黑博士“临考点题猜题”命题浓缩精华系列

2004年硕士研究生入学考试

数学 12月

最后冲刺密押

（五套卷）

组编　黑博士考研信息工作室

编著　蔡昌林　林祥源　魏柏芳

（清华大学著名命题研究专家）

陈跃祥　周华强　王东明

（北京大学著名命题预测专家）

连续多年国内同类最畅销书

本书是全国惟一的密押卷品牌系列书

数学二

世界图书出版公司

黑博士"临考点题猜题"详解与命题研究系列

2004年硕士研究生入学考试

数学最后冲刺密押5套 B卷（12月）

——新典型100题·数学二

（理工类·经典版）

组　编　黑博士考研信息工作室

主　编　铁　军　李　强（著名命题研究专家）

编　著　北京大学著名数学教授　周华强

清华大学著名数学教授　林祥源

北京大学著名数学教授　陈跃祥

清华大学著名数学教授　蔡昌林

北京理工大学数学博士　魏柏芳

上海交通大学数学博士　王东明

策划人　汪　澜

世界图书出版公司

西安·北京·广州·上海

图书在版编目（CIP）数据

硕士研究生入学考试试题详解与命题研究 / 陈志良 主编

—西安：世界图书出版西安公司，2003.10

ISBN 7 - 5062 - 6141 - 3

Ⅰ. 硕… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 098353 号

黑博士“临考点题猜题”详解与命题研究系列

数学最后冲刺密押 5 套卷（数学二）

——新典型 100 题

铁军 李强 主 编

焦毓木 责任编辑

黑博士工作室 总 策 划

世界图书出版西安公司 出版发行

（西安市南大街 17 号 邮编：710001 电话：7279676）

旗舰印务有限公司印刷

各地新华书店经销

开本：787×1092（毫米）1/16 印张：58 字数：1160 千字

2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-6141-3/H · 507

Wx 6141 全套十二册定价：120.00 元

目　录

理工类　数学二

紧急预订公告：黑博士临考最后冲刺·预测精华浓缩系列（5套）试卷

● 点题猜题 核心讲稿 ●

2004年全国硕士研究生入学考试
理工类·数学12月最后冲刺浓缩密押5套试卷

黑博士数学二试卷(一)

——北京大学数学强化班命题预测信息及精华浓缩

黑博士考研信息工作室
2003年12月于北京

高分经验警示:在当前激烈的考研竞争中,对于数学基础较好或具有中高级以上水平的同学而言,做一定数量的典型题是成功的关系,也就是说:"数学要想考高分,除迭做典型题之外,再没有其它的秘诀或捷径!"

提醒特别注意:此部分题目具有一定的代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!在2003年考研中,本书中48道题相似或命中考题中非客观题(大题)32道(次),其中数学一,10题136分;数学二,9题124分;数学三,11题142分;数学四,9题120分。

黑博士锦囊妙计:命题试卷中带 ※ 者为二级重点预测典型题,带 ※※ 者为一级重点预测典型题。此部分题目具有一定代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!

得分	评卷人

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中的横线上.)

(1) 设$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$,且$f'(a)=2(98)!$,则$a=$________.

※(2) 若当$x\to\infty$时,$\frac{1}{ax^2+bx+4}\sim\frac{1}{3x+2}$,则$a=$________.$b=$________.

(3) $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}\mathrm{d}x=$________.

(4) 计算$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=$________.

(5) 设$f(x)=\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}$,则多项式$f(x)$的全部根为________.

※※(6) A是三阶矩阵,$A\zeta_i=\zeta_i,i=1,2,3$,其中ζ_1,ζ_2,ζ_3线性无关,则$A=$________.

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

(7) 设$f(x)$ 在 x_0 处某邻域内连续，且有$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m}=k$，则使$f(x)$ 在 x_0 处取极大值的充分条件是（　　）

(A)m 为偶数，$k>0$.　　(B)m 为奇数，$k>0$.

(C)m 为偶数，$k<0$.　　(D)m 为奇数，$k<0$.

(8) 当 $x\to 0$ 时，下列 4 个无穷小量阶数最高的是（　　）

(A) $\dfrac{\sin x^2}{x}$.　　(B) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$.

