抛物线齿轮

抛物线齿轮

闻智福 著

术文献出版社

内 容 提 要

本书系统地论述了线啮合圆柱齿轮的基本原理，并全面介绍了抛物线齿轮的基本特性、设计计算、制造工艺、精度检验等。

本书可供从事齿轮工作的科技人员和高等院校师生阅读参考。

抛物线齿轮

闻智福 著

科学技术文献出版社出版

（北京市复兴路15号）

商务印书馆上海印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行　　各地新华书店经售

开本 787×1092 1/16　印张 10.5　字数 249,000

1989年10月第1版　1989年10月第1次印刷

印数 1—4000 本

ISBN7-5023-0884-9/TH·5　　定价:（精装本）9.80 元

前　言

齿轮是机械工业的重要基础件，用途广泛．随着生产的发展，对齿轮传动的速度要求越来越高，传递的功率也越来越大，结构要求也越来越紧凑，因而如何大幅度提高齿轮传动的承载能力，延长其使用寿命，就成了广大齿轮工作者的重要研究课题．

作者十多年来研究成功一种新型的圆柱齿轮，其齿廓曲线为特殊抛物线．一方面，原始齿廓的顶部曲线和根部曲线对称于原点，因而能象渐开线齿轮一样实现线接触；另一方面，由于该齿廓曲线的固有特性，齿轮的顶部齿廓为凸齿廓，根部齿廓为凹齿廓，一对齿轮实现凹凸接触．

与目前使用最普遍的渐开线齿轮相比，在相同的技术参数和加工条件下，抛物线齿轮的承载能力有成倍的提高．滚切后氮化的抛物线齿轮的承载能力可与高承载的渗碳淬硬磨齿的渐开线齿轮媲美．在某些要求高承载能力而又不便或无法磨齿的场合，抛物线齿轮更显示其优越性．由于抛物线齿轮的不发生根切的最少齿数可达到3齿，因而抛物线齿轮还可用于一级传动比大于10的齿轮传动，从而可使齿轮箱结构做得很紧凑．

在制造上，抛物线齿轮可像渐开线齿轮一样滚切，无需特殊的机床设备，只要换用抛物线齿轮滚刀即可．所以，加工很方便，利于推广应用．

抛物线齿轮已经在船用齿轮箱、橡胶机械传动箱、传动比达一万以上的锅炉调速箱、柔管泵的传动箱和通用减速箱等场合中使用，均取得了显著的技术经济效果．

为了便于推广使用抛物线齿轮，作者特撰写了这本书．本书共分两篇．第一篇（圆柱齿轮的基本原理）是作者发明抛物线齿轮的理论依据，也是读者了解抛物线齿轮的理论基础．本篇包含了作者在平面啮合中的许多理论研究成果．本书的第二篇，抛物线齿轮部分，比较全面地阐明了抛物线齿轮的基本特性，抛物线齿轮传动的设计与计算，抛物线齿轮的制造工艺等．

由于作者水平所限，书中疏误之处，恳请读者批评、指正．

作　者

1988年12月于中国纺织大学

目　录

第一编　圆柱齿轮的基本原理

第一章　齿轮啮合基本定理

第一节　齿轮的轴线位置与相对运动

齿轮，多半是用来传递两转动轴的运动的．转轴的轴线，很自然地就成了齿轮的轴线．一对齿轮的运动状况，是由如下三个条件规定的：

1．两齿轮轴线的相对位置；

2．两齿轮的相对转动方向；

3．两齿轮的转速比．

总之，两齿轮轴线的布置及两齿轮的相对运动，是决定采用何种类型齿轮的最基本因素，它同时又是两齿轮的共轭运动的基本条件．在最一般的情况下，两齿轮轴线是既不相交又不平行的．图 1-1 给出了两根空间交错轴线 X_1 和 X_2．两根轴线之间的最短距离(即中心距，或偏距)A 是沿着两轴线的公垂线(即中心线)上测量的．

