高等学校试用教材

数学分析

上册

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

上册

华东师范大学数学系 编

人民教育出版社

高等学校试用教材
数 学 分 析
上 册
华东师范大学数学系 编
*
人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
青浦任屯印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 11 8/16 字数 277,000
1980 年 9 月第 1 版 1982 年 4 月第 3 次印刷
印数 32,001—50,000

书号 13012·0524 定价 1.05 元

编 者 的 话

本书是根据1977年高等学校理科数学教材大纲讨论会所制定的《数学分析》大纲编写的．全书分上、下两册，可作为高等师范院校数学系教学用书，以及其他高等院校有关专业的教学参考书．

关于本书的使用兹作以下一些说明：在极限问题的处理上，虽一开始就采用 ε-δ 定义，但若干较难的理论证明则放到微分学之后．实数理论作为附录放在上册的末尾．有关集合的基本概念，目前尚未在中学里全面普及，仍在附录Ⅰ中作了简要的介绍．本书有部分内容用小号字排印，在实际教学中可视情况选用．书中各节都附有适量的习题，并把它们分为基本题与选作题两类，中间用一道横线分开，横线之后的习题和各章的总练习题，读者可在教师指导下挑选一部分进行练习．书末并附有计算题的答案．

本书由程其襄教授主编，编写组写出初稿后，经程其襄、周彭年、郑英元修改定稿（郑英元执笔整理）．先后参加本书编写工作的有：陈昌平、陈美廉、徐钧涛、曹伟杰、杨庆中、黄丽萍、张奠宙、宋国栋等同志．此外，林克伦、华煜铣、顾鹤荣等同志也参加过一些工作．

北京师范大学、武汉大学担任本书主审，先后参加审稿的单位有：上海师范学院、安徽师范大学、吉林师范大学、曲阜师范学院、西藏师范学院、陕西师范大学、贵阳师范学院、徐州师范学院、新乡师范学院以及四川师范学院、华中师范学院、华南师范学院、江西师范学院、昆明师范学院、南京师范学院等．甘肃师范大学的同志也对本书上册提出过仔细的修改意见．在审查过程中，大家对原稿提出了许多宝贵的意见和建议，我们曾根据这些意见作过许多

重大的修改，特此表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，恳切希望读者对本书的缺点错误给予批评指正。

编　　者

1979.11

又及，本书最后定稿时，曾照一九八〇年五月在上海举行的高等学校理科数学教材编审委员会审订的《数学分析》大纲作了修订。

编　　者

1980.9

目　录

第一章　函　数

第二章　数列极限

第三章　函数极限

第四章　函数的连续性

第五章　导数与微分

第六章　中值定理与导数应用

第七章　极限与连续性(续)

第八章　不定积分

第九章　定积分

第十章　定积分的应用

第一章　函　　数

§1　函数概念

一　实数概述

“函数”是数学分析(甚至是整个高等数学)中最基本的研究对象，数学分析可以说就是研究函数的.

本课程是在实数范围内研究函数. 实数由有理数与无理数两大类组成，它有如下一些主要特性.

1. 每一个有理数都可用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数，$q\neq 0$) 表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示. 由于有限十进小数可写成以 0 或以 9 为循环节的无限十进循环小数，因此可以说任一有理数都能表示为无限十进循环小数.

我们把每一个无限十进不循环小数称为**无理数**. 于是任一实数都可用无限十进小数形式来表示，且每一个实数都可用一列不大于它的不足近似值，与一列大于它的过剩近似值所确定. 如有理数2.3，它介于不足近似值列

$$2,\ 2.3,\ 2.3,\ 2.3,\ 2.3,\cdots$$

与过剩近似值列

$$3,\ 2.4,\ 2.31,\ 2.301,\ 2.3001,\ \cdots$$

对应项之间. 无理数 $\sqrt{2}$，它介于不足近似值列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ \cdots$$

与过剩近似值列

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ 1.4143,\ \cdots$$

对应项之间.

2. 实数是有序的，即任意两个实数 a、b，必满足下述三个关系式之一：

$$a<b, \quad a=b, \quad a>b$$

3. 实数对加、减、乘、除(除数不为0)四则运算是封闭的，即对任意两个实数施行加、减、乘、除(除数不为0)运算后仍得实数.

