张量分析与弹性力学

郭日修 编

社

哈尔滨船舶工程学院出版社

张量分析与弹性力学

郭日修　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

内 容 简 介

本书重点介绍普遍张量的基本概念、基本运算及其应用。全书共分两部分。第一部分内容是张量分析，包括张量的基本概念、张量代数、张量演算。第二部分内容是张量分析在弹性力学中的应用，包括应力分析、应变分析、应力-应变关系、弹性力学的基本方程。

本书强调理论联系实际，着重从应用的角度论述张量分析的基本概念和方法，不过分追求数学论证的严密，使读者能深入掌握张量分析这一数学工具及其应用。全书内容紧凑、条理清楚、叙述简洁明了、说理清晰易懂。

本书可作为船舶与海洋工程、航空、航天、土木、水利、机械以及力学等专业研究生和高年级本科生的教材，也可供从事结构分析的教师和科研、设计人员参考。

张量分析与弹性力学

郭日修 编

*

哈尔滨船舶工程学院出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张5.1875 字数 134 千字

1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷

印数：1—1000册

ISBN 7-81007-031-2/O·5

定价：1.15元

前　　言

近几年，作者为船舶结构力学专业研究生讲授张量分析、弹性力学等课程。1982年秋，作者曾将讲稿整理，写成《张量分析及其在弹性力学中的应用》一书．供该专业研究生用作张量分析课程的教材。根据几年来教学实践的经验，作者将该书的内容作了修改、补充、写成了这本《张量分析与弹性力学》书。其目的是为该专业的研究生学习张量分析及弹性力学课程的基本理论部分时用作教材。

本书分两部分。第一部分是张量分析．以普遍张量为讨论对象，系统地阐述了张量的概念、张量代数和张量演算。这部分的特点：一是以普遍张量为讨论对象而不仅限于笛卡尔张量，因此有广泛的适用性；二是着重阐述了张量的基本概念和基本运算方法，不过分追求数学上的严密，使研究生在正确理解张量的基本概念的基础上，掌握普遍张量的运算。

对于船舶结构力学专业的研究生，张量分析是重要的数学工具，学习它的目的在于应用。从这个目的出发，本书引导读者将张量分析应用于弹性力学，后者是该专业研究生的主要专业理论课程。因此，本书第二部分是弹性力学，讨论弹性力学的基本理论——应力分析，应变分析、应力-应变关系、弹性力学基本方程。第二部分内容的特点：一是用普遍张量建立弹性力学的基本方程，使研究生通过这部分内容的学习，掌握张量分析这个数学工具的应用；二是由于采用普遍张量记法，推导出来的弹性力学方程在各种曲线坐标系中都成立，从而提高了该专业研究生在处理专业问题时选用适当的曲线坐标系的能力；三是采用张

量表达能更深刻地反映弹性力学基本概念和方程的物理实质，使研究生对弹性力学基本理论有更深入的理解；四是推导了非线性几何方程——拉格朗日（Lagrange）应变张量和欧拉（Euler）应变张量，而不仅限于线性应变，为研究生学习非线性弹性力学打下基础。

目前在国内，系统讲述普遍张量及其应用的书还不多，这本书不仅对船舶结构力学专业的研究生有用，对其他专业的研究生、本科高年级学生以及工程技术人员在学习张量分析及弹性力学课程时，也是有参考价值的。

船舶工程教材委员会对本书进行了评审，并推荐出版。唐立民教授、曹富新教授等受教材委员会委托审阅了书稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。李忠硕士、王安稳硕士阅读了本书初稿，并校核了公式的推导，在此也表示感谢。