图 1-2 是图 1-1 的一个沿着中心线方向的视图．该图给出了两根齿轮轴线 X_1、X_2 之间的夹角 Σ，以及表示角速度大小和方向的矢量 ω_1 和 ω_2．相对角速度 ω_r 是角速度矢量 ω_1 和 ω_2 的矢量差．即

$$\omega_r=\omega_1-\omega_2. \tag{1}$$

轴角 Σ 定义为矢量 ω_1 和 $-\omega_2$ 方向的两轴线之间的夹角，其大小为 0° 到 180°．据此，外啮合圆柱齿轮的轴角 $\Sigma=0°$；内啮合圆柱齿轮的轴角 $\Sigma=180°$．

一对齿轮在传动时，两齿轮是各自绕其自身轴线 X_1 和 X_2 分别以角速度 ω_1 和 ω_2 转动的，角速度矢量的方向按右手规则给定．除了上述运动外，若每个齿轮再以角速度 $\omega_2'=-\omega_2$ 绕轴线 X_2 回转，那末，齿轮 2 的角速度为 $\omega_2-\omega_2=0$；而齿轮 1 在以角速度 ω_1 绕轴线 X_1 回转的同时，又以角速度 ω_2' 绕轴线 X_2 回转．显然，这时齿轮 2 相对静止，而齿轮 1

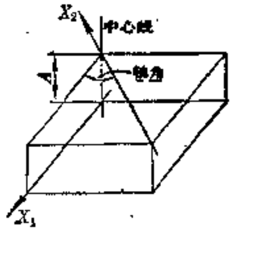

图 1-1

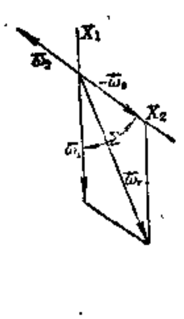

图 1-2

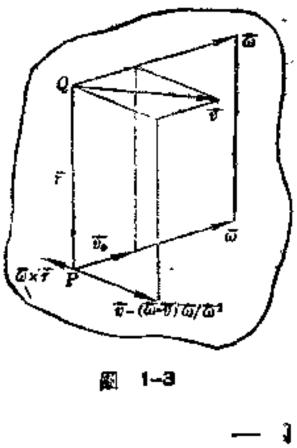

图 1-3

在相对齿轮 2 作相对运动. 这时, 齿轮 1 的运动, 如同理论力学中所说的一般的自由刚体运动一样, 可以分解成两个运动: i. 平动: 它的速度等于刚体内任选一点的速度; ii. 绕这个任选点的转动. 平动的速度与点的选择有关. 至于刚体绕这个点的转动的角速度, 却跟这个点的选择无关.

今在齿轮 1 上任选一点 Q, 假设齿轮 1 绕 Q 点的转动角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}$, 而 Q 点的平动速度矢量为 $\boldsymbol{v}$, 如图 1-3. 根据上述的转动角速度与点的选择无关的原则, 齿轮 1 绕 Q 点的转动角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2=\boldsymbol{\omega}_r$. 如在齿轮 1 上另选一点 P, P 相对 Q 的位置可用矢量 $\boldsymbol{r}$ 表示; 于是, P 点的速度

$$\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

现把矢量 $\boldsymbol{v}$ 分解为两个分矢量: 一个是与 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量平行的 $\boldsymbol{v}_t$, 一个是与 $\boldsymbol{\omega}$ 矢量垂直的 $\boldsymbol{v}_n$,

$$\boldsymbol{v}_t=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega})\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_t=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega})\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2}. \tag{4}$$

若所选点 P 的位置恰好使

$$-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega})\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2}, \tag{5}$$

则由式(2), P 点的速度将为

$$\boldsymbol{v}_0=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega})\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega^2}. \tag{6}$$

由式(6)可知, 这时 P 点的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 同向. 因为刚体绕一点的转动速度与所选点的位置无关, 所以齿轮 1 绕 P 点的转动角速度也是 $\boldsymbol{\omega}_r$. 由于 $\boldsymbol{v}_0$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 同向, 所以用 P 点的速度组合($\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{v}_0$)代替 Q 点的速度组合($\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{v}$)表示齿轮 1 的相对运动的话; 显而易见齿轮的相对运动是绕通过 P 点的轴线(图 1-3 的 $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{v}_0$ 线)作瞬时螺旋运动.

