢量代数、解析几何、线性代数、抽象代数、计算数学、微分几何及优化方法。在机构学各个学科领域还要用到一些数学工具，如结构分析中用组合数学、图论；轮系中用数论；力分析中用数理方程、有限元法、复变函数；精度分析中用概率论等等。在机构学的历史上曾采用过投影几何及球面三角等数学工具。在一本书中不可能也没有必要包罗全部数学工具，因此本书只收入那些对运动分析和综合直接有关的主要数学工具。数学分析、矢量代数、解析几何、线性代数和计算方法等内容无疑是极为重要的，它们在机构学中都有直接的应用，而且也是掌握其他数学工具的基础。但对于工科院校的大学毕业生而言，这些内容已属常识，故未将其列入本书。又如优化方法，因为作者拟另编专著，故也不予列入本书。

机构学与数学的关系如此紧密是有历史根源的，因为数学和机构学都脱胚于力学。有趣的是有些数学内容正是研究机构学的需要而形成的。如最佳逼近理论是 Чебыщев 在研究四连杆机构综合时首次提出的；又如数论中的连分数理论是肯格斯在制作太阳系模型选择齿数时提出来的[2]。

本书的内容共分三篇。第一篇为代数工具，包括第 1 章矢量的矩阵表示，第 2 章 D-H 矩阵，第 3 章旋转算子，第 4 章对偶矩阵，第 5 章四元代数和第 6 章抽象代数；第二篇为几何工具，包括第 7 章微分几何，第 8 章射影几何，第 9 章运动几何简介和第 10 章图论；第三篇为其他数学工具，包括第 11 章数论，第 12 章组合数学。其中 D-H 矩阵、旋转算子、对偶矩阵和微分几何是最有用的数学工具。第 1 章矢量的矩阵表示，大部分是复习内容，但它是掌握上述内容的基础，它不仅能使推导大为简化，而且可把各种代数方法在内容和形式上统一起来。抽象代数是学习图论所不可缺少的工具，它帮助人们在更高的水准上去把握各种数学工具。目前，抽象代数的应用日趋广泛，如果说 20 世纪 50 年代不学线性代数会落后，则 20 世纪 70 年代不学抽象代数更会落后了。

本书在内容上绝大部分是常规的东西，但在编排、推导论证和应用上作者都做了一些加工。如代数工具这一篇，以矢量的矩阵表示为主线，利用作者导出的一组公式，几乎把机构学中应用的所有代数方法都联系起来了。在几何工具这一篇也充分利用矩阵工具，使内容安排得更有条理。如射影几何中的分式线性函数，作者提出了尖矩阵的概念加以推演。总之，经过上述处理后，使内容变得更加系统，

推导大为简化，难度明显降低，易于掌握和应用。

本书是应研究生的教学需要而编写的，也兼顾了工程技术人员的实际需要。其中，代数工具和微分几何，射影几何曾讲授过多次，约需 70 学时。本书由沈守范主编，其中第 5 章四元代数和第 7 章微分几何由张纪元编写；第 8 章射影几何由万金宝编写；其余章节均由沈守范编写。由于编著的经验和水平所限，谬误不当之处在所难免，恳望读者指正。

沈守范

于南京理工大学

目　　录

第二篇　几何工具

第三篇　其他数学工具

0 概　　述

机构学的内容由机构的分析和机构的综合两大部分组成。而机构分析包括:(1)结构分析——机构的自由度,组成原理和分类;(2)运动分析——机构的位置、点的轨迹、速度、加速度,构件的角速度和角加速度,以及高阶加速度(如跃动);(3)力分析——机构运动副中的反力、构件的内力和平衡力、解运动微分方程;(4)精度分析——确定运动副间隙和构件尺寸误差对机构运动学和动力学的影响;(5)广义机构分析——考虑构件弹性及气电液传动等。机构的综合包括:(1)型综合——满足工程要求所选取的机构类型;(2)数综合——在指定机构类型前提下,确定运动副和构件的数目以及确定它们能组成的不同机构方案的数目;(3)尺寸综合——对型、数综合确定的机构模式,再确定其构件的具体尺寸(线尺寸和角尺寸)。对于这些内容而言都有用的公共数学工具是数学分析、矢量代数、解析几何、线性代数、计算数学、微分几何及优化方法。除了优化方法,上述数学工具的通用性是众所周知的。其实,优化方法也是通用的数学工具,它不仅可直接用于各类机构的优化设计,也可用于运动分析。因为对于多环路复链机构的运动分析均可转化为求解非线性方程组,而优化方法不仅给出了非线性方程组的解法,而且也能给出确定初始解的方法。

