

高等学校教材

惯性测量系统 的理论与应用

祝永刚 合编
徐正扬

测绘出版社

惯性测量系统的 理论与应用

祝永刚 合编
徐正扬

测绘出版社

内 容 简 介

本书是根据有关课程的教学大纲编写的。它较全面地阐述了惯性测量系统的工作原理与基本理论,重点介绍了惯性测量系统的分析方法。对系统的无部件、初始对准和数据处理等也作了比较详细的叙述。书中还对惯测系统的发展趋向如激光陀螺仪、捷联式系统及卫导-惯性组合系统等作了概略的介绍。

本书除适用于大地测量和工程测量专业高年级学生和研究生的教学外,也可供地质、矿山、石油海洋勘探、海底定位及航测等有关专业的科研人员和工程技术人员参考。

惯性测量系统的理论与应用

祝永刚 徐正扬

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/16 · 印张 16.5 · 字数 371 千字

1989年6月第一版 · 1989年6月第一次印刷

印数 0,001—2,100 册 · 定价 3.80 元

ISBN 7-5030-0261-1/P · 100

前 言

惯性测量是70年代中叶出现的一门新的应用技术，它不仅在军事方面，而且在大地测量、工程测量和资源勘探、海洋开发等领域中都有重要的应用价值。由于具有全天候、自主式、快速多能和机动灵活等优点，它将为大地测量和工程测量作业自动化及全能性提供一个重要手段。

本书共分十二章。第一、二、三章结合实际有针对性地介绍了惯测系统的发展概况和有关的基础知识，第四、五、六章较简明地阐述了惯性测量系统的基本元部件（陀螺、加速度计、惯性平台），第七章对惯性测量作业作了较详细的叙述，第八、九、十、十一章较系统地阐明了惯测系统的数学模型、误差分析、初始对准和数据处理，最后，第十二章简要地介绍了卫导-惯性组合系统。

第一、二、七、九、十一、十二章及附录 I 由祝永刚副教授编写；第三、四、五、六、八、十章及附录 II 由徐正扬教授编写。书中插图由冯秦珍和黄庆国绘制。

全书编写完后，请张儒杰教授、金国雄教授、沈绍虞研究员等同志作了审阅，蒙他们提出了许多宝贵意见，谨此表示感谢。

由于惯性技术所涉及的范围比较广泛，书中难免有错误或不妥之处，希读者批评指正。

——编者

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 惯性测量的特点及发展概况	(1)
§ 1-2 惯性测量的定位概念及系统类别	(4)
§ 1-3 惯性测量系统的主要部件	(6)
第二章 基础知识	(9)
§ 2-1 位置矢量及其坐标变换	(9)
§ 2-2 速度、加速度、圆周运动	(19)
§ 2-3 转动惯量、动量矩和动量矩定律	(24)
§ 2-4 绝对运动、相对运动和牵连运动	(26)
§ 2-5 加速度的测定——比力	(29)
§ 2-6 舒拉摆原理	(30)
第三章 惯性测量中的坐标系	(33)
§ 3-1 惯性坐标系	(33)
§ 3-2 地心地球坐标系	(34)
§ 3-3 参心地球坐标系	(40)
§ 3-4 站心地球坐标系	(42)
§ 3-5 其他坐标系	(44)
第四章 陀螺仪	(46)
§ 4-1 概述	(46)
§ 4-2 陀螺仪的基本特性	(48)
§ 4-3 陀螺仪的表观运动	(52)
§ 4-4 二自由度陀螺仪	(53)
§ 4-5 单自由度陀螺仪	(56)
§ 4-6 传感器和力矩器	(61)
§ 4-7 陀螺仪的漂移模型	(64)
第五章 加速度计	(66)
§ 5-1 概述	(66)
§ 5-2 液浮摆式加速度计	(69)
§ 5-3 挠性加速度计	(73)
§ 5-4 积分陀螺加速度计和静电加速度计	(76)
§ 5-5 加速度计的数学模型	(79)
第六章 惯性平台	(82)