由于圆柱齿轮的相对运动是平面运动, $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 垂直, 所以 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega}=0$. 把它代入式(6), 可得 $\boldsymbol{v}_0=0$. 因此, 圆柱齿轮的相对运动是绕过 P 点的轴线作纯转动.

第二节 瞬 时 轴

如上所述, 第一个齿轮相对于静止的第二个齿轮的复合运动, 可以化为一个瞬时的螺旋运动. 我们把这个瞬时螺旋运动的轴线, 叫做瞬时螺旋运动轴, 简称瞬时轴. 对于圆柱齿轮来说, 同样称为瞬时轴, 不过这时的 $\boldsymbol{v}_0=0$ 而已.

基于齿轮绕瞬时轴的转动速度 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_r=\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2$, 所以瞬时轴与两齿轮轴线的夹角 γ_1 和 γ_2, 可以仿照图 1-2 的关系求得(见图 1-4). 当轴角为 Σ 和速比

$$i=\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{7}$$

(式中 ω_1 和 ω_2 分别是两齿轮的角速度值), 由图 1-4 可见:

$$\gamma_1+\gamma_2=\Sigma, \tag{8}$$

$$\frac{\omega_1}{\sin\gamma_2}=\frac{\omega_2}{\sin\gamma_1}=\frac{\omega_r}{\sin\Sigma}. \tag{9}$$

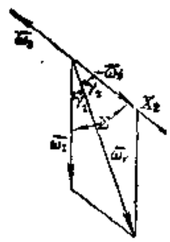

图 1-4

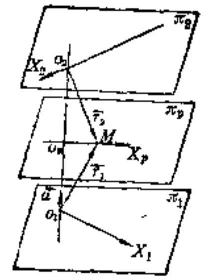

图 1-5

将式(7)和(8)代入上式，得

$$i\sin\gamma_2=\sin(\Sigma-\gamma_1).$$

将上式展开，并经整理后，可得

$$\tan\gamma_1=\frac{\sin\Sigma}{i+\cos\Sigma}. \tag{10}$$

同理

$$\tan\gamma_2=\frac{i\sin\Sigma}{1+i\cos\Sigma}. \tag{11}$$

就外啮合圆柱齿轮来说，$\gamma_1=\gamma_2=0°$.

由于瞬时轴在齿轮空间中的位置与相对角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_r$ 共线，另一方面，角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_1$ 与 $\boldsymbol{\omega}_2$ 又分别沿着齿轮 1 和齿轮 2 的轴线方向（令 $\boldsymbol{\omega}_r=\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2$）构成一个封闭的矢量三角形，这就说明 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 和 $\boldsymbol{\omega}_r$ 三个矢量共面. 于是，分别与这三个矢量共线的三根轴线（即齿轮 1 的轴线 X_1、齿轮 2 的轴线 X_2 和瞬时轴线 X_p）三者共面. 换句话说，轴线 X_1、X_2 和 X_p 应在三个互相平行的平面内.

图 1-5 给出了两齿轮轴线 X_1 和 X_2，两轴线的公垂线分别与两齿轮轴线相交于 o_1 和 o_2 点，距离 o_1o_2 即为偏距 A. 过 o_1、o_2 点作垂直于公垂线的平面 π_1 和 π_2. 无疑，轴线 X_1 和 X_2 分别在平面 π_1 和 π_2 上. 根据轴线 X_1、X_2 和 X_p 必须共面的条件，瞬时轴 X_p 必将在某一个与公垂线相垂直的平面 π_p 内，如图 1-5 所示.