(C) $e^{x^4-x}-1$.　　(D) $\int_0^x\sqrt{1-t}\,dt-x$.

※(9) 设$f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时 $f(x)\sim x$，$\varphi(x)\sim x^2$，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}f(t)\sin t\,dt$ 是 $\int_0^{\sin x}t^2\varphi(t)\,dt$ 的（　　）

(A) 高阶无穷小.　　(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶但不等价无穷小.　　(D) 等价无穷小.

※※(10) 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内具有连续的 4 阶导数，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$，且 $f^{(4)}(x_0)<0$，则（　　）

(A) $f(x)$ 在点 x_0 取极小值

(B) $f(x)$ 在点 x_0 取极大值

(C) 点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内单调减少

(11) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\dfrac{t}{2}\right)dt+\ln 2$，则 $f(x)$ 等于（　　）.

(A) $e^x\ln 2$　　(B) $e^{2x}\ln 2$　　(C) $e^x+\ln 2$　　(D) $e^{2x}+\ln 2$

(12) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\,dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)\,dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)\,dx$. 则有（　　）.

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

(13) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0$，且令 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$ 则（　　）

(A) $F(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.　　(B) $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但不可导.

(C) $F(x)$ 处处可导，但 $F'(x)$ 不连续.　　(D) $F(x)$ 处处可导，且 $F'(x)$ 连续.

※(14) 设 A,B 是 n 阶矩阵，A 可逆，且满足 $2B=A^{-1}B+E$，则必有（　　）.

(A) $B(2A-E)=E$.　　(B) $(2A-E)B=A$.

(C) $(2A-E)^{-1}=AB^{-1}$　　(D) $(2A-E)^{-1}=B^{-1}A$.

三、解答题（本题共9小题,满分94分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.）

得分	评卷人

(15)　（本题满分9分）

求常数A,B之值,使函数$f(x)=\begin{cases}\sin x+2Ae^x & x<0\\ 9\arctan x+2B(x-1)^3 & x\geq 0\end{cases}$在$x=0$处有一阶导数

得分	评卷人

※(16)　（本题满分8分）

设$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2} & x\neq 0\\ C & x=0\end{cases}$ 其中$f(x)$具有连续导数,且$f(0)=0$

(1) 确定C值,使$F(x)$连续;

(2) 在(1)的结果下,问$F'(x)$是否连续?

得分	评卷人

(17)　（本题满分9分）

求解方程$y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$.

得分	评卷人

※(18)　（本题满分10分）

设$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+x}{t+2x}\right)^t,x\geq 0$.

(1) 将由曲线 $y=f(x)$，x 轴，y 轴和直线 $x=1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周，求此旋转体体积.

(2) 在曲线 $y=f(x)$ 上找一点，使过该点的切线与两坐标轴所夹平面图形面积最大，并求该面积.

得分	评卷人

(19) （本题满分 12 分）

1. 设 $a<0$ 为常数，证明 $\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}\leqslant\frac{2+a}{1+a}$.

2. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 可微，且 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，$f(0)=0$；$g(x)\neq 0$，

(1) 求 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ 表达式；

(2) 研究 $y=F(x)$ 的性态并作出函数 $y=F(x)$ 的图形.

得分	评卷人

(20) （本题满分 12 分）

直线 $y=x$ 将椭圆 $x^2+3y^2=6y$ 分为两块，设小块面积为 A，大块面积为 B，求 $\frac{A}{B}$ 之值.

得分	评卷人

(21) （本题满分 12 分）

设 $c>0$，证明 $x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

得分	评卷人

※(22) （本题满分9分）

已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\6&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,且矩阵$X$满足$A^*X=2A^{-1}-AX+E$,其中$A^*$为$A$的伴随矩阵,$E$为3阶单位矩阵,求$X$.

得分	评卷人

(23) （本题满分13分）

问a为何值时,线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a\\x_1+2x_3+3x_4+2x_5=3\\4x_1+5x_2+3x_3+2x_4+3x_5=2\\x_1+x_4+2x_5=1\end{cases}$$

有解,并求出解的一般形式.