§ 6-1 概述	(82)
§ 6-2 单轴稳定平台系统	(84)
§ 6-3 单轴平台稳定回路的传递函数	(87)
§ 6-4 三轴稳定平台	(94)
§ 6-5 舒拉调谐平台	(101)
第七章 惯性测量作业	(104)
§ 7-1 引言	(104)
§ 7-2 惯性测量的准备工作	(105)
§ 7-3 CDU 面板简介	(106)
§ 7-4 惯性测量的观测过程	(109)
§ 7-5 其他有关问题	(113)
第八章 惯性测量系统的机械编排方程	(121)
§ 8-1 引言	(121)
§ 8-2 指北方位惯测系统的基本原理	(121)
§ 8-3 指北方位惯测系统的机械编排方程	(127)
§ 8-4 自由方位惯测系统	(134)
§ 8-5 空间稳定式惯测系统	(139)
§ 8-6 捷联式惯测系统	(142)
第九章 惯测系统的误差分析	(152)
§ 9-1 惯测系统的误差源	(152)
§ 9-2 Ψ 方程	(161)
§ 9-3 指北方位系统的误差模型	(164)
§ 9-4 状态方程的解	(173)
§ 9-5 系统误差传播特性分析	(181)
§ 9-6 系统设计中元件提出的要求	(187)
第十章 惯性测量系统的初始对准	(190)
§ 10-1 概述	(190)
§ 10-2 初始对准方程	(191)
§ 10-3 系统的模拟快速整平和粗对准	(192)
§ 10-4 系统的精对准	(193)
§ 10-5 陀螺仪的测漂、定标及方位误差计算	(200)
§ 10-6 其他对准方法简介	(209)
第十一章 惯性测量数据处理方法	(211)
§ 11-1 引言	(211)
§ 11-2 卡尔曼滤波公式的推导	(213)
§ 11-3 卡尔曼滤波公式的讨论	(218)
§ 11-4 卡尔曼滤波的应用示例	(220)

§ 11-5 测后数据处理.....	(227)
第十二章 卫导-惯性组合系统	(234)
§ 12-1 引言.....	(234)
§ 12-2 全球定位系统 (GPS)	(234)
§ 12-3 卫导-惯性组合系统的工作原理.....	(236)
§ 12-4 组合系统的定位误差.....	(237)
附录 I 拉普拉斯 (Laplace) 变换	(242)
附录 II 惯性测量英汉词汇对照表	(249)
主要参考文献	(256)

第一章 绪 论

§ 1-1 惯性测量的特点及发展概况

惯性大地测量（简称惯性测量）是利用惯导技术，同时、快速地获得多种大地测量数据（如经纬度、高程、方位角、重力异常和重线偏差等）的一种新技术。有关它的仪器，今通称为惯性测量系统。

它的基本原理十分简单，即通过惯性元件（陀螺仪和加速度计等）感受载体（汽车或直升飞机等）在运行过程中的加速度，由计算机对输入的加速度进行两次积分，便可得出该载体在空间的位置变化等，所以它属于相对测量系统，从原理上讲，是属于物理性的。由于它的出现，给大地测量和快速定位提供了一个新的前景。

惯性测量系统是在惯性导航系统的基础上发展起来的。长期来，由于惯导精度低，一直未被大地测量工作者重视。在60年代中叶，对于惯性技术的研究，其目标主要集中在发展长距离，低精度的惯导系统上。

1967年，美国利登（Litton）公司受美国工程兵测绘实验室的委托对原有的定位系统进行改进，终于在1972年成功地生产了世界上第一台惯性测量系统，取名为位置和方位测定系统（Position and Azimuth Determining System），简称为PADS系统。起初主要供军队使用，从1975年开始供应市场，取名为惯性定位系统（Inertial Positioning System），简称为IPS系统，也有人称为自动测量仪（Auto-Surveyor），简写为AS。在加拿大，称它为惯性测量系统（Inertial Surveying System），简称为ISS系统，这种仪器，后来由于软件配备方面的改进，发展成另一种型号，还可以测定重力异常和垂线偏差，称为快速大地测量系统（Rapid Geodetic Surveying System），简称为RGSS系统。