一个齿轮相对于另一齿轮的瞬时螺旋运动，可表示为以一相对角速度 $\boldsymbol{\omega}_r$ 绕瞬时轴 X_p 转动同时又以相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 沿着同一轴线 X_p 平动. 由此，瞬时轴上各齿轮点满足如下条件：

$$\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{v}_r=0. \tag{12}$$

利用式(12)的瞬时轴条件，可以求出瞬时轴在齿轮空间中的位置. 设图 1-5 中平面 π_p 上的轴线 X_p 是欲求的瞬时轴. 在轴线 X_p 上任取一点 M，点 M 离 o_1 点的向径为 $\boldsymbol{r}_1$，而 M 离 o_2 点的向径为 $\boldsymbol{r}_2$. 因为瞬时轴上的 M 点是在作相对运动的齿轮 1 上，一方面将绕齿轮 1 轴线以角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 转动，与此同时又将以 $-\boldsymbol{\omega}_2$ 的角速度绕齿轮 2 轴线转动，所以它的相对速度

$$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{r}_2. \tag{13}$$

设公垂线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{a}$，则矢量

$$\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{o}_2=A\boldsymbol{a}, \tag{14}$$

式中 A 为 o_1o_2 之间的距离. 由图 1-5 可知，

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{o}_2\boldsymbol{o}_1=\boldsymbol{r}_1-A\boldsymbol{a}. \tag{15}$$

将式(15)代入式(13)，得

$$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{\omega}_2\times(\boldsymbol{r}_1-A\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{r}_1+A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}.$$

再将式(1)代入上式，得

$$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}_1+A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}. \tag{16}$$

因为瞬时轴上的点均要满足式(12)的条件，故而

$$\boldsymbol{\omega}_r\times[\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}_1+A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}]=0.$$

将上式展开，得

$$(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{\omega}_r-(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{\omega}_r)\boldsymbol{r}_1+A(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{\omega}_2-A(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{\omega}_2)\boldsymbol{a}=0.$$

因为公垂线垂直于平面 π_p，所以 $\boldsymbol{\omega}_r$ 与 $\boldsymbol{a}$ 正交，上式的第三项为零．于是可改写成

$$(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{\omega}_r-\omega_r^2\boldsymbol{r}_1-A(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{\omega}_2)\boldsymbol{a}=0. \tag{17}$$

由式(17)可知，$\boldsymbol{\omega}_r$、$\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的三个矢量在乘上相应的系数后构成一个封闭三角形．因为矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 的尾端在原点 o_1 处，而矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 的矢端又在瞬时轴的 M 点处，矢量 $\boldsymbol{a}$ 又在 o_1o_2 线上，所以矢量 $\boldsymbol{\omega}_r$ 的延伸线必与公垂线 o_1o_2 相交(不然，不能构成一个封闭的矢量三角形)．因此，由式(17)可以得出一个结论：瞬时轴必与公垂线垂直相交．

设瞬时轴 X_p 与公垂线 o_1o_2 的交点为 o_p，并令

$$o_1o_p=A_1, \tag{18}$$

$$o_2o_p=A_2, \tag{19}$$

式中：A_1、A_2 分别为瞬时轴偏离齿轮轴线 X_1、X_2 的距离．

式(17)两边各除以 ω_r^2，可得

$$\frac{(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{r}_1)}{\omega_r^2}\boldsymbol{\omega}_r-\boldsymbol{r}_1-A\frac{(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{\omega}_2)}{\omega_r^2}\boldsymbol{a}=0. \tag{20}$$

由式(20)不难理解，单位矢量 $\boldsymbol{a}$ 项的系数就是瞬时轴离齿轮 1 轴线 X_1 的距离 A_1，故

$$A_1=\frac{\boldsymbol{\omega}_r\cdot(-\boldsymbol{\omega}_2)}{\omega_r^2}A. \tag{21}$$

由图 1-4 可知，

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_r}{\omega_r}\cdot\frac{(-\boldsymbol{\omega}_2)}{\omega_2}=\cos\gamma_2, \tag{22}$$

且

$$\omega_r=\sqrt{\boldsymbol{\omega}_r^2}=\sqrt{(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)^2}=\sqrt{\boldsymbol{\omega}_1^2-2\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2+\boldsymbol{\omega}_2^2}. \tag{23}$$

又由图 1-4，得

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1}\cdot\frac{(-\boldsymbol{\omega}_2)}{\omega_2}=\cos\Sigma.$$

将式(7)和上式代入式(23)，可得

$$\omega_r=\sqrt{\omega_1^2+2\omega_1\omega_2\cos\Sigma+\omega_2^2}=\omega_2\sqrt{i^2+2i\cos\Sigma+1}. \tag{24}$$