黑博士考研信息工作室
Black Doctor Workroom BeiJing

2004年全国硕士研究生入学考试
理工类·数学12月最后冲刺浓缩密押5套试卷
黑博士数学二试卷(一)参考答案

黑博士考研信息工作室
2003年12月于北京

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中的横线上.)

(1) 2

【解析】 当 $x=2$ 时,$f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}x(x-1)(x-3)\cdots(x-100)$

$=2(98)!$,所以应选 $a=2$.

(2) $a=0,b=3$

【解析】 由题设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{ax^2+bx+4}=1$,必有 $a=0,b=3$.

(3) $(e-1)\mathrm{d}t$.

【解析】 $t=0$ 时,$x=1$.对方程两边关于 t 求导,$1-\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+1\right)e^{-(x+t)^2}=0$,将 $t=0,x=1$ 代入该式得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=e-1$,即 $\mathrm{d}x\Big|_{t=0}=(e-1)\mathrm{d}t$.

(4) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. 令 $x-1=\sec t$,则原式 $=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

(5) $-1,2,1$.

方法一 $f(x)$ 是范德蒙行列式的转置,所以

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-1)(1+1)(1-2)(2+1)$$
$$=-6(x+1)(x-2)(x-1).$$

所以 $f(x)$ 的全部根为 $-1,2,1$.

方法二 取 $x=-1$,则行列式第1,第4行相同,所以 $f(-1)=0$.这表明 -1 是 $f(x)$ 的一个根.同样由 $f(2)=0$,$f(1)=0$ 知2,-1 也是 $f(x)$ 的根.现 $f(x)$ 是3次多项式,所以 $f(x)$ 的根为 $-1,2,1$.

方法三 直接用行列式性质(比如用归化法)计算出 $f(x)=-6(x+1)(x-2)(x-1)$,也可得 $f(x)$ 的全部根为 $-1,2,1$.

(6) E

【解析】 由 $A\zeta_i=\zeta_i,i=1,2,3$,得

$$[A\zeta_1,A\zeta_2,A\zeta_3]=A[\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3]=[\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3]$$

因 ζ_1,ζ_2,ζ_3 线性无关,故 $P=[\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3]$ 可逆,上式右乘 P^{-1},得 $A=E$.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

(7) C

【解析】 当 m 为偶数,$k<0$ 时,由极限保号性知,在 x_0 某邻域内 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^m}<0$,从而

$f(x) < f(x_0)$,故 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

(8) B

【解析】 分别求出各自的等价无穷小量即可. 易知 $x \to 0$ 时

$\frac{\sin x^2}{x} \sim x, \sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x} \sim \frac{1}{4}x^3, e^{x^4-x}-1 \sim -x, \int_0^x \sqrt{1-t}dt - x \sim \frac{1}{4}x^2.$

(9) A

【解析】 由洛必达法则,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\sin t dt}{\int_0^{\sin x} t^2\varphi(t)dt} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)\sin x^2}{\cos x\sin^2 x\varphi(\sin x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2xx^2x^2}{\cos x x^2 x^2} = 0$,故

$\int_0^{x^2} f(t)\sin t dt$ 是 $\int_0^{\sin x} t^2\varphi(t)dt$ 的高阶无穷小.

(10) B

【解析】 由泰勒公式 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$,其中 ξ 在 x 与 x_0 之间. 根据题设,当 x 充分靠近 x_0 时,$f(x)-f(x_0) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_0)^4 < 0$,故 $f(x)$ 在点 x_0 取极大值.

(11) B

【解析】 将方程两边求导得到 $f'(x) = f(x)\cdot 2$.

且 $f(0) = \ln 2$, 故方程的解为 $y = ce^{2x}$.

$\ln 2 = c\cdot e^0$ $c = \ln 2$,故 $y = e^{2x}\cdot\ln 2$.

(12) D

【解析】 注意到 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx$ 为奇函数,故其在对称区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内积分值为 0

$N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx$ 前面 $\sin^3 x$ 为奇函数,积分值为 0,后面 $\cos^4 x$ 为偶函数且恒为非负,故积分值为正,同理,可知 P 为负值. 故 $P < M < N$.