4. 实数全体具有稠密性，即任意两个不相等的实数之间有有理数，也有无理数①.

5. 如果在一直线上(通常画水平直线)确定一点为原点，标以 O，指定一个方向为正向(通常把指向右方规定为正向)，并规定一个单位长度，则称这样的直线为**数轴**. 任一实数都对应数轴上唯一的一点，反之，数轴上每一点也都唯一地代表一个实数. 正由于全体实数与数轴上的点有着一一对应关系，所以今后在叙述中，将把"实数 a"与"数轴上的点 a"两种说法看作有相同的含义，而不加以区别.

关于实数的定义与性质的详细论述请见附录II.

实数 a 的**绝对值**定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

如前所述，任一实数 a，在数轴上恰有一点 a 与之相对应. 那么数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.

关于绝对值有如下一些性质：

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$；当且仅当 $a=0$ 时，才有 $|a|=0$.

2. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

3. 关系式 $|a|<h$ 等价于不等式 $-h<a<h$；同样 $|a|\leqslant h$ 等价于 $-h\leqslant a\leqslant h$.

---

① 任意两个不相等的实数之间有有理数，称为有理数集在实数集中的稠密性. 任意两个不相等实数之间有无理数，称为无理数集在实数集中的稠密性.

4. 对于任何实数 a 和 b 有不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

它称为**三角形不等式**.

5. $|ab|=|a||b|$

6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$

下面我们证明性质 4, 其他请读者自己证明.

由性质 2 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant|b|$$

相加后得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|)$$

它等价于

$$|a+b|\leqslant|a|+|b| \tag{1}$$

将上述 b 改为 $-b$ 后, (1)式仍然成立. 这就证明了性质 4 的右半部分. 又由 $|a|=|a-b+b|$, 根据(1)式有

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

于是

$$|a|-|b|\leqslant|a-b| \tag{2}$$

当(2)中 b 改为 $-b$ 时, (2)式仍然成立, 这就完全证明了性质 4.

满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数称为**点 a 的 δ 邻域**, 记作

$$U(a,\ \delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}\text{①}$$

或简单地写作 $U(a)$.

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数称为**点 a 的空心 δ 邻域**. 记作

$$U^{\circ}(a,\ \delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

或简单地写作 $U^{\circ}(a)$.

注意: 点 a 的空心邻域与点 a 的邻域差别在于点 a 的空心邻域不包含点 a.

---

① 有关集合概念与记号请参阅附录 I.

二 函数

先考察几个例子.

例 1 自由落体的路程 s 与时间 t 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

联系着, t 的值确定了, s 的值就随之确定. 设落体着地的时刻为 T, 则当 t 取 0 到 T 之间任何值时, 由(3)就计算得 s 为 0 到 $\frac{1}{2}gT^2$ 之间的某一值.

例 2 按邮章规定, 国内外埠平信, 每重 20 克或不足者付邮资 8 分, 以下累计, 不得超过 2 公斤. 则此邮章规定了由信重 W 的值确定邮资 M 的值的规则, 其中 $0<W\leqslant 2000$. 邮资 M 与信重 W 的关系表达为:

$M=0.08$(元)　当 $0<W\leqslant 20$

$M=0.16$(元)　当 $20<W\leqslant 40$

……………………………………

$M=8.00$(元)　当 $1980<W\leqslant 2000$

例 3 在气象观测站的百叶箱内气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上, 如图 1-1 所示的曲线. 根据这个图, 我们就能知道这一天内时间 t 从 0 点到 24 点气温 T 的变化情形.

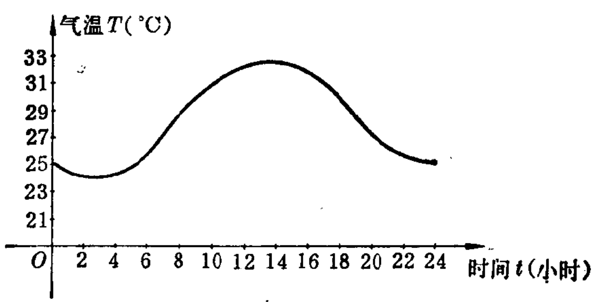

图 1-1

例 4 在货船的船头下部常看到表示货轮吃水深度的吃水线. 货轮吃水越深, 说明排水量越大, 相应地货轮装的货物也越多.