于是，再将式(22)和(24)代入式(21)，得

$$A_1=\frac{1+i\cos\Sigma}{1+2i\cos\Sigma+i^2}A. \tag{25}$$

同理，瞬时轴离齿轮 2 轴线的距离

$$A_2=\frac{i(i+\cos\Sigma)}{1+2i\cos\Sigma+i^2}A. \tag{26}$$

现在来求速度 $\boldsymbol{v}_r$．因为

$$v_r=\sqrt{\boldsymbol{v}_r^2},$$

将式(16)代入上式，得

$$v_r=\sqrt{[\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}_1+A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}]^2}.$$

因为 $\boldsymbol{r}_1=A_1\boldsymbol{a}+o_2M$，且

$$\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{\omega}_r\times(A_1\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}_2M)=A_1\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{a},$$

将此关系式代入前式，得

$$\begin{aligned}v_r&=\sqrt{[A_1\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}]^2}\\&=\sqrt{A_1^2(\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{a})^2+2A_1A(\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a})+A^2(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a})^2}.\end{aligned}$$

因为

$$(\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{a})^2=\omega_r^2\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{a})^2=\omega_r^2,$$

$$(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a})^2=\omega_2^2\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{a})^2=\omega_2^2,$$

$$(\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{\omega}_2)\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\omega}_2)=\boldsymbol{\omega}_r\cdot\boldsymbol{\omega}_2=-\omega_r\omega_2\cos\gamma_2,$$

将以上关系式代入上式，得

$$v_r=\sqrt{A_1^2\omega_r^2-2A_1A\omega_r\omega_2\cos\gamma_2+A^2\omega_2^2}.$$

将式(25)代入上式，可得

$$v_r=A\frac{\omega_2^2}{\omega_r}\sqrt{(1+i\cos\Sigma)^2-2(1+i\cos\Sigma)\frac{\omega_r}{\omega_2}\cos\gamma_2+\frac{\omega_r^2}{\omega_2^2}}.$$

将式(9)代入上式，并考虑到 $\omega_2=\frac{\omega_1}{i}$，则上式可改写成

$$v_r=A\frac{\omega_2^2}{\omega_r}\sqrt{(1+i\cos\Sigma)^2-2(1+i\cos\Sigma)^2+\frac{\sin^2\Sigma}{\sin^2\gamma_1}}.$$

再利用式(10)，上式最终可改写成

$$v_r=A\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_r}\sin\Sigma. \tag{27}$$

由式(27)所得的 v_r 就是那个相对运动着的齿轮的平动速度．由此可得相对运动着的那个齿轮的绕瞬时轴的螺旋运动参数

$$p_r=\frac{v_r}{\omega_r}=A\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_r^2}\sin\Sigma. \tag{28}$$

不言而喻，两个齿轮彼此的相对运动均是瞬时螺旋运动．在同一瞬时有同一瞬时轴，只不过螺旋运动的方向相反而已．

对于外啮合圆柱齿轮来说，根据式(10)、(11)，可得瞬时轴与两齿轮轴线的夹角 $\gamma_1=\gamma_2=0°$，即瞬时轴与两齿轮轴线在同一平面内．又由式(25)、(26)，可得瞬时轴离两齿轮轴线的距离分别为

$$A_1=\frac{1}{1\pm i}A, \tag{29}$$

$$A_2=\frac{i}{i\pm1}A, \tag{30}$$

式中的“±”符号，“+”号用于外啮合，“−”号用于内啮合．

根据式(7)的规定，i 总是正值．当内啮合时，由式(29)、(30)算得的齿轮轴线离瞬时轴的距离中，有一个是负值．这是因为在导出公式(25)、(26)时，曾规定两齿轮轴线在瞬时轴的

两侧，今内啮合圆柱齿轮，两齿轮轴线在瞬时轴的同一侧，故而其中一个偏距将取负值.

因为一对圆柱齿轮的两根轴线共线，$\sin\Sigma=0$，根据式(27)，相应的沿瞬时轴方向的平动速度 $v_r=0$. 随之，螺旋运动参数 $p_r=0$.