(13) (D).

【解析】 按照函数连续与可导的定义判断之.

$$\lim_{x\to 0}F(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1} = f'(0) = F(0).$$

$$\begin{aligned}F'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}\\ &= \frac{1}{2}f''(0).\end{aligned}$$

于是有
$$F'(x) = \begin{cases}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}f''(0), & x = 0.\end{cases}$$

从而知 $F(x)$ 处处可导.

又 $$\lim_{x\to 0}F'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}f''(0) = F'(0).$$

故 $F'(x)$ 连续.

(14) B

【解析】 由题设 $2B = A^{-1}B + E$,等式两边左乘 A,得

$$2AB = B + A$$

故 $$2AB - B = (2A-E)B = A,\quad \text{(B) 成立.}$$

(A) 中公因子 B 往左提是错误的,(C)(D) 中,矩阵 B 不一定可逆,故不一定成立.

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分9分)

【解析】 因连续是可导的必要条件,所以 $f(0-) = f(0+) = f(0)$,

而 $f(0-) = 2A, f(0+) = -2B, f(0) = -2B$,故 $A = -B$

又由 $f'_-(0) = f'_+(0)$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x + 2Ae^x + 2B}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x + 2A(e^x-1)}{x} = 1 + 2A$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{9\arctan x + 2B(x-1)^3 + 2B}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{9\arctan x + 2B[(x-1)^3+1]}{x}$$

$$= 9 + 2B\cdot 3 = 9 + 6B$$

可得 $1 + 2A = 9 - 6A$,于是 $A = 1, B = -1$

(16) (本题满分8分)

【解析】 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}F(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x^2} \xlongequal{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}f(0) = 0$

所以 $C = F(0) = 0$ 时 $F(x)$ 连续.

(2) 当 $x \neq 0$ 时,$F'(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(x^2f(x) - 2\int_0^x tf(t)\,dt\right)$.

$x = 0$ 时,$F'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x^3}$

$$\xlongequal{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3}f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}F'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x) - 2\int_0^x tf(t)\,dt}{x^3}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2f'(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}f'(0)$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=F'(0)$,所以$F'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续.

(17)（本题满分9分）

【解析】 将y看作自变量,x看作因变量得$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\ln y}=\frac{1}{y}$,这是一阶线性非齐次方程,由公式得

$$x=e^{-\int\frac{1}{y\ln y}dy}\left[\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{1}{y\ln y}dy}dy+C\right]=e^{-\ln y}\left[\int\frac{1}{y}e^{\ln\ln y}dy+C\right]$$

$$=\frac{1}{\ln y}\left[\int\frac{1}{y}\ln y dy+C\right]=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}.$$

(18)（本题满分10分）

【解析】 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{x}{t+2x}\right)^{-\frac{t+2x}{x}\cdot\left(-\frac{x}{t+2x}\right)\cdot t}=e^{-x}(x\geqslant 0)$,

(1) 体积$V=\pi\int_0^1y^2dx=\pi\int_0^1e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2})$.

(2) 设切点为$(\alpha,e^{-\alpha})$,则切线方程为$y-e^{-\alpha}=-e^{-\alpha}(x-\alpha)$. 令$x=0$得$y=(1+\alpha)e^{-\alpha}$,令$y=0$得$x=1+\alpha$,由切线与坐标轴所夹面积为

$$S=\frac{1}{2}(1+\alpha)^2e^{-\alpha},S'=\frac{1}{2}(1+\alpha)(1-\alpha)e^{-\alpha},$$

令$S'=0$,得$\alpha=1,\alpha=-1$(舍去).

由于当$\alpha<1$时$S'>0$,$\alpha>1$时$S'<0$,故当$\alpha=1$时面积S有极大值也即最大值. 故所求切点为$(1,e^{-1})$,最大面积为$2e^{-1}$.

