投影与方程

严仕俊 编著

PROJECTION AND EQUATION

成都科技大学出版社

投影与方程

严仕俊　编著

成都科技大学出版社

一九九〇年

内 容 简 介

本书用解析几何、数学分析和线性代数的方法研讨画法几何中基本元素、截交线、相贯线的投影表达及度量问题，有助于阐明画法几何的基本意义，为计算机绘图打下基础，而且能为机械设计和机械制造开辟新的思路。

本书适于中等技术专科学校、高等工科院校的工程专业学生、研究生作教学参考书和补充教材，可供工程图学的教师和工程技术人员参考，也利于有一定数学基础和画法几何知识的读者自学。

投 影 与 方 程

严仕俊 编著

成都科技大学出版社出版、发行

四川省新华书店经销

成都市书林印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张：6.875

1990年3月第1版　1990年7月第1次印刷

印数：1—1520　字数：149（千字）

ISBN7-5616-0395-9/O·36

定价：1.50元

前　言

画法几何用投影的方法研究点、线、面、体等几何元素的表达及其度量问题，具有简便、直观的特点；解析几何用数学模型研究点、线、面、体等几何元素的表达及其度量问题，具有概括力强、准确可靠的特点。怎样把画法几何和解析几何的特点有机结合起来，是随着科学技术和计算机图学的飞速发展给工程图学教育和工程图学工作者提出的新课题。

天津大学徐文洪教授以深邃的数学基础在70年代开辟了这一新的领域，并于1980年暑期在天津大学首次开办了形数结合的画法几何讲习班。《投影与方程》就是在此基础上写成初稿，并在四川省工程图学学会组织的四川省工程图学教师培训班，以及成都科技大学工程图学研究生中多次使用后修订而成的。

本书的特点是用解析几何、数学分析和线性代数的基本方法对点、线、面、体、截交线、相贯线的投影及相对位置的度量等问题作了准确的描述和定量分析，对画法几何中许多模糊的截交线、相贯线进行了探讨。它不仅能帮助学习画法几何者更深刻地理解投影、截交线、相贯线的意义，为计算机绘图奠定建立数学模型的基础，而且能进一步为机构设

计、机械夹具设计、工艺设计开辟新的思路。

本书的编写是在四川省工程图学学会、成都科技大学李沛然教授、龚石钰副教授、吕荣寰副教授、王治泉副教授及工程画教研室全体老师的帮助和支持下完成的，借此机会谨致诚挚的谢意。

编　者

1989年5月

目　录

第一章　点的坐标与投影

任何复杂的立体都是由点、线、面等基本几何元素组成的。要研究立体，都必须具备这些基本几何元素的基本知识。

通常，研究这些基本几何元素有两种不同的方法：一种是用在坐标中建立方程的形式来表示；另一种就是"投影"，特别是工程上广泛采用的多面正投影法。

§1-1　直角坐标系和点的坐标

对于不同的研究对象要设立不同的坐标系，就是同一研究对象，对不同的研究侧面也可以设立不同的坐标系。所谓坐标系就是参照系。它是由平面或空间上的定点O，过定点引出有方向的轴和与之对应的单位测尺所组成。就平面而言，当一定点确定后，过定点所引的有方向的轴的朝向，轴间的夹角，以及与之对应的单位测尺都可以是任意的。比如说，若选定点为O，过O点引有向轴Ox、Oy，以及与之对应的测尺OI、OJ。Ox与Oy的夹角可以是任意的，OI和OJ的长度亦可是任意的。当所选的坐标系中，$Ox \perp Oy$，$OI = OJ$时，这说明此坐标系为任意中的特例——即通常所用的笛卡尔平面直角坐标系。在空间则由定点O引出的三条互相垂直的轴和与之对应的单位测尺OI、OJ、OK构成空间直角坐标系。

一、空间直角坐标系

空间三个互相垂直的平面将空间分成八个卦角。为了与工程图学中的投影体系一致，这里以第一卦角为主。如图1-1示。在图中三个平面彼此相交，其交线分别叫做x轴、y轴和z轴。三条轴互相垂直交于一点O，O点称为坐标原点。从原点O开始在三条轴上取相同的单位测尺。这样就建立了空间直角坐标系，记为$O-xyz$。