作者水平有限，错误和不当之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一篇　张量分析

第二篇　弹性力学

第一篇　张量分析

第一章　张量的概念

§1.1　引　　言

什么是张量？这是读者在开始学习本课程时自然会提出的问题。现从读者已有的力学知识出发，举例对这个问题作一些初步的阐述，使读者对张量这个新的概念，有个初步的理解。

在三维空间，一个矢量(例如力矢量、速度矢量等)在某参考坐标系中，有三个分量。这三个分量的集合，规定了这个矢量。当坐标变换时，这些分量按一定的变换法则变换。

在力学中还有一些更复杂的量。例如受力物体内一点的应力状态，有 9 个应力分量，如以直角坐标表示，用矩阵形式列出，则有

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

这 9 个分量的集合，规定了一点的应力状态，称为应力张量。当坐标变换时，应力张量的分量按一定的变换法则变换。再如，一点的应变状态，具有和应力张量相似的性质，称为应变张量。

把上述的力矢量、速度矢量、应力张量、应变张量等性质抽象化，撇开它们所表示的量的物理性质，抽出其数学上的共性，便得出抽象的张量概念。所谓张量是一个物理量或几何量，它由在某参考坐标系中一定数目的分量的集合所规定，当坐标变换时，

这些分量按一定的变换法则变换。张量有不同的阶和结构，这由它们所遵循的不同的变换法则来区分。矢量是一阶张量；应力张量、应变张量是二阶张量；还有三阶、四阶……等高阶张量。可以看出，张量是矢量概念的推广。关于张量的严密的解析定义，将在§1.8中讨论。

由张量的特性可以看出，它是一种不依赖于特定坐标系的表达物理定律的方法。采用张量记法表示的方程，在某一坐标系中成立，则在容许变换的其他坐标系中也成立，即张量方程具有不变性。这使它特别适合于表达物理定律，因为物理定律与人们为了描述它所采用的坐标系无关。因此，张量分析为人们提供了推导基本方程的有力工具。此外，张量记法简洁，是一种非常精炼的数学语言。

张量这个名词是佛克脱（W. Voigt）首先提出的，用来表示晶体的应力（张力）状态，可见张量分析与弹性力学关系的密切。当然，张量分析在力学领域中有广泛的应用，是力学工作者的重要数学工具。

§1.2 符号与求和约定

一、指标

在张量分析中广泛运用指标。几个变量的集合x_1，x_2，……x_n可表示为x_i，$i=1, 2, 3, \cdots, n$。几个变量的集合y^1，y^2, y^3，$\cdots y^n$可表示为y^i，$i=1,2,3,\cdots, n$。必须指出，y^1，y^2，$\cdots y^n$是n个独立变量，而不是变量y的1到n次幂。写在字符右下角的指标，例如x_i中的i称为下标。写在字符右上角的指标，例如y^j中的j称为上标。在以后的讨论中将说明使用上标或下标的涵义是不同的。

用作下标或上标的拉丁字母或希腊字母，除非作相反的说明

外，一般取从 1 到 n 的所有整数，其中 n 称为指标的范围。本书采用下述关于范围的规定，来表明三维空间和二维空间的量的区别：所有拉丁字母指标 i、j、k、l、m、…的范围是 1，2，3；所有希腊字母指标 α、β、γ、δ、…的范围是 1，2。例如坐标 x^i，是 $i=1, 2, 3$ 的三维空间的坐标，坐标 x^α 是 $\alpha=1, 2$ 的二维空间的坐标。

为了区别上标与乘幂，通常用括号表示乘幂，如 $(x^i)^2$ 表示 x^i 的二次方。

二、求和约定

若在一项中，同一个指标字母在上标和下标中重复出现，则表示要对这个指标遍历其范围 1，2，3，…n 求和。这是一个约定，称为求和约定。例如三维空间的平面方程为

$$a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 = p \tag{1.2-1}$$

式中 a_i，p 是常数。这个方程可写成

$$\sum_{i=1}^{3} a_i z^i = p \tag{1.2-2}$$

应用求和约定，则这个方程可写成如下形式：

$$a_i z^i = p \tag{1.2-3}$$

遍历指标的范围求和的重复指标称为哑指标或跑标。由于哑指标只是表示求和，因此，无论用哪个字母作哑指标都是一样的。例如 $a_i z^i$ 可以写成 $a_j z^j$ 等。相对于哑指标（求和指标）而言，不求和的指标称为自由指标。