经以上分析可以清楚地看到，两齿轮之间的相对运动是绕瞬时轴的瞬时螺旋运动，瞬时轴与两齿轮轴线共面，并且有公共垂线. 在一般情况下，瞬时轴与齿轮轴线既不平行又不相交，瞬时轴与齿轮轴线的夹角及其偏距分别由式(10)、(11)和式(25)、(26) 确定，而且，瞬时轴的位置取决于两齿轮的转速比 i，而跟齿轮本身的转速高低无关.

齿轮上的相对运动瞬时轴，是随着齿轮回转变换的. 我们把瞬时轴在运动齿轮上的轨迹，叫做**瞬轴面**. 瞬时轴在定坐标系上的轨迹称为**瞬时轴的固定轨迹**，简称**瞬轴迹**. 齿轮的瞬轴面是个直纹面，一对齿轮的运动本质上就是齿轮的瞬轴面沿着对应的瞬轴面的啮合运动.

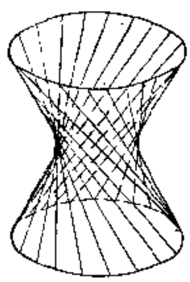

图 1-6

通常所用的传动齿轮是定速比的齿轮，即 i 为常数. 这时，瞬时轴在固定空间中的位置将保持不变；而瞬时轴在运动齿轮上的轨迹是一个回转曲面. 在一般两空间交错轴的场合，瞬时轴与齿轮轴线既不平行又不相交，它的瞬轴面是一个单叶回转双曲面(见图 1-6). 在运转过程中，两个单叶回转双曲面在每一时刻沿着一条公共母线(即瞬时轴)相切，彼此沿公共母线的垂直方向滚动，并沿着公共母线方向互相滑动. 对于圆柱齿轮来说，瞬时轴 X_p 与轴线 X_1、X_2 平行，因此圆柱齿轮的瞬轴面是个圆柱面. 又因为 $v_r=0$，所以两瞬轴面作纯滚动，因此通常又称它为"节圆柱".

第三节　节线与节面

在齿轮传动中，通常把一对齿轮间的相对速度为零的点叫做节点. 因为在任意接触点上的相对速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{R}_2,$$

式中 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 分别是齿轮 1 和齿轮 2 上接触点的速度；$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$ 分别是两齿轮的回转角速度；$\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$ 分别是两齿轮的接触点矢径. 利用上一节的关系

$$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_1-A\boldsymbol{a},$$

则上式可以改写成

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{R}_1+A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}, \tag{31}$$

式中 A 是两齿轮轴线间的公垂线距离；$\boldsymbol{a}$ 是公垂线的单位矢量. 对于相对速度为零的点，则

$$(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{R}_1=-A\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{a}. \tag{32}$$

因为上式的右边是一个固定矢量，所以式(32)是一个与矢量$(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)$平行的直线的方程. 通常把这直线称作为**节线**；相应的相对速度恒等于零的几何曲面，定义为**节面**.

今取齿轮 1 的轴线为 z_1 轴，取齿轮 2 的轴线为 z_2 轴，取两齿轮轴线的公垂线为 x_1 轴和 x_2 轴，y_1 轴与 y_2 轴按右手规则决定. 图 1-7 给出了两齿轮的轴线位置和它的转动角速度矢量. 任取一接触点 c，由图 1-7 可知，两齿轮在 c 点的线速度分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\omega_1\boldsymbol{k}_1\times\boldsymbol{R}_1,\qquad \boldsymbol{v}_2=-\omega_2\boldsymbol{k}_2\times(A\boldsymbol{i}+\boldsymbol{R}_1), \tag{33}$$

由图 1-7 可知

$$\boldsymbol{k}_2 = -\sin\Sigma\,\boldsymbol{j}_1 + \cos\Sigma\,\boldsymbol{k}_1, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{k}_1 = x_1\boldsymbol{i}_1 + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}_1.$$