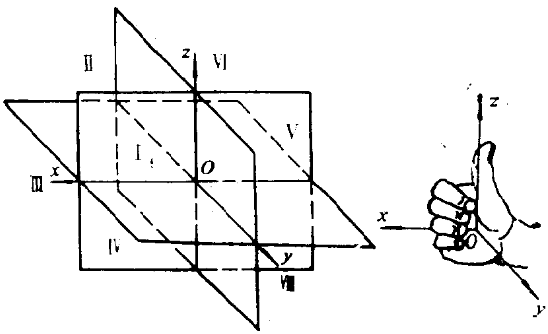

图1-1

在坐标系中，如果用右手握住z轴，使其握拳的四指方向是由x轴的正向到y轴的正向，而大指拇所指的正好是z轴的正向时，称这种坐标系为**右手坐标系**。这是现代数学和其它学科里常用的。

二、点的坐标

在空间直角坐标系内任一点的位置可以用有顺序的数组x，y，z来确定，只要有一实数的有序数组，空间便有唯一的点与之对应，即有序数组与空间点成一一对应。

当空间任一点A（x，y，z）为一给定点时，则记为A（x_A，y_A，z_A）。

在空间任意取两点的坐标，则两点间的距离是确定的。如图1-2，点A到点B的距离AB，即以它们的坐标差为棱边的长方体的对角线的长。从图中可以看出：

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2}.$$

例如：已知$A(45, 30, 25)$，$B(10, 15, 15)$，那么

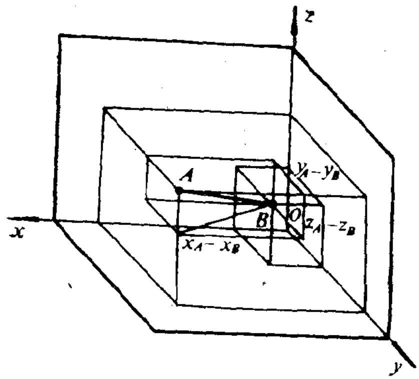

图1-2

$$AB=\sqrt{(45-10)^2+(30-15)^2+(25-15)^2}$$
$$=40.$$

§1-2 点的投影和坐标的关系

把坐标面当作投影面，坐标轴当投影轴，便得到空间投影体系。在投影体系中，原坐标面Oxy叫做**水平投影面**，用H示之；Oxz面叫做**正立投影面**，用V示之；Oyz面叫**侧立投影面**，用W示之。同时规定：空间的点用大写字母A，B，C，…或罗马字Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ…表示；点在投影面上的投影，用

相应的小写字母$a,b,c\cdots$或者阿拉伯数字1，2，3…表示。过空间点A向H面作垂线，垂足a为点A的水平投影。水平投影a反应空间点A的两个坐标x和y，z坐标为零，记为$a(x,y,0)$或$a(x,y)$。同理，过空间点A分别向V、W面作垂线，其垂足便是点A的正面投影a'和侧面投影a''。a'反映A点的x，z坐标，y为零，记为$a'(x,z)$；a''反映A点的y，z坐标，x为零，记为$a''(y,z)$。由A点向投影面所作的垂线，它们互相垂直。当V，H，W三个投影面旋转为一个面时，投影a，a'，a''的连线aa'，$a'a''$，aa''叫投影连线，且有$aa'\perp Ox$；$a'a''\perp Oz$；$aa''\perp Oy$轴。aa'与Ox轴交于点a_x，a_x的坐标为$(x_A,0,0)$；$a'a''$交Oz轴于点a_z，a_z的坐标为$(0,0,z_A)$；aa''交Oy轴于a_y，a_y的坐标为$(0,y_A,0)$。如图1-3所示。

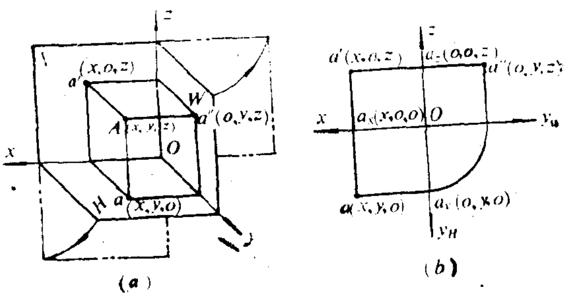

图1-3

第二章　平面和直线

§2-1　平面的方程

一、一般位置平面

图2-1表示空间的平面P，由原点O向P作垂线，N为垂足，$\dot{O}N=d$，则ON即为平面P的法线。OP与投影轴Ox、Oy、Oz的夹角分别为α、β、γ，那么由d和α、β、γ就完全确定平面P的空间位置。α、β、γ叫作法线ON的方向角。