为了避免混淆，在一项中，同一个指标字母的使用不能超过两次。例如不能把 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)^2$ 写成 $a_i x^i a_i x^i$，而应写成 $a_i a_j x^i x^j$。

三、克罗内克（Kronecker）符号 δ^i_j

克罗内克符号 δ^i_j 的定义是

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\delta^k_j = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \tag{1.2-4}$$

这样 $\delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$

$$\delta^1_2 = \delta^2_1 = \delta^2_3 = \delta^3_2 = \delta^1_3 = \delta^3_1 = 0 \tag{1.2-5}$$

克罗内克符号也可写成δ_{kj}或δ^{kj}。

下面举例说明克罗内克符号的应用。例如空间直角坐标系中，分量为dz^1，dz^2，dz^3的线元矢量长度的平方为

$$ds^2 = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 \tag{1.2-6}$$

应用克罗内克符号，上式可写成

$$ds^2 = \delta_{ij} dz^i dz^j \tag{1.2-7}$$

应当注意，上式中有二重求和，一个是遍历指标 i 的范围，另一个是遍历指标 j 的范围。

克罗内克符号有一些明显的性质，如$\delta^k_j A^k = A^k$；$\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j$；$\delta^i_j \delta^j_k = \delta^i_k$等。

四、置换符号

置换符号$e_{ijk} = e^{ijk}$定义为

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{当}i, j, k\text{是}1, 2, 3\text{的偶置换} \\ & (123、231、312)； \\ -1 & \text{当}i, j, k\text{是}1, 2, 3\text{的奇置换} \\ & (213、132、321)； \\ 0 & \text{当}i, j, k\text{的任意二个指标相同。} \end{cases}$$

(1.2-8)

i，j，k 的这些排列分别叫做循环排列、逆循环排列和非循环排列。

置换符号可用来展开三阶行列式。令

$$a=\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}=a^1_1a^2_2a^3_3+a^2_1a^3_2a^1_3+a^3_1a^1_2a^2_3$$
$$-a^1_1a^3_2a^2_3-a^2_1a^1_2a^3_3-a^3_1a^2_2a^1_3$$

若以 a^i_j 表示行列式中的普遍项，以 $|a^i_j|$ 表示行列式，则上述行列式可写成

$$a=|a^i_j|=e_{rst}a^r_1a^s_2a^t_3 \tag{1.2-9 a}$$

若将上式中各项的下标作一置换，例如置换为 $a^r_2a^s_1a^t_3e_{rst}$ 这就相当于把行列式的两列互相交换，因而行列式改变符号，等于 $-a$。再置换一次，又改变一次符号，回到 $+a$。这种性质可表示成如下的形式：

$$ae_{lmn}=e_{rst}a^r_la^s_ma^t_n \tag{1.2-9 b}$$

五、克罗内克符号与置换符号的关系

克罗内克符号与置换符号之间存在一定的关系。今讨论如下。

9 个量 δ^i_j 作为单位矩阵的元素，它们的行列式等于 1 。

$$\begin{vmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 & \delta^1_3 \\ \delta^2_1 & \delta^2_2 & \delta^2_3 \\ \delta^3_1 & \delta^3_2 & \delta^3_3 \end{vmatrix}=1$$

若用更普遍的形式表示上面的行列式，则有

$$A=\begin{vmatrix} \delta^r_l & \delta^r_m & \delta^r_n \\ \delta^s_l & \delta^s_m & \delta^s_n \\ \delta^t_l & \delta^t_m & \delta^t_n \end{vmatrix}$$

上式中若 r，s，$t=l$，m，$n=1$，2，3，则 $A=1$ 。由于这些排列中的任一置换都改变行列式的符号，所以行列式 A 为

$$A=\begin{vmatrix} \delta^r_l & \delta^r_m & \delta^r_n \\ \delta^s_l & \delta^s_m & \delta^s_n \\ \delta^t_l & \delta^t_m & \delta^t_n \end{vmatrix}=e^{rst}e_{lmn}$$

