高等學校教學用書

# 變分學教程

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ, Л. А. ЛЮСТЕРНИК 著
曾鼎龢　鄧漢英　王梓坤譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

# 變分學教程

M. A. 拉弗林契葉夫，Л. A. 留斯切爾涅克著
曾鼎鉌　鄒漢英　王梓坤譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國家技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的拉弗林契葉夫（М. А. Лаврентьев）及留斯切爾涅克（Л. А. Люстерник）所著“變分學教程”（Курс вариационного исчисления）1950年第二版修訂版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲國立大學教本

本書係南開大學曾鼎鉌、鄧漢英、王梓坤合譯。


# 變　分　學　教　程

書號271（譯249）

拉弗林契葉夫　留斯切爾涅克著

曾　鼎　鉌　等　譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

新華書店總經售

商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號

開本850×1168 1/32　印張 7 10/16　字數 194,000
一九五五年三月上海第一版　印數 1—4,500
一九五五年三月上海第一次印刷　定價一元一角五分

# 原　　序

在本書的這一版——第二版——中，對於可變端點問題的敍述，作了重大的修改，並對斯圖姆-里歐威爾方程的變分理論作了新的解釋。爲了適應變分法課程教學大綱的要求，新增了一章來敍述極小和極大問題，其中包含了捷比歇夫(П. Л. Чебышев)的某些結果。

此外，在第九章新添了一節，來說明線性變分問題與積分方程間的關係。

我們謹向 А. И. Плеснер 教授致謝，他所提供的寶貴意見，在我們最後校閱底稿時，已經考慮在內。

莫斯科　　　　　　　　　　　　　　　　　　著者

1950 年 5 月

# 譯者序

本書由曾鼎龢，王梓坤二同志分譯互校，由鄧漢英同志協助修改，其中第三、四、七各章，並經楊宗盤同志校閱，第一、二、八各章，分別經劉晉年、楊從仁、崔士英諸同志校閱。

限於譯者的俄文修養與數學業務水平，此次翻譯本書，尚在邊譯邊學階段，錯誤與缺點難免很多，敬請讀者隨時指正。

譯者

1954，2，28 於南開大學

# 目　次

# 第一章　極値問題初等解法

## §1.　一般概念

**汎函**　函數是古典分析學中的基本研究對象。

在變分法中，我們須研究這樣的關係，其中因變數的值是由函數所確定的。現在來舉這種關係的一個最簡單的例子。

研究聯接已給兩點 $A$、$B$ 的任意曲線的長度。因變數的值——曲線長度——是由聯接 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$ 兩點的曲線的形狀來確定的；也可以說，是由表示曲線的函數所確定。這裏所考慮的關係不難用嚴密的形式來表達。

今設聯接 $A$、$B$ 兩點的曲線的方程爲：

$$y=y(x),$$

並設橫坐標 $x$ 在區間 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上變動，而函數 $y(x)$ 在這區間內有連續的微商 $y'(x)$。於是，曲線的長度 $J$ 等於

$$J=\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx。 \tag{1}$$

當函數 $y(x)$ 改變時，代表這函數的曲線以及 $J$ 的值——即曲線 $y=y(x)$ 的長度，也將改變。所以，$J$ 是依賴於函數 $y(x)$ 的；不同的函數 $y(x)$ 對應不同的 $J$ 值。一般說來，如果 $J$ 的值隨着某一類函數中的函數 $y(x)$ 而確定，我們就可以寫成

$$J=J[y(x)]$$

並引進下面的定義：

**定義** 設 $y(x)$為已給的某類函數。如果對於這類函數 $y(x)$ 中的每一個函數，有某數 $J[y(x)]$ 與之對應，那末我們說 $J[y(x)]$ 是這類函數 $y(x)$ 的汎函。

一個在其上定義泛函的函數類稱爲該汎函的定義域。

由於一元函數在幾何上是由曲線所表示，因此它的汎函也可稱爲曲線函數。

回到汎函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$，命 $x_0=0$，$x_1=1$；於是對於 $y(x)=x$、$y'(x)=1$，我們求出

$$J[y(x)]=J[x]=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}。$$

若又有 $y(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$（懸鏈線），則

$$J\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]=\int_0^1\sqrt{1+\frac{(e^x+e^{-x})'^2}{4}}\,dx=$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{4}}\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big|_0^1=\frac{e-e^{-1}}{2}。$$