(19)（本题满分12分）

【证明】 记$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+a-x}, & x<0;\\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+a-x}, & 0\leqslant x<a;\\ \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x-a}, & x\geqslant a.\end{cases}$

则有$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0;\\ \frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a;\\ \frac{-1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a,\end{cases}$

因此当$x\in(-\infty,0)$时$f'(x)>0$故$f(x)$单增,因此$f(0)=\frac{2+a}{1+a}$为$f(x)$在$(-\infty,0]$上最大值. 当$x\in(a,+\infty)$时$f'(x)<0$故$f(x)$单减,因此$f(a)=\frac{2+a}{1+a}$为$f(x)$在$[a,+\infty)$上最大值. 当$x\in(0,a)$时,$f'(x)$有唯一驻点$x=\frac{a}{2}$,又$x<\frac{a}{2}$时$f'(x)>0$,$x>\frac{a}{2}$时,$f'(x)$

<0,故$f\left(\frac{a}{2}\right)$为$[0,a]$上最大值,$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{4}{2+a}$. 由于$\frac{4}{2+a}<\frac{2+a}{1+a}$. 故对于任意$x$,$f(x)\leqslant\frac{2+a}{1+a}$.

【解析】 (1) 由 $F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=\frac{g^2(x)-f^2(x)}{g^2(x)}=1-F^2(x)$ 知,$\frac{F'(x)}{1-F^2(x)}=1$,积分得$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{F(x)+1}{F(x)-1}\right|=x+C$. 由 $F(0)=0$,代入得 $C=0$,故 $F(x)=1-\frac{2}{e^{2x}+1}$.

(2) 由于 $F'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0$,知 $F(x)$ 单调增加,令 $F''(x)=\frac{8e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}=0$,得 $x=0$,当 $x>0$ 时 $F''(x)<0$,曲线下凹的.$x<0$ 时,$F''(x)>0$,曲线上凹的,$(0,0)$ 是拐点. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$,$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-1$,故 $y=1$,$y=-1$ 是水平渐近线.

(20) (本题满分 12 分)

【解析】 椭圆方程化为标准形式为:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{y-1}{1}\right)^2=1$$

长、短半轴分别为 $a=\sqrt{3}$,$b=1$,所以椭圆面积为

$$S=\pi ab=\sqrt{3}\pi$$

由 $y=x$,$x^2+3y^2=6y$ 联立解得交点 P 的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,于是:

$$\begin{aligned}
A&=\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{6y-3y^2}-y)\mathrm{d}y\\
&=\sqrt{3}\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-(1-y)^2}\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{3}{2}}y\mathrm{d}y\\
&\xlongequal{\text{令}\ 1-y=\cos t}\sqrt{3}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2t\mathrm{d}t-\frac{9}{8}\\
&=\sqrt{3}\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1-\cos2t}{2}\mathrm{d}t-\frac{9}{8}\\
&=\sqrt{3}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{3}\pi}-\frac{9}{8}\\
&=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{4},
\end{aligned}$$

$$B=\sqrt{3}\pi-A=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$$

故 $$\frac{A}{B}=\frac{4\sqrt{3}\pi-9}{8\sqrt{3}\pi+9}$$

(21) (本题满分 12 分)

【解析】 易由数学归纳法,证明$\{x_n\}$是递增的,且 $x_n<1+\sqrt{c}$,从而有上界,因此$\{x_n\}$收

敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$令$n\to+\infty$,得$a=\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(22)（本题满分9分）

【解析】 由$|A|=-4$知,$AA^*=|A|E=-4E$. 在等式

$$A^*X=2A^{-1}-AX+E$$

两边左乘A得 $AA^*X=2E-A^2X+A\Rightarrow -4X=2E-A^2X+A$.

移项化简得 $(A^2-4E)X=A+2E\Rightarrow(A+2E)(A-2E)X=A+2E$.

因$|A+2E|=\begin{vmatrix}4&1&0\\6&3&0\\0&0&3\end{vmatrix}=18\neq0$,所以$A+2E$可逆;

$|A-2E|=\begin{vmatrix}0&1&0\\6&-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=6\neq0$,所以$A-2E$可逆.

从而$X=(A-2E)^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&0\\6&0&0\\0&0&-6\end{bmatrix}$.