展开上述行列式，得

$$e^{rst}e_{lmn}=\delta^r_l\delta^s_m\delta^t_n-\delta^r_l\delta^s_n\delta^t_m+\delta^r_n\delta^s_l\delta^t_m-\delta^r_n\delta^s_m\delta^t_l$$
$$+\delta^r_m\delta^s_n\delta^t_l-\delta^r_m\delta^s_l\delta^t_n \qquad (1.2\text{-}10)$$

使上式中的一个下标和一个上标相等，并利用关系式 $\delta^i_j\delta^j_k=\delta^i_k$，可从上式导出下面的关系式，称为 e-δ 等式，

$$e^{rst}e_{rmn}=\delta^r_r(\delta^s_m\delta^t_n-\delta^s_n\delta^t_m)+\delta^r_n(\delta^s_r\delta^t_m-\delta^s_m\delta^t_r)$$
$$+\delta^r_m(\delta^s_n\delta^t_r-\delta^s_r\delta^t_n)=\delta^s_m\delta^t_n-\delta^s_n\delta^t_m \qquad (1.2\text{-}11)$$

$$e^{rst}e_{rsn}=3\delta^t_n-\delta^s_n\delta^t_s=2\delta^t_n \qquad (1.2\text{-}12)$$

$$e^{rst}e_{rst}=2\delta^t_t=6 \qquad (1.2\text{-}13)$$

利用这些结果，可以将行列式的展开公式（1.2-9 b）化成另一个很有用的形式。以e^{lmn}乘（1.2-9 b）式两边，得

$$ae_{lmn}e^{lmn}=6a=a^r_l a^s_m a^t_n e_{rst}e^{lmn} \qquad (1.2\text{-}14)$$

六、求和约定可以推广到微分公式

设$f(x^1, x^2, \cdots x^n)$为 n 个独立变量 x^1，x^2，…，x^n的函数，则它的微分可写成

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \qquad (1.2\text{-}15)$$

在偏微商$\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$中，$i$ 被认为是下标。

§1.3 曲线坐标

设$z^k(k=1, 2, 3)$是点$P(z)$的直角坐标。若三个函数

$$x^k=x^k(z^1, z^2, z^3) \qquad (k=1,2,3) \qquad (1.3\text{-}1)$$

在区域R中有唯一的逆函数

$$z^k=z^k(x^1, x^2, x^3) \qquad (1.3\text{-}2)$$

则点P有曲线坐标x^k。

一般来说，从几何关系能写出（1.3-2）式。若 z^k是单值、连续，有连续的一阶偏导数，且雅可比（Jacobi）行列式

$J=\left|\dfrac{\partial z^k}{\partial x^l}\right|$在区域$R$不等于0，即

$$J=\left|\frac{\partial z^k}{\partial x^l}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^3}\\[2ex] \dfrac{\partial z^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^3}\\[2ex] \dfrac{\partial z^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^3}{\partial x^3}\end{vmatrix}\neq 0\ （在区域R） \qquad (1.3\text{-}3)$$

则（1.3-2）式有唯一的逆函数（1.3-1)式。对应于$x^1(z^1, z^2, z^3)$ = 常数；$x^2(z^1, z^2, z^3)$ = 常数；$x^3(z^1, z^2, z^3)$ = 常数，方程式（1.3-1）分别给出三个曲面，它们相交于一点。这三个曲面称为坐标曲面。任意两个坐标曲面的交线定义一坐标曲线。通过P点有三条不重合的坐标曲线，它们定义点P的曲线坐标（x^1, x^2, x^3），如图1-1所示。