作爲第二個例子(更簡單的)，我們考慮所有定義在區間 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上的連續函數 $y(x)$的全體，並設

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}y(x)\,dx。\qquad (2)$$

於是 $J[y(x)]$ 是 $y(x)$的汎函；每一個函數 $y(x)$對應於一個確定的值 $J[y(x)]$。這個汎函，在 $y>0$ 時，從幾何來看就是介於曲線 $y=y(x)$，軸 $Ox$，及縱線 $x=x_0$、$x=x_1$ 之間的面積。

以具體的函數代替等式(2)中的 $y(x)$，我們將得到 $J[y(x)]$ 的對應值。與前面一樣，取 $x_0=0$，$x_1=1$，則

$$J[y(x)]=\int_0^1 y(x)\,dx。$$

現在若 $y(x)=x$，則 $J[y(x)]=J[x]=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$；

若 $y(x)=x^2$，則 $J[y(x)]=J[x^2]=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$；

若 $y(x)=\frac{1}{x+1}$，則 $J\left[\frac{1}{x+1}\right]=\int_0^1\frac{dx}{x+1}=$

$$=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2;$$

若 $y(x)=\frac{1}{1+x^2}$，則 $J\left[\frac{1}{1+x^2}\right]=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=$

$$=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

自然還可以舉出很多其他汎函的例子來。

讀者注意，汎函(1)是定義在有連續微商的函數類上，而汎函(2)則定義在較廣泛的連續函數類上。

**汎函的極值**　還在無窮小分析學產生的最初時期，與 $n$ 元函數的極值問題同時，就出現了一系列的在幾何、力學及物理上的尋求汎函極值的問題。下面的問題，可以作爲最簡單的例子：在所有聯接 $A(x_0, y_0)$、$B(x_1, y_1)$ 兩定點的平面曲線中，試求長度最小的曲線。

從分析上看，這個問題就是說：在所有適合 $y_0=y(x_0)$ $y_1=$ $=y(x_1)$ 的函數 $y=y(x)$ 之中，求出使

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

取最小值的那個函數來。

我們知道，所求的長度最小的曲線，就是聯接 $A$、$B$ 兩點的直線；或者從分析上說：當 $y(x)=y_0+k(x-x_0)$ 而其中 $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ 時，$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ 達到最小值。

歷史上引起數學家普遍興趣的第一個問題，就是伊凡·伯努利

所提出的捷線問題：在所有聯接兩定點 $A$、$B$ 的曲線中，求出一個曲線來，使得初速等於零的質點，自 $A$ 點受重力影響沿着它而運動時，以最短時間達到 $B$ 點❶。

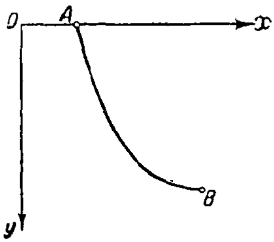

圖 1

作經過點 $A$、$B$ 的豎平面，我們把考慮範圍限制於聯接這兩點的平面弧。設 $Ox$ 軸是取在水平直線上，而 $Oy$ 軸是垂直地指向下方（圖 1）。於是點 $A$、$B$ 分別以 $(x_0, 0)$ 及 $(x_1, y_1)$ 爲坐標。若質點自 $A$ 起開始運動，初速爲零，那末它的速度 $v$ 與它的縱坐標 $y$ 之間就有下面關係：