机构学的某些分支还要用到数学中的若干个别内容,例如:结构分析要用到图论的缩并理论和组合数学的 Pólya 理论;动力分析要用微分方程、数学物理方程、有限元法和复变函数;精度分析要用到概率论;齿轮啮合原理和凸轮机构要用到微分几何;轮系要用到数论和图论中的网络理论;连杆机构要用到射影几何和函数逼近论等。其中尤以空间连杆机构最具代表性,它几乎要用上面提到的和本书将要介绍的其他数学工具。

随着电子计算机和计算技术的发展,解析法越来越显示其重要作用,因而与之相应的数学工具也日益被广大工程技术工作者所重视。目前,在机构分析和尺寸综合方面差不多都可采用解析方法,唯型综合和数综合解析法的运用尚处于初始阶段。尤其是型综合,主要是凭经验(属于艺术而未上升为科学),这也是机构学结合工程实际的一个重大技术障碍。这就给机构学研究工作者提出了一项艰巨的任务,一方面要充分利用现成的数学工具继续发展电子计算机的科学计算工作,以完善机构分析和尺寸综合的解析方法;另一方面又要着手开发电子计算机的思维功能,使型综合和数综合自动化。

本书重点介绍机构运动分析和尺寸综合所需的数学工具,但是凡在工科大学中已学过的内容除外。因为优化方法拟另编专著,故也未收编在本书的内容中。本书所列的内容有:矢量的矩阵表示、D-H 矩阵、旋转算子、对偶矩阵、四元代数、抽象代数、微分几何、射影几何、运动几何、图论、数论和组合数学。

第一篇 代数工具

在机构学中所用的代数工具指除了几何工具之外的一切数学工具。尤指包括计算数学中的函数逼近论和矩阵工具，也包括矢量、复数和超复数等。本篇以介绍矩阵工具为主，几乎涉及了机构学中所用的全部代数方法。在机构运动学的分析和综合领域中头等重要的和最感困难的是机构位置问题，因为在位置确定之后不难用求导的方法求解速度和加速度问题。即使直接解速度和加速度问题也不会有太大的困难，因为它们相应于解线性方程组。而确定机构位置则相当于解非线性方程组，其难度显然要大得多。有鉴于此，本篇所列的代数工具着重介绍其解决机构定位问题的方法，至于求解速度问题和加速度问题的方法只略提一二。本篇的主要参考书是文献[3]。

1 矢量的矩阵表示

有大小、方向且符合平行四边形法则的量称为矢量。“符合平行四边形法则”这一条件常为人们所忽视，实则是很重要的。其含义是矢量的加法运算服从交换律。某些量虽有大小和方向，但不服从交换律，故不是矢量。例如，刚体的有限(finite，不是无穷小的)转动角 θ 不是矢量，而是二阶张量(可用矩阵表示)。因为刚体连续两次转动的，顺序一般不可颠倒，否则合成运动的效果将不相同，即刚体的有限转动合成不服从交换律。设黑板擦绕黑板平面的两垂直轴 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 分别按右手规则转过 $\frac{\pi}{2}$ 角，分别记为

$$E_1 = E^{\frac{\pi}{2}\boldsymbol{u}_1},\ E_2 = E^{\frac{\pi}{2}\boldsymbol{u}_2},$$

则先 E_1 后 E_2 与先 E_2 后 E_1 的效果不同(图 1-0-1)，即 $E_2E_1 \neq E_1E_2$，运算的次序不可交换(证明见 3.4 的 Beasta 定理)。

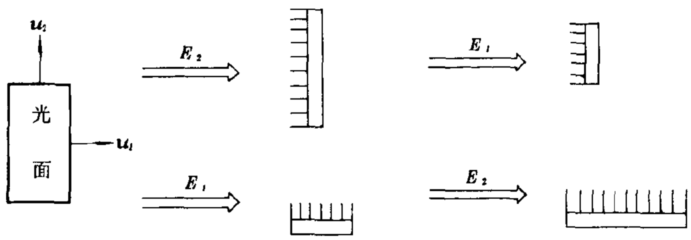


图 1-0-1

但无穷小转角 $\mathrm{d}\theta$ 是矢量(见图 1-0-2)，

$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta_1 + \mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\theta_2 + \mathrm{d}\theta_1,$$