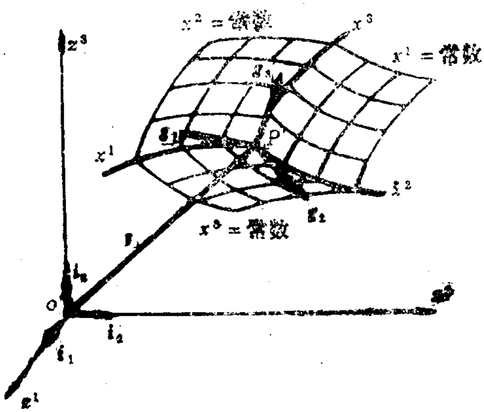

图 1-1

在曲线坐标系中，P点的位置矢量$\mathbf{r}$是曲线坐标(x^1, x^2, x^3)的函数。因为由图1-1及图(1.3-2)式可知

$$\mathbf{r}(z^1, z^2, z^3) = \mathbf{r}[z^1(x^1, x^2, x^3),\ z^2(x^1, x^2, x^3),\ z^3(x^1, x^2, x^3)] = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) \qquad (1.3\text{-}4)$$

处理弹性力学问题时，由于物体的几何形状，对有些问题采用直角坐标系并不适合，而必须采用曲线坐标系。最常用的曲线坐标系是正交曲线坐标系，如圆柱坐标系、球坐标系、平面极坐标系等。

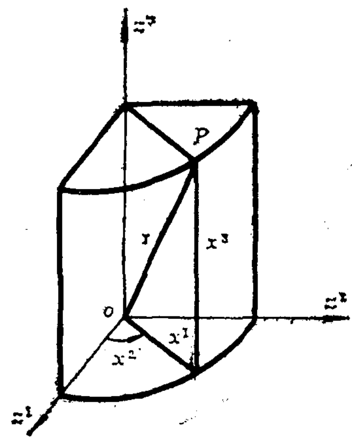

图 1-2

例 1　圆柱坐标系（图1-2）　圆柱坐标x^i由它们同直角坐标z^i的关系来定义。

从几何关系可以写出

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1\cos x^2 \\ z^2 &= x^1\sin x^2 \qquad (1.3\text{-}5) \\ z^3 &= x^3 \end{aligned}$$

雅可比行列式：

$$J = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1\sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1\cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1$$

除在z^3轴上$(x^1 = 0)$有$J = 0$外，(1.3-5) 式在各处都有唯一的逆变换：

$$x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2}$$

$$x^2 = \mathrm{arctg}\frac{z^2}{z^1} \tag{1.3-6}$$

$$x^3 = z^3$$

对于圆柱坐标系，通常采用下面的坐标符号，

$$x^1 = r, \qquad x^2 = \theta, \qquad x^3 = z \tag{1.3-7}$$

这样，圆柱坐标系的坐标面是r＝常数的圆柱面族，θ＝常数的半平面族，和z＝常数的平面族，（图1-2）。

张量分析的中心问题是研究坐标变换时张量分量的变换法则，因此张量分析必然涉及坐标变换，尤其是在讨论普遍张量时，必然涉及曲线坐标系之间的变换。

独立变量x^1，x^2，x^3的集合可以看作是在某个坐标系中规定一点P的坐标。将x^1，x^2，x^3通过以下的方程变换成一个新变量$\bar{x}^1$，$\bar{x}^2$，$\bar{x}^3$的集合：

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, x^3) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{1.3-8}$$

规定了一个坐标变换。逆变换

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \tag{1.3-9}$$

按相反的方向进行。为了保证这样一个变换是可逆的，并且在变量(x^1，x^2，x^3)的某个区域R内是一一对应的，亦即在区域R中的每个数集(x^1，x^2，x^3)定义一个唯一的数集($\bar{x}^1$，$\bar{x}^2$，$\bar{x}^3$)，并且反之亦然，其充分条件是：函数$\bar{x}^k(x^1, x^2, x^3)$在区域R中是单值、连续，有连续的一阶偏导数，雅可比行列式

$J = \left|\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\right|$在区域$R$内的任意点均不等于0。

具有上述性质的坐标变换称为容许变换。本书以后论及的坐标变换都是容许变换。若雅可比行列式$J = \left|\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\right|$处处为正，则一个右手坐标系变换为另一个右手坐标系。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com