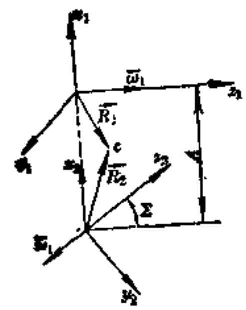

图 1-7

于是，式(33)可改写成

$$\boldsymbol{v}_1 = \omega_1(x_1\boldsymbol{j}_1 - y\boldsymbol{i}), \tag{35}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \omega_2[(y_1\cos\Sigma + z_1\sin\Sigma)\boldsymbol{i}_1 - (A+x_1)\cos\Sigma\,\boldsymbol{j}_1 - (A+x_1)\sin\Sigma\,\boldsymbol{k}_1]. \tag{36}$$

由此，c 点的相对速度

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \omega_2\{-[(\cos\Sigma + i_{12})y_1 + z_1\sin\Sigma]\boldsymbol{i}_1 + [A\cos\Sigma + (\cos\Sigma + i_{12})x_1]\boldsymbol{j}_1 + \sin\Sigma(A + x_1)\boldsymbol{k}_1\}. \tag{37}$$

式中：$\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{j}_1$、$\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$ 分别是坐标轴 x_1、y_1、z_1、z_2 的单位矢量；

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

设齿轮 1 节面上一点的矢径为

$$\boldsymbol{R} = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{j}_1 + z\boldsymbol{k}_1.$$

当齿轮 1 转过 φ_1 角时进入接触. 不言而喻，

$$x_1 = x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1, \qquad y_1 = x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1, \qquad z_1 = z. \tag{38}$$

将式(38)代入式(37)，得

$$\boldsymbol{v} = \omega_2\{-[(\cos\Sigma + i_{12})(x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1) + z\sin\Sigma]\boldsymbol{i}_1 + [A\cos\Sigma + (\cos\Sigma + i_{12})(x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1)]\boldsymbol{j}_1 + \sin\Sigma[A + (x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1)]\boldsymbol{k}_1\}. \tag{39}$$

根据节面定义：$\boldsymbol{v} = 0$，务必使

$$\left.\begin{aligned} &(\cos\Sigma + i_{12})(x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1) + z\sin\Sigma = 0, \\ &A\cos\Sigma + (\cos\Sigma + i_{12})(x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1) = 0, \\ &\sin\Sigma[A + (x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1)] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

对于平行轴的圆柱齿轮来说：$\sin\Sigma = 0$，$\cos\Sigma = \pm 1$，于是上式可以写成

$$(i_{12} \pm 1)(x\sin\varphi_1 + y\cos\varphi_1) = 0, \tag{41}$$

$$(i_{12} \pm 1)(x\cos\varphi_1 - y\sin\varphi_1) = \mp A. \tag{42}$$

将式(41)和(42)两边平方后相加，得

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{A}{i_{12} \pm 1}\right)^2. \tag{43}$$

只要将上式中的转速比 i_{12} 换成 $i_{21} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$，即得齿轮 2 的节面. 由上式可知，圆柱齿轮的节面是圆柱面. 式中“±”号处，“+”号用于外啮合；“−”号用于内啮合.

比较式(29)和(43)，并令式(43)中的 $x^2 + y^2 = A_1^2$，就可以清楚地知道，圆柱齿轮的节线位置也就是它的瞬时轴位置，其节面就是它的瞬轴面.

对于交错轴传动来说，因为 $\sin\Sigma \neq 0$，$A \neq 0$，式(40)的三个式子不能同时成立，故不存在 $\boldsymbol{v} = 0$ 的点. 因此，从上述的意义上来说，交错轴齿轮就不存在节线、不存在节面.

其实，相对速度等于零仅仅是圆柱齿轮节面的一个特性．一对圆柱齿轮的节面是一对共轭接触的圆柱面，它具有如下四个基本性质：

i．两节面彼此无滑动地滚动；

ii．节面与瞬轴面重合；

iii．在任意接触点上齿面的公法线与节线相交；

iv．节线是两侧的啮合曲面的交线．

由于圆柱齿轮的两侧啮合曲面在节线上相交，于是很自然的把节面作为设计齿轮毛坯的基础．

从以上的性质来看，圆柱齿轮的节面具有四重性：即

i．节面是滚动接触的曲面，这时可称滚动节面；

ii．节面是两齿轮相对运动的瞬轴面，这时可称运动节面；

iii．节面处于轮齿的啮合空间之内，这时可称啮合节面；

iv．节面是设计齿轮毛坯的基础，这时可称齿坯节面．

把“节面”定义为“相对速度恒等于零的几何曲面”是齿轮发展史上的早期采用的，因为这个定义不适用于交错轴齿轮，故而我们又把这样的节面称为狭义节面；而把上述的运动节面、啮合节面和齿坯节面称为广义节面．显然，任何齿轮都应毫不例外地具有广义节面，因此有必要将节面重新定义如下[4]：