进而知角速度 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 也是矢量。

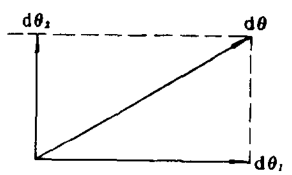


图 1-0-2

矢量是由 J W Gibbs 和 O Heaviside 于 19 世纪末从四元代数中分离出来的，矢量与欧几立德(Euclid)几何有密切联系。本章乃至本书若不特别说明，所谓矢量均指三维实矢量，即 $\boldsymbol{a} \in R^3$。矢量本身特称为不变矢(或称固有矢 intrinsic)。这儿的“不变”并不指矢量本身是不变化的常矢，而是指与坐标系的选取无关，不随坐标系的不同而变。据此，作者建议用“本矢”取代“不变矢”。由本矢组成的矢量运算式，如 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 等等也与坐标系无关，统称为不变式，以区别于依赖坐标系的表示形式(称为表示式)。

矢量的表示形式很多，例如可以用矢箭头表示。本章只讨论矢量的矩阵表示。矢量的矩阵表示主要有三种：列矩阵表示、反对称矩阵表示和反 Hermite 矩阵表示。在有些技术领域(例如计算机图学)，可能习惯于用矢量的行矩阵表示。其实列表示、行表示并无本质区别，两者存在简单的转置关系，即列表示的关系式转置后便可得到行表示的相应关系式。故本书只采用列表

示。

矢量的矩阵表示与坐标系有关，坐标系有三个要素：(1)坐标原点，(2)坐标轴的假点(即无穷远点，假点见 2.2.1 的齐次坐标)，(3)单位点(幺点)，具体可用 O-$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$ 来表示。其中 O 为坐标原点；$\boldsymbol{i}_\alpha$ 为各坐标轴矢量(不一定为单位矢量)，它蕴涵了幺点和假点。本章只讨论正交坐标系，设正交坐标系 I：O-$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$。在正交系中，约定 $\boldsymbol{i}_\alpha$ 为单位矢量(简称幺矢)，故有点积：

$$\boldsymbol{i}_\alpha \cdot \boldsymbol{i}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\ 。\tag{1-0-1}$$

式中 $\delta_{\alpha\beta}$称为 Kronecker 符号，它定义为

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{当 } \alpha = \beta\ , \\ 0 & \text{当 } \alpha \neq \beta\ 。\end{cases}\tag{1-0-2}$$

任何三维实矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系 I 中可分解为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3\ ,\tag{1-0-3}$$

可见 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{i}_\alpha$ 的线性组合。为了简化书写，引用下述 Einstein 约定：标号有重复的项，表示遍取该标号所有可能的和，如 $a_\alpha\boldsymbol{i}_\alpha$ 表示 $\sum\limits_{\alpha=1}^{3}a_\alpha\boldsymbol{i}_\alpha$。为了提请初学者注意，一般在式后加注“$\left(\sum\right)$”。如

$$\boldsymbol{a} = a_\alpha\boldsymbol{i}_\alpha \quad \left(\sum\right)。\tag{1-0-4}$$

式中 a_α 称为 $\boldsymbol{a}$ 沿 $\boldsymbol{i}_\alpha$ 的坐标或分量。对于正交坐标系，显然有

$$a_\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{i}_\alpha\ 。\tag{1-0-5}$$

为了简化书写，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|$ 记为 a，即

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\ 。\tag{1-0-6}$$

模等于 1 的矢量称为单位矢量(简称幺矢)。

1.1 矢量的列矩阵表示

1.1.1 矢量的列表示

矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标系 I 中的列矩阵表示简称列表示，记为 $\boldsymbol{a}_I$，即有

$$\boldsymbol{a}_I = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^{\mathrm{T}}。\tag{1-1-1}$$

在意义不会混淆的情况下，矢量的列表示也可采用与本矢相同的符号，即

$$\boldsymbol{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^{\mathrm{T}} = a_\alpha\boldsymbol{i}_\alpha \quad \left(\sum\right)。\tag{1-1-2}$$

若记

$$I = [\boldsymbol{i}_1 \quad \boldsymbol{i}_2 \quad \boldsymbol{i}_3]\ ,\tag{1-1-3}$$

则有

$$\boldsymbol{a} = I\boldsymbol{a}_I\ 。\tag{1-1-4}$$

在本书中，记号 I 既可表示坐标系 I 本身，又可表示以坐标轴矢量 $\boldsymbol{i}_\alpha$ 为列组成的矩阵。一般是不会出错的，例如对于式 1-0-4，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}_\alpha$ 随便理解都无妨，但在式 1-1-2 中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{i}_\alpha$ 都只能理解为各自的列表示，若它们都是对坐标系 I 而言的，则有

$$\boldsymbol{i}_1 = [1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{i}_2 = [0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{i}_3 = [0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}\ 。\tag{1-1-5}$$

1.1.2 矢量列表示的用途

矢量的列表示可作下述两种运算。

A 点乘

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = a_\alpha b_\alpha \quad \left(\sum\right)。\tag{1-1-6}$$