1982年，利登系统进行了改型，在提高精度方面作了许多努力，新的利登系统称为LASS-II（Litton Auto-Surveyor System-II）系统。

生产惯测系统的还有英国弗伦梯（Ferranti）公司，它生产的弗伦梯惯性陆用测量仪（Ferranti Inertial Land Surveyor），简称FILS系统。目前，在市场上出售的已是它的改进型，其型号为FILS-2。该系统从原理上讲和利登系统一样都是属于当地水平系统，只不过利登系统是属自由方位平台式，而它属于指北平台式。利登系统具有实时卡尔曼滤波器，而它对实时的误差控制，只采用简单的曲线拟合。加拿大卡加里大学为该仪器编制了卡尔曼滤波器和平滑处理程序，从而使成果的精度得到了提高。

另一种是美国霍尼威尔（Honeywell）公司生产的仪器，叫做大地测量标准精密惯性导航仪（Geodetic Standard Precision Inertial Navigator），简称为Geo-SPIN。这是目前唯一专门为大地测量设计的仪器。它和上面二种系统不同，它采用了空间稳定平台的方案，并采用了目前最精密的陀螺仪，即静电陀螺仪，其改进型为GEO-SPIN II。

我国研制的惯性测量系统已在1979年获得成功，测试结果表明其精度相应于PADS系统。现正致力于提高精度和可靠性的研究。

为了说明惯性测量系统技术进步情况，今将上述几种系统的功能及各项精度指标列于表1-1。

表 1-1

项目 精度 系统类型	平面位置 中 误 差	高 程 中 误 差	方位角 中误差	重力异常 中误差	垂线偏差 分 量 中误差	备 注
PADS	±20m	±10m	±1'			
IPS	± 2m	±1m	±0.5'	±6mgal	±3"	
RGSS	±50cm	±20cm (汽车) ±40cm (直升机)		±2mgal	±1.5"	
LASS-I	$(0.15 + \frac{D}{10,000})m$	$(0.12 + \frac{D}{20,000})m$				D 为测线总长
FILS-2	±3m (汽车) ±4.5m (直升机)	±2m				
GEOSPIN I	±25cm	±25cm		±1-2mgal	±1.5"	

应当指出：表中的精度指标因受具体作业环境、施测方案和观测成果的处理方式等诸多因素的影响具有较大的变动范围，只能给大家提供一个量级上的参考。

表1-1表明，目前生产的惯性测量系统虽具有自主、快速和多功能等特点，但就其精度而言，还不足以用它来建立首级国家控制网。在北美地区，特别是加拿大，通常先用卫星网来建立首级国家控制，其密度大约为每隔100多公里布设一个点，然后用惯性测量系统来加密，从某一已知点出发，每隔10km左右内插一个点，再闭合到另一已知点上。也就是说，用卫星大地测量来作绝对定位，而用惯性大地测量来作相对定位，两者配合使用。它的经济效益是很明显的。根据国外大量实践表明：当采用车载方式作业时，其费用只是常规大地测量方法的1/2；当采用机载方式作业时，其费用仅仅是常规方法的1/3。至于在人力方面的节省更为显著。惯性大地测量的最大优点是在于时间上的节约。例如，如果要在相距100多公里的已知点之间，用惯性测量方法每隔10km左右加密一个点，它的作业速度平均为每天16~17个点。

为了进一步说明目前惯性技术在大地上测量的地位和作用，今给出图1-1。该图向我们粗略地显示了各种近代大地测量方法的适用范围和精度情况。

由上图可知，就目前的惯性大地测量来说，其精度依然偏低。对于中长距离的测定，当推甚长基线干涉法的精度为最高。若就今后发展来说，以全球定位系统GPS为主，而其他各种大地测量方法与它配套使用是个方向。