$$v^2=2gy,$$

其中 $g$ 是重力加速度，或者

$$v=\sqrt{2gy}。$$

設 $y=y(x)$ 爲曲線的方程，質點沿着它自 $A$ 點運動至 $B$ 點。質點運動的速度爲

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{dt},$$

其中 $dt$ 是時間微元。因此

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}。\tag{3}$$

從積分（3）式，可得質點沿着曲線 $y=y(x)$ 由 $A$ 點到 $B$ 點所需的時間：

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx。\tag{3'}$$

顯然，$T$ 是依賴於函數 $y(x)$ 的汎函。要找的是使 $T$ 取最小值的 $y(x)$［也就是要求曲線 $y=y(x)$］，我們將在下節中解決這個

❶ 這裏我們自然假設 $A$、$B$ 不在同一鉛直線上。若 $A$、$B$ 在同一鉛直線上，那末這條直線，顯然就是問題的解。

問題。

捷線問題在分析上連系到另外一個物理問題：在透明的介質中，已給兩點 $A$ 及 $B$；這個介質有變動的光密度，要求出自 $A$ 點至 $B$ 點，光線所走的路線。根據所謂費爾馬原則："在聯接兩點 $A$、$B$ 的所有曲線中，光是沿着自 $A$ 至 $B$ 所需時間最短的路線進行的"這個問題因而變成一個求汎函極值問題。

祇研究平面情形，以光傳播的平面爲 $xOy$ 面，並設 $x_0$, $y_0$ 及 $x_1$, $y_1$ 爲 $A$、$B$ 兩點的坐標，而 $y=y(x)$, $x_0\leqslant x\leqslant x_1$，是某一聯接兩點的曲線。用 $v(x, y)$ 表示在 $(x, y)$ 點的光速。重複上例中的論據，我們發現光沿曲線 $y=y(x)$ 由 $A$ 傳播至 $B$ 所需的時間 $T$ 爲

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{v[x, y(x)]}dx。\tag{4}$$

按照費爾馬原則，確定光的路線的問題，就變成確定一個曲線，使得汎函 $T$ 取最小值。

**變分學的對象**　汎函的各種極大與極小問題的解決，產生一種新的數學課題——變分法。它的對象就是研究確定汎函極值的普遍方法。上面所提到的問題就是變分法的典型問題，或者簡稱變分問題。

## §2. 變分法最簡單的問題．歐拉方程

**變分法最簡單問題的提出**　我們眼前的目的是要給出解決變分法最簡單問題的方法。

與一元及多元函數極值存在問題的判別法則類似，自然產生下面三個迫切需要解決的問題：

I. 找出未知函數所需滿足的必要條件，以便當解存在時，就可藉以實際地確定所求的曲線。

II. 求出極值存在的一般的充分條件。

III. 在曲線滿足了基本必要條件以後，建立一個判別法則，使根據這個法則，可以判斷曲線是否真正給出極值，並且當給出極值時，確定它究竟是極大還是極小。

必須注意，在帶有應用性質的問題中，極值的存在往往間接的在問題的提法中已經肯定；由於這種原因，第 I 類問題就有特別重視的價值。我們從這個問題開始。

設已給函數 $F(x, y, y')$ 與它的對於三個變數 $(x, y, y')$ 的一級二級偏微商，都是連續的。此外，設 $A(a, b)$ 及 $B(a_1, b_1)$ 爲平面 $xOy$ 上已給的兩點。和上面一樣，變分法中最簡單的問題可以表示爲下面形式：在通過已給兩點 $A$, $B$ 的所有曲線

$$y=y(x) \tag{5}$$

中［函數 $y(x)$ 與微商 $y'(x)$ 在區間 $a \leqslant x \leqslant a_1$ 上連續］，求定這樣一個，使沿着它時，積分

$$J=\int_a^{a_1} F(x, y, y')dx \tag{6}$$

取極大或極小值。

**歐拉方程**　在研究上面所提出的問題時，歐拉第一個證明了下面的定理：

**定理 1.** 若曲線 $y=y(x)$ 給積分 $J$ 以極值，則代表這個曲線的函數 $y=y(x)$ 就必須滿足微分方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{7}$$

在討論定理的推演前，先指出它的實際價值。把方程（7）[1]的左方第二項對 $x$ 求微商求出來，得到

$$F_y-F_{xy'}-F_{yy'}\,y'-F_{y'y'}\,y''=0\text{。} \tag{8}$$

可見，若 $F_{y'y'}$ 不恆等於零，微分方程（7）就是二級的，因而它的

[1] $F_{y'}=F_{y'}(x, y, y')$ 是三個變數 $x$, $y$, $y'$ 的函數，而 $y=y(x)$, $y'=y'(x)$ 又是 $x$ 的函數。