显然，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为矢量的不变式，而 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 为列表示的运算，但必须强调：$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 只能是对应不变矢在同一个坐标系中的列表示。另外，作为一个数是可转置的，故有点乘的可交换性：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\ 。\tag{1-1-7}$$

特别，对于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模，记为 a，则有

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}。\tag{1-1-8}$$

顺便指出：(1) 式 1-1-6 可以推广到高维的情况，若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^n$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha b_\alpha\ 。\tag{1-1-9}$$

(2) 对于复矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in C^n$，点乘定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{a} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \tilde{b}_\alpha\ 。\tag{1-1-10}$$

记号 H 称为共轭转置，即 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}} = [\tilde{b}_1\ \tilde{b}_2 \cdots \tilde{b}_n]$，交换律在复矢点乘中不适用，但有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\widetilde{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}})\ 。\tag{1-1-11}$$

B 并矢(dyad)的矩阵表示

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = [b_1\boldsymbol{a}\quad b_2\boldsymbol{a}\quad b_3\boldsymbol{a}]\ 。\tag{1-1-12}$$

并矢本身已不是矢量，而是二阶线张量，可用作数量积运算。为了区分并矢和点乘，规定点乘的不变式加“·”号。由式 1-1-12 可见，并矢 $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ 的矩阵表示 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 各列(或行)都成比例，故矩阵 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 的秩等于 1，即有

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = 1,\tag{1-1-13}$$

行列式

$$\det \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = 0\ 。\tag{1-1-14}$$

C　矢量列表示的广义逆

由于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的列表示 $\boldsymbol{a}$ 不是方阵，而并矢的矩阵表示 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 虽是方阵但它的行列式等于零，故两者都没有通常意义的逆(正则逆)，但却有 Moore-Penrose 广义逆[5]：

$$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})^{+}=\frac{\boldsymbol{a}}{a^{2}}\text{[6]},\tag{1-1-15}$$

$$(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{+}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{+}\boldsymbol{a}^{+}=\frac{\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{a^{2}b^{2}}。\tag{1-1-16}$$

对于矩阵 $A\in R^{m\times n}$，若有矩阵 $B\in R^{n\times m}$ 满足：

$$\begin{cases}(1)\ ABA=A,\\(2)\ BAB=B,\\(3)\ (AB)^{\mathrm{T}}=AB\quad(\text{对称}),\\(4)\ (BA)^{\mathrm{T}}=BA\quad(\text{对称}),\end{cases}\tag{1-1-17}$$

则称 B 为 A 的广义逆，记为 A^{+}(又称加号逆)。显然若 A 有正则逆 A^{-1}，必有 $A^{+}=A^{-1}$。A^{+} 总是存在的且唯一的，而且有 $(A^{+})^{+}=A$，$(A^{\mathrm{T}})^{+}=(A^{+})^{\mathrm{T}}$，但 $(AB)^{+}=B^{+}A^{+}$ 是有条件的，要求 $A^{+}ABB^{\mathrm{T}}$ 和 $A^{\mathrm{T}}ABB^{+}$ 均为对称阵。式 1-1-13 恰好满足上述对称条件，故可理解为 $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{+}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{+}\boldsymbol{a}^{+}$。其实只满足 M-P 条件式 1-1-17 中的一部分也是一种广义逆，它们往往是不唯一的，本书只用加号逆。

最后应指出，作为四元数(见 5.2)的矢部，其列表为

$$\boldsymbol{q}_{a}=[0\ \ a_{1}\ \ a_{2}\ \ a_{3}]^{\mathrm{T}}=[0\ \ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}。\tag{1-1-18}$$

1.2　矢量的反对称矩阵表示

1.2.1　矢量的反称表示

矢量 $\boldsymbol{a}$ 的反对称矩阵表示简称反称表示，记为 $M_{\boldsymbol{a}}$，定义为

$$M_{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix}0&-a_{3}&a_{2}\\a_{3}&0&-a_{1}\\-a_{2}&a_{1}&0\end{bmatrix}。\tag{1-2-1}$$

要记住反称表示的矩阵，可以在“反”字上着手：

(1) 从左上角第一个元素起，沿反时针方向，分量 a_{α} 的下标排列为 3　2　1，全反序；

(2) 分量前的正负号与代数余子式相反；

(3) 按反称性确定右上三角的元素。

矢量的反称表示也可展开成反称表示的分量形式(线性组合)：

$$M_{\boldsymbol{a}}=a_{\alpha}M_{i_{\alpha}}\quad\left(\sum\right)。\tag{1-2-2}$$

对坐标系 I 而言，式中：