鉴于在今后十年内，惯性元件的精度可望提高两个数量级，有关的数学模型也将进一步精化以及观测网的优化等等，可以预言，在不久的将来，惯性测量的精度会有较大的提高。

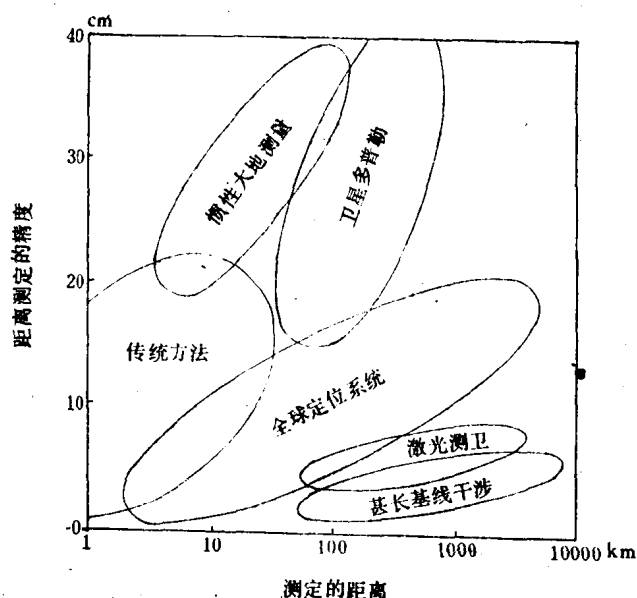


图 1-1 近代各种大地测量方法之比较

在军事上，惯测系统主要用来布设军控网。它能在 6 个小时内为一个炮兵师的防区 ($50 \times 20 \text{ km}$) 布设约 60 个左右的军控点，这与许多近代科学技术一样，由于它与军事用途密切相关，所以惯性技术将会得到迅速发展。

在民用上，由于惯性测量系统本身可集中反映出该国的科技发展水平，故生产这类系统的国家都视这一技术为高度机密。因此，对它的民用开发还很不够。当前，主要用于土地利用、地球物理勘探、石油钻井平台的定位、地下管道的埋设、矿山测量、沙漠开发、开荒垦殖、冰川考察等。近年来，还用于监视地壳运动，提供地震预报资料，海洋测量及地籍测量等。在那些只适宜于直升机到达的边远地区，它的效用更为突出。

1985 年 9 月在加拿大召开的第三次关于惯性测量技术国际讨论会上，已经看到了令人鼓舞的进展。在惯性重力测定方面，今后将着重发展重力梯度仪与惯性平台的组合，用来直接测定重力变化，以实现重力与惯性力的分离，同时为海洋重力测量和空中重力测量提供了一种有力的手段。进行空中重力测量在军事上具有重要的意义，因为弹道导弹在空中飞行时，将受到地球引力场的作用，所以空间引力场的模型不精确对导弹的远行轨道影响很大，使导弹运行轨道的偏离会直接影响到命中目标的准确度。另一个重要的发展方向是在进行连续测量方面，惯性测量可与全球定位系统或其他手段相组合，引入位置修正信息而使它获得进行连续测量的能力，这样使惯性测量系统既免去了零速订新，又保证了精度。在这类组合系统中，美国德富珀实验室的地形剖面航测系统 (APTS) 就是一个成功的例子。这一系统是为美国地质测量局研制的，目的是测量美国大盐湖 1000 km^2 沙漠地区的地形，以便控制大盐湖的水位，解决这一地区的排灌控制问题。APTS 是一套空用惯性导航系统加上一套对地面安装的激光反射镜实现跟踪的激光测距仪，后者对惯性测量系统连续地提供位置修正信息，其定位精度可达到 $3 \sim 4 \text{ mm}$ 。另外，又如西德波恩大学等

有关单位所研制的矿井惯性测量系统(ISSM), 由于煤层开采, 矿井会发生变形, 为了保证安全生产, 需对矿井进行经常性的测量, 该系统圆满地解决了这一问题。这充分说明了惯性测量有它独特的优势。如果这一工作让 GPS 接收机来完成, 这是无法实现的, 因为 GPS 接收机在矿井中或在城市中有高层建筑地区是无法正常工作的。再如, 将惯性测量系统与航空摄影侦察配合, 它不仅可以提供姿态基准, 同时还可以提供摄影中心的瞬时坐标, 这正是军事测绘中长期以来难以解决的一个问题。还可以指出, 若在潜艇上装上惯性测量系统, 便能提供潜艇的瞬时坐标, 测定大陆架、海底地形和海底重力。所以, 在未来的岁月里, 惯性测量技术在各个领域的应用将会越来越广泛。