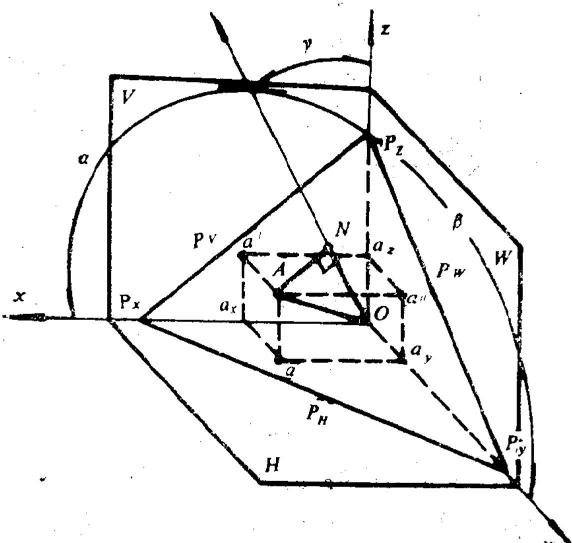

图2-1

由图2-2中可以看到

$$(ON)^2=(On)^2+(nN)^2=(On)^2+(On_z)^2$$
$$=(On_x)^2+(On_y)^2+(On_z)^2=(ON\cdot\cos\alpha)^2$$
$$+(ON\cdot\cos\beta)^2+(ON\cdot\cos\gamma)^2$$
$$=(ON)^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma),$$

所以 $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (2\text{-}1)$$

$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$叫做ON的方向余弦。这就是说，若ON为一矢量，那么任一矢量方向余弦的平方和都等于1。

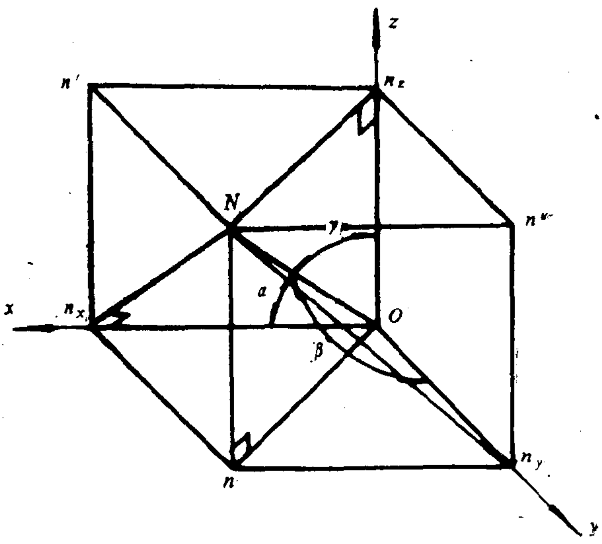

图2-2

在图2-1中，若A（x，y，z）为平面P内的任一点，连接OA即得一矢量，该矢量在ON上的分量为d。于是可以对平面下另一定义：动矢$\overrightarrow{OA}$在定直线ON上的分量为一定

值d时，动点A的轨迹。

根据**矢量投影定理**，“有限个矢量的和在任一轴上的投影等于各分矢量在同一轴上的投影之和”可得：OA在ON上的投影等于OA在各轴上的分量（Oa_x，Oa_y，Oa_z）在ON上的投影之和，所以

$$Oa_x\cos\alpha+Oa_y\cos\beta+Oa_z\cos\gamma=ON.$$

因为 $Oa_x=x$，$Oa_y=y$，$Oa_z=z$，

所以上面等式又可写为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=d, \tag{2-2}$$

（2-2）式即为平面的法线方程式，为方便计，常令

$$l=\cos\alpha,\ m=\cos\beta,\ n=\cos\gamma.$$

所以上式又可改写为

$$lx+my+nz=d. \tag{2-2$_a$}$$

以任意实数k乘等式两边即得

$$Ax+By+Cz=D, \tag{2-2$_b$}$$

式中：$A=kl$；$B=km$；$C=kn$；$D=kd$。

（2-2$_b$）式即为平面的一般表达式。

有时需要从一般表达式中计算平面的方向余弦和d值，为此，应先计算出k值。

因为 $A=kl$，$B=km$，$C=kn$，$D=kd$，

所以 $A^2+B^2+C^2=k^2(l^2+m^2+n^2)=k^2$，

故 $k=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$，

于是

$$\left.\begin{aligned} l=\cos\alpha&=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \\ m=\cos\beta&=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

$$n=\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad (2\text{-}3)$$

$$d=\frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

因为d恒为正，故k与D必须同号。

在画法几何中已知，一般位置平面P在投影体系中与H面的交线叫做**水平迹线**，用P_H示之；与V面的交线叫**正面迹线**，用P_V示之；与W面的交线叫**侧面迹线**，用P_W示之。平面P与投影轴的交点叫**集合点**。根据三面共点原理，P与投影轴的交点必是相邻二迹线同时与投影轴相交的点。x轴上的集合点用P_x示之，y轴上的集合点用P_y示之，z轴上的用P_z示之。