通解具有下列形式，

$$y=f(x, \alpha, \beta), \tag{9}$$

其中 $\alpha$、$\beta$ 是任意常數。這樣，歐拉定理可以敍述爲：若有一個給出極值的曲線 $y=y(x)$ 存在，它就一定是屬於含兩個參變數的曲線族(9)。所以，若我們預先能確知所求的曲線存在，那末爲了實際確定它，只要確定 $\alpha$ 與 $\beta$ 就成了。然而 $\alpha$ 與 $\beta$ 的值是可以利用問題中所附加的條件求到的，就是：所求曲線必須通過兩個已給點 $A(a, b)$ 與 $B(a_1, b_1)$；也就是說未知數 $\alpha$ 與 $\beta$ 必須滿足條件：

$$\left.\begin{aligned} b&=f(a, \alpha, \beta), \\ b_1&=f(a_1, \alpha, \beta), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

據此 $\alpha$ 與 $\beta$ 就可以確定了。

這樣，歐拉定理給出了極值的必要條件，根據這個條件，在許多情形下，問題都可以完全解決。

由於這個定理對於變分法的全部古典理論與實際應用上的基本價值，我們提出定理的兩種推演。其一，我們可得一個普遍方法，通過它解決一部分的問題：把變分問題看做尋求多元函數極值問題的極限情形。這個方法在歷史上是很早的❶，並且有很大的優點，它直接地把變分法問題和尋求函數的極值這樣一個著名的問題聯繫起來。不幸的是，用這個方法來嚴格的作出證明，就是在最簡單的問題上仍然有相當的煩雜並且需要仔細的考慮；若遇到比較一般性的問題，推演就將更複雜了。這個推演的基本思想，即將在下邊提出。

另一種方法——拉格朗日——是利用到變分法問題的特殊性質，並且直接聯繫到變分法的進一步的發展——汎函計算。這個方法，在現在變分法中是基本的。我們以後將要嚴格的提出來。

**歐拉方程的推演** 現在介紹歐拉方程在一般情形下的推演。

❶ 更正確一些，它是用現代語言來陳述的比較早期的方法。

和上面一樣，在這裏，我們只講它的主要思想，詳細的地方就不講了。

今設　$y=y(x)$ 給出積分

$$J=\int_{a}^{a_1} F(x, y, y')dx$$

的極大或極小值，考慮一族多邊形 $\Pi_n$，其頂點爲$(x_i, y_i)(i=0, 1, 2, \cdots, n)$，其中 $x_i=a+i\Delta x$,

$$\Delta x=\frac{a_1-a}{n}; \ y_0=b, \ y_n=b_1,$$

而 $y_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 對於族中不同多邊形是不同的。在這一族多邊形 $\Pi_n$ 上確定函數

$$J_n=\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y'_i)\Delta x,$$

其中
$$y'_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}。$$

$J_n$ 是 $n$ 個變數 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 的函數。如果 $y(x)$ 具有連續的微商，則 $\lim\limits_{n\to\infty} J_n=J$。

在和數 $J_n$ 的各項中，只有下面兩項

$$F(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1})\Delta x, \ F(x_i, y_i, y'_i)\Delta x,$$

依賴於 $y_i$，第 $i$ 項不但直接含有 $y_i$ 而且也通過第三變數 $y'_i$ 含有 $y_i$，而第 $i-1$ 項只通過第三變數

$$y'_{i-1}=\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x}$$

含有 $y_i$。

因此

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_i}=F_y(x_i, y_i, y'_i)\Delta x-F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)+F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1})=$$

$$=\left[F_y(x_i, y_i, y'_i)-\frac{\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)}{\Delta x}\right]\Delta x,$$

其中

$$\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)=F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)-F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1})。$$

如欲多邊形 $\Pi_n$ 給 $J_n$ 以極小值，就需

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_i}=0 \qquad (i=1, 2, 3, \cdots, n-1)$$

或

$$F_y(x_i, y_i, y'_i)-\frac{\Delta F_{y'}(x_i, y_i, y'_i)}{\Delta x}=0。 \tag{11}$$