§ 1-2 惯性测量的定位概念及系统类别

前已提及, 惯性测量是通过测定运动物体的加速度来求定该物体的位置。下面举个简单的例子说明。

设想有一车辆沿着某坐标系的 X 轴行驶, 车内加速度计的敏感轴始终保持与行驶方向一致, 且假定此处不考虑外部引力场的影响。如图 1-2, 令加速度计每隔 t 秒读取一次加速度(在惯测系统中, t 通常取 $16\mu s$)、图中点位 X_1 、 X_2 ……为相应于车辆行驶了 t 、 $2t$ 、……后所处的位置。于是, 欲求车辆行驶 it 秒后的速度 V_i 和位置 X_i , 只需测定此时的加速度 a_i 就可以了, 为此, 可作如下数值求和计算, 见表 1-2。



图 1-2

表 1-2

测 站	加 速 度	速 度	位 置
0	a_0	$V_0=0$	$X_0=0$
1	a_1	$V_1=V_0+\frac{(a_0+a_1)}{2}t$	$X_1=X_0+\frac{(V_0+V_1)}{2}t$
...	...	...	...
i	a_i	$V_i=V_{i-1}+\frac{(a_{i-1}+a_i)}{2}t$	$X_i=X_{i-1}+\frac{(V_{i-1}+V_i)}{2}t$

由表 1-2 可知, 只要测定了位移加速度 a_i , 又知道其初始状态(这里是 V_0 和 X_0), 就可以用数值求和的办法来计算任意时刻车辆在 X 轴上的位置了。显然, 如果车辆在三维空间运动, 只要能同时测定它在三个轴线上的位移加速度, 那么, 车辆在三维空间的坐标就可用同样方式确定。以上就是惯性测量定位的基本概念。

应当指出, 位移加速度一词仅指由于车辆位移所引起的加速度, 而不包括由引力所引起的加速度(实际上是不可分离的, 以后再作讨论)。另外, 当车辆作变速直线运动时, 表

中的数值求和应以积分形式表示, 即

$$V_1 = V_0 + \int_0^1 a dt$$

$$X_1 = X_0 + \int_0^1 V dt = X_0 + \int_0^1 \int_0^1 a dt dt$$

所以, 当测得一运动体在某一方向上的位移加速度后, 通过一次积分, 顾及初始速度, 就得到它的瞬时速度, 再进行第二次积分, 顾及其初始位置, 便可得到运动体在该方向上的瞬时位置。

根据上述概念, 现在来考察一下某惯性测量系统测定平面位置的具体情况。

加速度计装在惯性平台上。加速度计作为测量部件, 惯性平台作为基准面, 受陀螺和计算机的控制, 随时跟踪地理坐标系。将这个系统固定在载体上, 载体从某一已知点出发, 运行到其他需要测定坐标的点上。沿途加速度计 A_N 测定南北方向的加速度 a_N , 加速度计 A_E 测定东西方向的加速度 a_E , 这两个加速度计时刻保持在水平位置。如图 1-3 所示, 由于此处只讨论平面位置的测定, 故未把垂向加速度计画出来。将测出的加速度讯号进行一次积分后, 可分别获得载体的速度分量, 即东向速度和北向速度。再对速度进行一次积分, 并顾及初始位置 X_0 、 Y_0 , 以及初速为零的情况, 就得到载体的位置为

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0 + \int V_E dt = X_0 + \iint a_E dt dt \\ Y &= Y_0 + \int V_N dt = Y_0 + \iint a_N dt dt \end{aligned} \right\} \quad (1-2-1)$$

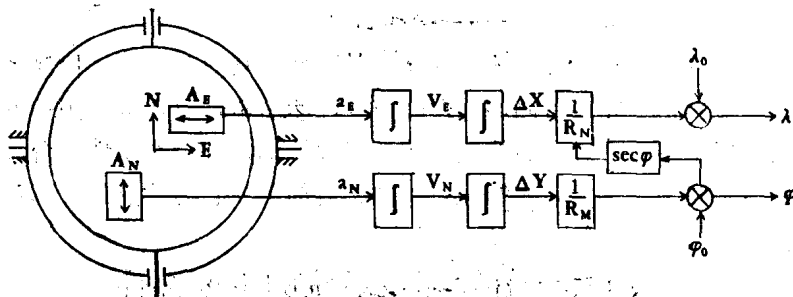


图 1-3 惯性定位系统基本框图

地面上点的位置通常用经、纬度表示, 从图 1-4 中可以看出其转换关系。图中 P 点是载体的初始位置, 其经纬度为 λ_0 、 φ_0 。经短时间 t 后, 从 P 点运行到 P_1 点。 PP_1 在子午圈和卯酉圈上的分量为 PP_2 和 PP_3 , 由图可知:

$$\begin{aligned} PP_2 &= \int V_N dt \\ PP_3 &= \int V_E dt \end{aligned}$$

与此相应的经度、纬度的变化为

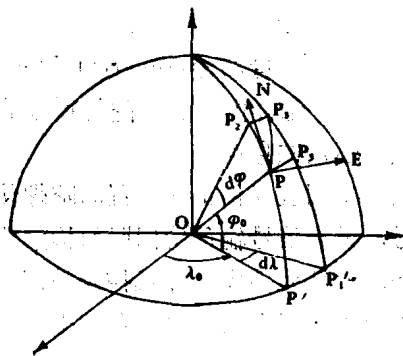


图 1-4

$$d\lambda = \frac{PP_3}{N} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{N} \int V_E \sec \varphi dt,$$

$$d\varphi = \frac{PP_2}{OP} = \frac{1}{M} \int V_N dt。$$

故载体的经纬度为

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{N} \int V_E \sec \varphi dt \\ \varphi &= \varphi_0 + \frac{1}{M} \int V_N dt\end{aligned}\quad (1-2-2)$$

式中M、N分别为P点的子午圆、卯酉圈的曲率半径。

以上所说，只是假定地球没有转动，加速度计的敏感轴完全水平并保持固定方位等理想情况。当考虑地球的转动，以及加速度计敏感轴不水平和方位有变化时，实际工作原理也就复杂得多，有关这些问题将在后面章节中陆续介绍。

从上面讨论可知，如果要将惯测系统用于大地测量，就应该知道加速度计方向与大地参考坐标系之间的关系。由于这种关系的建立方式不同，惯测系统可分为如下两大类：

1. 平台式系统。上面介绍的几种惯测系统都属于这一类。平台式系统又可分为当地水平系统和空间稳定系统。两者的主要区别是：当地水平系统的加速度计方向（构成量测坐标系）对准当地的地理坐标系，而空间稳定系统的量测坐标系对准惯性坐标系（可理解为相对于天球不动，以后我们还要作专门说明）。

2. 捷联式系统。这是近几年才发展起来的系统。从原理上讲，惯测系统不一定需要惯性平台，只需要确切地知道所测加速度的方向，然后由计算机进行坐标变换，就可求得加速度在地理坐标系各轴方向上的分量，故捷联式惯测系统没有惯性平台，陀螺仪和加速度计直接安装在基座上。这类系统的优点是结构最简单，它的缺点是计算复杂。

§ 1-3 惯性测量系统的主要部件

今以 LASS-II 为主，对惯测系统的主要部件作一简单介绍，惯测系统的主要部件包括：

一、惯性测量部件(Inertial Measurement Unit)，简称IMU部件，这是系统的核心。在IMU部件内设有受陀螺控制的惯性平台，该平台本身又用一个四轴万向结构使它不受载体运动的影响。

两个相同且互相正交安置的陀螺使平台稳定，当平台位置发生变化时，则陀螺感应一个信号，并将信号输送给伺服机构，使其产生一扭矩让万向结构定位，从而实现内部元件的稳定，内部元件由计算机控制精密置平。

平台上有三个相同的、互相正交的加速度计来测出加速度，对加速度数据进行积分得到三轴的速度信号。

在IMU部件壳体之外，有一个计算运行时间的计时表和一个 BIT(Built-In-Test)故障指示器。故障指示器是一个在计算机控制下的机械指示器，用来通知作业员在控制与显示部件中某个内部测试元件已失效。

在IMU壳体外面顶部还装有冷却用的风扇，一侧装有波罗棱镜，供用经纬仪时自动反射。

二、计算机 (COMP)。在LASS-II系统中使用 LC-4516 计算机，它的内存容量为 32K 字节，用来执行测量中的所有计算。

计算机能连续算出：所有的测量参数；坐标基准，实时地给出控制平台运动的加矩信号，使平台稳定在指定的坐标系内；实施误差控制；执行检校和测试程序，并启动 LASS-II 的各种功能。