(23)（本题满分13分）

【解析】 $\left[\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\1&0&2&3&2&3\\4&5&3&2&3&2\\1&0&0&1&2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\1&0&2&3&2&3\\0&0&0&0&0&5-5a\\1&0&0&1&2&1\end{array}\right]$

$\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&1&1&1&1&a\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&5-5a\\1&0&0&1&2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}0&1&0&-1&-1&a-2\\0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&5-5a\\1&0&0&1&2&1\end{array}\right]$

因此,当$a=1$时,原方程组有解,且解的一般形式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\text{(其中 }k_1,k_2\text{ 为任意常数)}$$

● 点题猜题 核心讲稿 ●

2004 年全国硕士研究生入学考试
理工类 · 数学 12 月最后冲刺浓缩密押 5 套试卷

黑博士数学二试卷(二)

——清华大学数学强化班命题预测信息及精华浓缩

黑博士考研信息工作室
2003 年 12 月于北京

高分经验警示:在当前激烈的考研竞争中,对于数学基础较好或具有中高级以上水平的同学而言,做一定数量的典型题是成功的关系,也就是说:"数学要想考高分,除过做典型题之外,再没有其它的秘诀或捷径!"

提醒特别注意:此部分题目具有一定的代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!在 2003 年考研中,本书中 48 道题相似或命中考题中非客观题(大题)32 道(次),其中数学一,10 题 136 分;数学二,9 题 124 分;数学三,11 题 142 分;数学四,9 题 120 分。

黑博士锦囊妙计:命题试卷中带 ※ 者为二级重点预测典型题,带 ※※ 者为一级重点预测典型题。此部分题目具有一定代表性、典型性、预测性、综合性,特别推荐!

得分	评卷人

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中的横线上.)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(2^x+x)^{\frac{1}{x}} =$ ________.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x}$, n 为正整数,则 $f^{(n)}(-2)=$ ________.

(3) 函数曲线 $y=-x^3+3x^2+9x-27$ 的切线的斜率的最大值是________.

(4) 微分方程 $y''+4y=\sin 2x$ 应设的特解形式为 $y^*=$ ________.

※(5) 线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 = b_1, \\ x_2-x_3 = b_2, \\ x_3-x_4 = b_3, \\ x_4-x_5 = b_4, \\ -x_1+x^5 = b_5, \end{cases}$$

有解的充要条件为 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=$ ________.

(6) 非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=4 \\ x_1-3x_2+2x_3-6x_4=1 \\ x_1+5x_2-x_3+10x_4=6 \end{cases}$

的线性无关解向量的个数是________.

得分	评卷人

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,$I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\ (a>0)$,则与 I 不相等的是(　　)

(A) $\int_{-a}^{0} f(-x)\mathrm{d}x$　　(B) $\frac{1}{a}\int_0^1 f\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$

(8) 已知 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$,$g(x)=\int_0^{1-\cos x}\tan t\mathrm{d}t$ 和 $h(x)=\tan x-\sin x$ 当 $x\to 0$ 时都是无穷小量,若按照它们关于 x 的阶数从低到高的顺序排列起来,则是(　　).

(A) $f(x),g(x),h(x)$.　　(B) $h(x),f(x),g(x)$.

(C) $f(x),h(x),g(x)$.　　(D) $h(x),g(x),f(x)$.

※(9) $y=f(x)$ 是方程 $y''-6y'+9y=0$ 的一个解,若 $f(x_0)<0$,$f'(x_0)=0$,则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　)

(A) 取极大值.　　(B) 取极小值.

(C) 某邻域内单增.　　(D) 某邻域内单减.

(10) 曲线 $y=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ 的渐近线条数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(11) 对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)

(A) 存在且为零.　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.

(12) 设函数 $f(x),g(x)$ 是大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$,则当 $a<x<b$ 时,有(　　)

(A) $f(x)g(b)<f(b)g(x)$.　　(B) $f(x)g(a)<g(x)f(a)$.

(C) $f(x)g(x)<f(a)g(a)$.　　(D) $f(x)g(x)<f(b)g(b)$.

※※(13) 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域存在偏导数 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$,$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 且偏导函数在 (x_0,y_0) 不连续.则下列结论中正确的是(　　).

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微且 $\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y$.

(B) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不可微.

(C) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 沿任意方向存在方向导数.

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线的方向向量是 $\left(0,1,\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$,