由於拉格朗日有限改變量定理，方程(11)可以寫成：

$$F_y(x_i, y_i, y'_i)=\frac{d}{dx}F_{y'}(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{y}'_i), \tag{12}$$

其中

$$\bar{x}_i=x_{i-1}+\theta_1(x_i-x_{i-1}),$$
$$\bar{y}_i=y_{i-1}+\theta_2(y_i-y_{i-1}),$$
$$\bar{y}'_i=y'_{i-1}+\theta_3(y'_i-y'_{i-1}); \quad (0<\theta_k<1)。$$

尋求一個曲線 $y=y(x)$ 給與積分 $J$ 以極值的問題，可以考慮成爲這樣一個問題，即尋求一個多邊形它給與和數 $J_n$ 以極值，然後取 $n\to\infty$ 時的極限。令方程(11)過渡到極限，並注意(12)，卽得

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0。$$

我們就得到了對於實現 $J$ 的極值的曲線 $y=y(x)$ 的歐拉方程。

**變分**　我們知道 $n$ 元函數極值理論的基本方法，是挑出函數的微分，卽"改變量"的主要線性部分，並使這個微分在極值點上恆等於零。我們把泛函

$$J=\int_a^{a_1}F(x, y, y')dx$$

看成是從多邊形得到的函數

$$J_n=\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i, y_i, y'_i)\Delta x$$

的極限。我們有

$$dJ_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial J_n}{\partial y_i}\delta y_i。$$

其中 $\delta y_i$ 是縱坐標的無窮小改變量,或:

$$dJ_n=\sum_{i=1}^{n-1}\left[F_y(x_i,y_i,y_i')-\frac{d}{dx}F_{y'}(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{y}_i')\right]\delta y_i\Delta x。\tag{13}$$

令 $n$ 趨向無窮,和數 $J_n$ 就趨向積分 $J$,並且(13)式的右方就趨向積分。

$$\int_a^{a_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx。\tag{14}$$

對於汎函 $J$ (14)式就類似於全微分。它可稱為汎函的變分。我們將看到,變分在某些意義上是汎函改變量的主要線性部分,並且歐拉方程就是它恆等於零的條件。

**$F$ 不依賴於 $y$ 的情形** 在這種情形下,我們從歐拉方程得到

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

從而

$$F_{y'}(x,y')=\text{const}。\tag{15}$$

還須注意,從方程(15)可以確定 $y'$ 僅為 $x$ 的函數。所以可以說,在我們所考慮的情形下,歐拉方程可以用積分求解。

**例** 在球面上聯接兩定點的所有曲線中,求出來長度最短的曲線。

用 $\theta$ 及 $\varphi$ 表示球面上的點的經度及緯度。設曲線的方程為 $\theta=\theta(\varphi)$。球面上弧 $\gamma$ 的長度等於

$$\int_\gamma ds=\int_\gamma\sqrt{d\varphi^2+\cos^2\varphi d\theta^2}=\int_\gamma\sqrt{1+\cos^2\varphi\theta'^2}\,d\varphi。$$

積分號下的式子不含 $\theta$。所以在這種情形下,歐拉方程有積分 $F_{\theta'}=C$(其中 $F=\sqrt{1+\cos^2\varphi\theta'^2}$),或

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\theta'=\frac{C}{\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi-C^2}}=\frac{C}{\cos^2\varphi\sqrt{(1-C^2)-C^2\text{tg}^2\varphi}}=$$

$$=\frac{d\text{tg}\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{C}{\sqrt{(1-C^2)-C^2\text{tg}^2\varphi}}。$$

因此 $\theta+C_2=\arcsin(C_1\text{tg}\varphi)$,其中 $C_1=\dfrac{C}{\sqrt{1-C^2}}$,

或

$$C_1\,\text{tg}\,\varphi=\sin(\theta+C_2),\qquad \text{tg}\,\varphi=\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta \tag{16}$$

$$\left(\alpha=\frac{1}{C_1}\cos C_2,\quad \beta=\frac{1}{C_1}\sin C_2\right)。$$

把球面坐標換為笛卡兒坐標:

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=r\,\text{tg}\,\varphi\ (r=\sqrt{x^2+y^2})。$$

方程(16)具有形式