三、控制与显示部件 CDU(Control and Display Unit)。它是人机对话装置，在作业过程中，作业员始终要通过它来实现对系统的操纵。它一方面用来控制和监视系统的工作，另一方面通过它把已知数据输入计算机内，也可将算得的结果与其他一些数据显示出来。

四、数字磁带记录系统 DTS(Digital Tape Recorder System)。它将所有的原始测量数据和状态数据等记录在盒式磁带上。

五、电源 PS(Power Supply)。该电源装置具有稳压、变压、换流和控制作用，它从载体（汽车或直升机）充电系统接受 28V 直流输入，系统在正常工作状态时，其功率为 960W，而在加热状态时要求其功率为 2340W，故此时最好使用辅助蓄电池补充输电。另外，当载体供电突然中断时，系统可自然改由蓄电池供电。

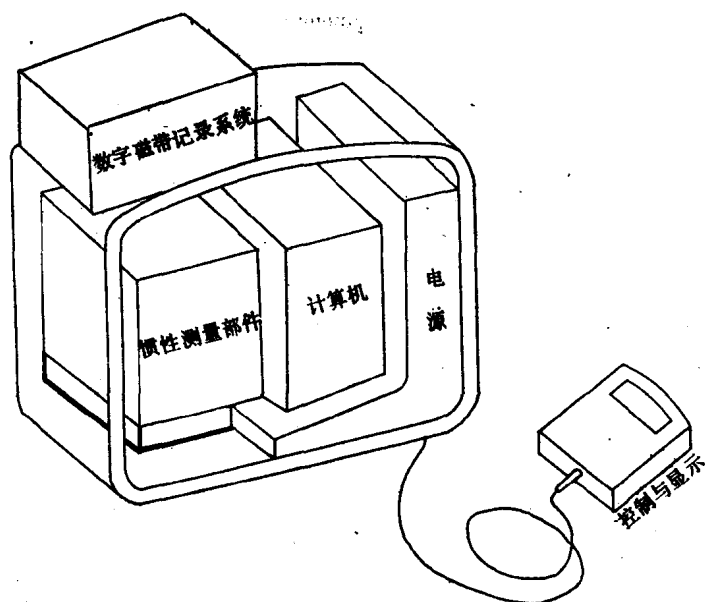


图 1-5 主装配架上部件位置示意图

六、辅助设备。当惯测车不能直接停在标面中心时，就需要使用辅助设备（如经纬仪、光电测距仪等）测定其归心元素。

图 1-5 为主装配架上部件位置示意图，其尺寸为 $0.66\text{m} \times 0.78\text{m} \times 0.50\text{m}$ ，重量约为 95kg 。

图 1-6 为系统装在惯测车上的示意图。

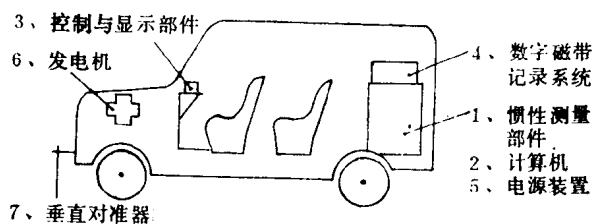


图 1-6 惯测系统装在惯测车上的示意图

第二章 基础知识

由 § 1-2 知, 不管是平台式惯测系统还是捷联式惯测系统, 都需要随时确切地知道所测各加速度的方向。只有知道了加速度方向与大地参考系之间的关系后, 才能计算点的大地坐标。

大地参考系在惯性空间不是静止不变的, 它受着地球自转和载体位置的影响, 也就是说, 大地参考系与惯性空间之间的关系是时间 (由于地球自转) 和位置 (由于地面上各点之东、北, 天方向不平行) 的函数。所以, 对于加速度计输出的积分并不如上面所说的那样简单。

加速度计的输出将会受到科里奥利力, 离心力、地球重力场的变化和垂线偏差等诸因素的影响。例如, 若天向加速度计未精确地对准垂线, 则将会出现重力加速度在东向和北向上的分量。