某货轮吃水深度与排水量间的对应关系如下表所示:

吃水深度(米)	3	4	5	6	7	8	9
排 水 量(淡水: 吨)	5020	7225	9275	11475	13750	16125	18525

上面几个例子都反映了在同一过程中有着两个互有联系的起着变化的量(这些在过程中起着变化的量, 称为**变量**, 对于在过程中保持不变的量,则称为**常量**),当第一个量在某数集内取值时,按一定的规则,第二个量在另一数集内有唯一的一个值与之对应.函数概念正是从这样一些事实中抽象出来的.

定义 给定二个实数集 D、M, 若按照某一确定的对应法则 f, D 内每一个数 x 有唯一的一个数 $y\in M$ 与它相对应, 则称 f 是确定在数集 D 上的**函数**. 记作

$$f: D\to M$$

其中集 D 称为函数的**定义域**, D 中的任一数 x 根据法则 f 所对应的 y, 记作 $f(x)$, 称为 f 在 x 的**函数值**. 全体函数值集合

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}\subset M$$

称为函数 f 的**值域**. 如果把 x 作为在 D 中取所有值的变量, y 作为在 M 中取值的变量, 则称 x 为函数 f 的**自变量**, y 为函数 f 的**因变量**.

如上述例 1 中, 关系式(3) 确定了一个定义在区间 $[0, T]$ ① 上以 t 为自变量的函数. 例 3 则由图 1-1 确定时间 t 与气温 T 的对应法则, 这个函数的定义域为 $[0, 24]$, 例 4 由表 1-1 确定一个定

① 有关区间等概念, 请参阅附录 I.

义在数集 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 上的函数.

由上述定义可知，决定一个函数必须知道定义域 D、对应法则 f 和函数值所在的集合 M. 函数值是由 $x\in D$ 通过 f 而唯一确定的实数，通常总是把 M 取为全体实数 $(-\infty, \infty)$. 于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素. 从而记号

$$y=f(x),\quad x\in D$$

也就表达了一个实值函数. 如果一个函数的对应法则可以用数学式子来表达，而其定义域就是使这一"式子"有意义的自变量所取的值的全体，这时定义域（此时定义域也称为**存在域**）D 也可省略不写. 如由式子 $y=\sqrt{\lg x}$ 所表示的函数，其定义域是指 $D=\{x|x\geqslant 1\}$. 这样一来，表示一个函数最主要就是对应法则 f. 今后为了叙述方便，在不致引起混淆的情况下，就不提 D 和 M 了，简单地说"函数 $y=f(x)$"或"函数 $f(x)$". 有时在习惯上，我们也说"y 是 x 的函数". 其含义应是指变量 x 和变量 y 之间存在着一种确定的对应关系，而不能理解为"y 是函数"，因为离开 x 和 f 孤立地讲函数 y 是没有意义的.

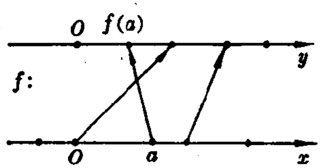

图 1-2

由上述定义还可看到，函数 f 给出了 x 轴上的点集 D 到 y 轴上点集 M 之间的**单值对应**，也称为**映射**. 我们称 $f(a)\in M$ 为映射 f 下 $a\in D$ 的**象**. a 则称为 $f(a)$ 的**原象**. 为了便于理解，映射 f 可用箭头图表示：用两根平行的数轴分别表示 x 轴与 y 轴，x 轴上点集 D 的每一个点 a（原象）与 y 轴上点集 M 中的对应点 $f(a)$（a 的象）用由 a 指向 $f(a)$ 的带箭头的线段相联接（如图 1-2）.

举几个具体的函数为例，如反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$, $x\in(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$，二次函数 $y=x^2$, $x\in(-\infty, \infty)$ 和常量函数 $y=2$，其箭头图如图 1-3 中所示.