若一般位置平面P的方程表达式为

$$Ax+By+Cz=D,$$

在投影体系中，P和H面相交的水平迹线P_H的方程可由

$$\left.\begin{aligned} P\text{面：}\ & Ax+By+Cz=D, \\ H\text{面：}\ & z=0。 \end{aligned}\right\}$$

联立解得：$\qquad Ax+By=D$。

同理可得迹线P_V的方程：$\qquad Ax+Cz=D$；

P_W的方程：$\qquad By+Cz=D$。 $\qquad$ (2-4)

集合点P_x是平面P和投影面H、V三面的交点，它的坐标由

$$\left.\begin{aligned} P\text{面：}\ & Ax+By+Cz=D, \\ H\text{面：}\ & z=0, \\ V\text{面：}\ & y=0, \end{aligned}\right\}$$

联立而得。

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{解此方程组得}P_x\text{的坐标为：}(D/A,0,0)\text{。}\\
\text{同理可得集合点}P_y\text{的坐标为：}(0,D/B,0)\text{；}\\
\qquad\qquad P_z\text{的坐标为：}(0,0,D/C)\text{。}
\end{array}\right\}\qquad(2\text{-}5)
$$

二、特殊位置平面

在投影体系中，凡垂直或平行于投影面的平面统称为**特殊位置平面**。其中垂直于某一投影面的平面称为**投影面垂直面**，把平行于某一投影面的平面称为**投影面平行面**。

对于特殊位置平面，它们的方程可以进一步简化。例如对于铅垂面：

$\gamma=90°$，则$\cos90°=0$，即$kn=C=0$。所以方程

$$Ax+By+Cz=D$$

变为

$$Ax+By=D\text{。}\qquad(2\text{-}6_1)$$

该平面的水平迹线与相应投影轴的夹角分别为α、β，且

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha=\arccos\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\text{，}\\
\beta=\arccos\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\text{。}
\end{array}\right\}\qquad(2\text{-}6_2)
$$

同理：垂直于V面的正垂面$\beta=90°$，$\cos\beta=0$，所以它的方程为

$$Ax+Cz=D\text{。}\qquad(2\text{-}7_1)$$

该平面的正面迹线与相应投影轴的夹角分别为α、γ，且

$$
\left.\begin{array}{l}
\alpha=\arccos\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+C^2}}\text{，}\\
\gamma=\arccos\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+C^2}}\text{。}
\end{array}\right\}\qquad(2\text{-}7_2)
$$

垂直于W面的侧垂面$\alpha=90°$，$\cos\alpha=0$，所以它的方程

为

$$By+Cz=D. \tag{2-8$_1$}$$

该平面的侧面迹线与相应的投影轴的夹角分别为β、γ，且

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\arccos\frac{B}{\pm\sqrt{B^2+C^2}},\\ \gamma&=\arccos\frac{C}{\pm\sqrt{B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{2-8$_2$}$$

当平面平行于投影面时，其方程又以平面所平行的投影面不同而各异．例如对于水平面

$$\alpha=\beta=90^\circ,\ \gamma=0^\circ,$$

所以 $\cos\alpha=\cos\beta=0,\ \cos\gamma=1,$

故水平面的方程式为

$$\left.\begin{aligned}&&Cz&=D,\\ \text{同理：}&\text{正平面：}&By&=D,\\ &\text{侧平面：}&Ax&=D.\end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

§2-2 直线的方程

一、一般位置直线和它的投影

在空间解析几何中，直线的方程是用两个平面相交的形式给出的．因为在那里任意一个一元、二元或三元一次方程都代表一个平面．所以

$$\left.\begin{aligned}\text{I}:&\ A_1x+B_1y+C_1z=D_1,\\ \text{II}:&\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2.\end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

表示一直线，即Ⅰ、Ⅱ两平面的交线AB．如图2-3示．