本章将对上述有关问题所涉及的一些基础知识先进行扼要的介绍。

§ 2-1 位置矢量及其坐标变换

惯性测量的主要任务是确定载体沿地球表面运动时的瞬时位置。因而这里涉及两个问题, 即关于惯性测量中常用坐标系的建立以及关于点位的表示方法和计算。现在先来讨论后一问题, 前者将在第三章中介绍。

一、位置矢量

见图 2-1, 在空间直角坐标系 $O-XYZ$ 中, P 点的位置可由有向线段 OP 来确定, 通常称它为位置矢量, 用符号 $\bar{R}$ 表示。它的长度 (模) 用 R 表示, 方向用其单位矢量 $\bar{u}$ 表示, 于是

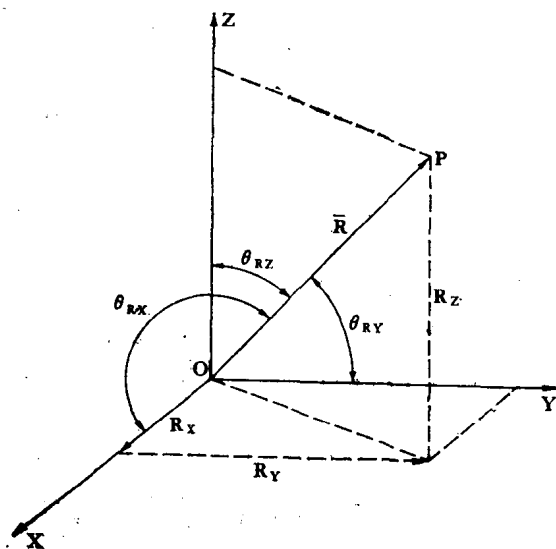


图 2-1

$$\bar{R} = R\bar{u}$$

(2-1-1)

如果沿坐标轴 OX 、 OY 、 OZ 的单位矢量分别以 i 、 j 、 k 表示 (这里为了书写方便, 省去了在 i 、 j 、 k 上面的一划), 则位置矢量的分量形式为

$$\overline{\mathbf{R}} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} \quad (2-1-2)$$

上式等号两边均除以 R , 得

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{R_x}{R} \mathbf{i} + \frac{R_y}{R} \mathbf{j} + \frac{R_z}{R} \mathbf{k} \quad (2-1-3)$$

由图可知, 式中

$$\frac{R_x}{R} = \cos \theta_{RX}, \quad \frac{R_y}{R} = \cos \theta_{RY}, \quad \frac{R_z}{R} = \cos \theta_{RZ} \quad (2-1-4)$$

即

$$\overline{\mathbf{u}} = \cos \theta_{RX} \mathbf{i} + \cos \theta_{RY} \mathbf{j} + \cos \theta_{RZ} \mathbf{k} \quad (2-1-5)$$

此处 $\cos \theta_{RX}$ 、 $\cos \theta_{RY}$ 、 $\cos \theta_{RZ}$ 为 $\overline{\mathbf{R}}$ 与三个坐标轴夹角的余弦, 称作方向余弦。显然, 它们之间存在下列关系式:

$$\cos^2 \theta_{RX} + \cos^2 \theta_{RY} + \cos^2 \theta_{RZ} = 1 \quad (2-1-6)$$

所以在这三个方向余弦中只有二个是独立的。

应当指出: 若将位置矢量的分量形式写成矩阵形式为

$$\overline{\mathbf{R}} = [\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}] \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}$$

但由于各个分量本身都带有下标, 已可表明它们是属于哪个坐标系和哪个坐标轴的, 所以, 上标常被省略。特别是当以矩阵形式写出矢量方程时, 式中的 $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 不再出现, 可直接以 $[R_x R_y R_z]^T$ 来代替 $\overline{\mathbf{R}}$ 。也就是说, 在此情况下

$$\overline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}$$

下面是有关矢量运算的一些定义和以它的分量形式进行运算的表达式。

设有两个矢量

$$\overline{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\overline{\mathbf{b}} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$$

则

1. 代数和

$$\overline{\mathbf{a}} \pm \overline{\mathbf{b}} = (a_x \pm b_x) \mathbf{i} + (a_y \pm b_y) \mathbf{j} + (a_z \pm b_z) \mathbf{k} \quad (2-1-7)$$

相应的列矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{bmatrix} \quad (2-1-8)$$

2. 点积 (标量积)