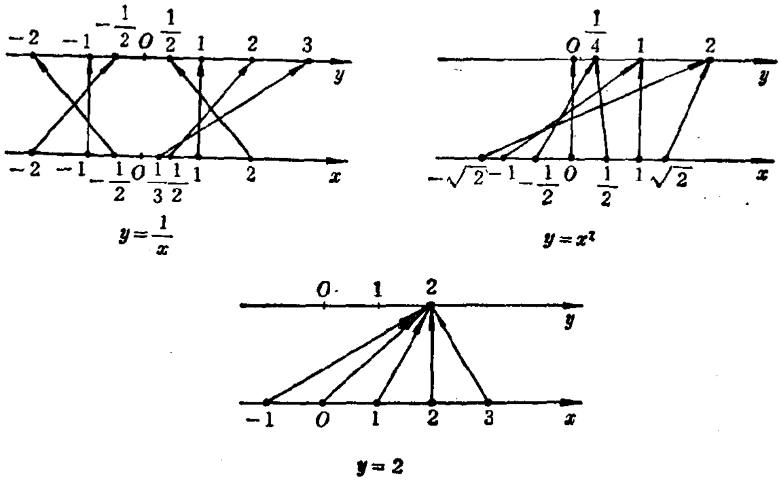

图 1-3

关于函数概念,还有以下几点值得注意.

1. 在数学分析中,两个函数相同,是指它们的定义域和对应法则分别相同①(函数值一律取实数,不必再特别指出). 有相同的对应法则,但定义域不同,还不能说两个函数相同. 例如 $f(x)\equiv 1,\ x\in(-\infty,\ \infty)$ 和 $h(x)=\frac{x}{x},\ x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$ 是不相同的函数. 两个相同的函数,其对应法则的表达形式可能不同. 例如 $f(x)\equiv 1,\ x\in(-\infty,\ \infty)$ 和 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,\ x\in(-\infty,\ \infty)$,表面形式上不同,实际上是相同的.

2. 在我们的函数定义中,对每一个 x,只能有唯一的一个 y 与它对应,这种函数称为**单值函数**. 如果在函数定义中,允许同一个 x 值可以和不止一个 y 值相对应,则称它为多值函数. 但在本书范围内,我们只讨论单值函数.

3. 现代数学中的函数定义,不要求 D 和 M 都是数集,即定

① 所谓两个函数的对应法则相同,是指在相同定义域中,每个 x 所对应的函数值总相同.

义域和取值范围可以是任意的集合. 比如 D 是一切三角形集合, M 是一切圆集合. 任给三角形, 总有唯一的外接圆与之对应. 这样在三角形集合和圆集合之间就建立了函数关系. 也可记为 $f: D \to M$. 再如 D 是一元二次方程的全体, f 使方程和它的根相对应, 则 f 也是一个函数, 其函数值是集合, 其元素是一对数(两个不同的根), 一个数(等根), 或空集(无实根). 因此, 在广泛的函数定义中, "函数"是任意两个集合之间的对应关系, 不一定和"数"发生联系. 但在本书范围内, 研究 D 和 M 都是数集的情形也就够用了.

三 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种:

1. 解析法 当函数的对应法则借助于数学式子给出时, 称这种表示函数的方法为解析法. 如上述例 1 以及

1) $y=x^2-2x+3 \ (x>1)$; 2) $y=\dfrac{1}{1+x^2} \ (|x|<1)$;

3) $y=\sin x+\cos x \ (-\infty, \infty)$;

4) $y=\ln x+x \ (x>0)$

都是解析法表示的函数, 它将是我们今后表达函数的主要形式.

注意: 一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示, 如:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in(0, \infty) \\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \\ -x+1, & x\in(-\infty, 0) \end{cases} \tag{4}$$

这种形式的函数, 称为**分段函数**, 其对应法则就是: 若自变量 x 的值在 $(0, \infty)$ 内取值, 则其函数值为 $f(x)=x^2$, 若 $x=0$, 则有 $f(0)=\dfrac{1}{2}$, 若 x 在 $(-\infty, 0)$ 内取值, 则其函数值为 $f(x)=-x+1$.

又如例 2 中邮资 M 与信重 W 的函数, 用分段函数形式表达时则是