(1) 凡接触点的相对速度矢量是零矢量的几何曲面，定义为滚动节面；

(2) 凡接触点的相对速度矢量与相对角速度矢量共线的几何曲面，定义为运动节面；

(3) 凡接触点的相对速度矢量在既与接触线正交又与齿轮轴线的公垂线正交的方向上的投影有固定值的几何曲面，定义为啮合节面；

(4) 凡与啮合节面在节点(或称中央点)处相切的几何曲面，均可以为齿坯节面．

就圆柱齿轮来说，节面接触点的相对速度矢量为零矢量，所以，它首先是滚动节面；因为是零矢量，它与任何方向矢量共线，也就与相对角速度矢量共线，所以同时也是运动节面；也因为是零矢量，因此它在既与接触线正交又与齿轮轴线的公垂线正交的方向上的投影有固定值，所以它同时也是啮合节面；因为只要与啮合节面在节点处相切就可成为齿坯节面，因此选用圆柱状的啮合节面直接作为齿坯节面，从制造工艺的角度来说是非常合理的．综上所述，圆柱齿轮的节面具有四重性．

当一对齿轮进行啮合运动时，其运动节面亦在相应地进行啮合运动．所以说，一对齿轮的啮合运动本质上就是齿轮的运动节面沿着对应的节线的啮合运动．啮合节面是体现轮齿啮合区间的一种节面，它本身并不具有啮合性．齿坯节面是齿轮毛坯的设计基础，齿轮就是沿着齿坯节面四周分布的，轮齿是依据齿坯节面安排其齿高的．仅有滚动节面才不是所有各种齿轮所必需具有的属性，只是在特殊情况下，平行轴齿轮和相交轴齿轮传动的运动节面兼有相对速度等于零的特性，才派生出滚动节面．

第四节　齿线与齿廓

在上一节中说过，轮齿是沿着齿坯节面四周分布的，因此轮齿的齿曲面必与其齿坯节面相交，其交线通常是节面上的一条曲线．因为它在节曲面上，有时就称它为节曲线；又因为

它在齿曲面上，有时就称它为齿线．从一侧齿面来看，每一个轮齿均有一条齿线；相邻齿线在节曲面中的间隔，定义为节距．

就直齿圆柱齿轮来说，直齿齿面与圆柱状节面的交线是一条平行于齿轮轴线的直线，所以它的齿线就是节圆柱的直母线；就斜齿圆柱齿轮来说，斜齿齿面与圆柱状节面的交线是一条圆柱螺线，所以它的齿线是一条节圆柱的螺旋线．无论是直齿圆柱齿轮还是斜齿圆柱齿轮，齿线上任意一点的切线总是在节曲面的切平面内．因为，在微分领域里，可以把曲线看作与之相切的直线，所以齿线的线素 $d\boldsymbol{r}$ 也在节面的切平面内．当轮齿在它的齿线点上接触时，由于接触点的速度矢量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 也在节面的切平面内，故而齿线线素 $d\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$ 共面．所以，齿线线素应满足如下关系：

$$[d\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]=0. \tag{44}$$

式(44)就是定义齿轮齿线的一般表达式，它不仅适用于圆柱齿轮，而且也适用于相交轴齿轮和交错轴齿轮．

齿廓曲面与平截面的交线，定义为齿廓．通常，把垂直于圆柱齿轮轴线的平面截齿曲面所得的齿廓，称为端面齿廓；由包含齿面法线并垂直于齿线的平面截齿曲面所得的齿廓，称为法面齿廓．在直齿圆柱齿轮场合，端面齿廓与法面齿廓重合．

应该指出，在平行轴的圆柱齿轮传动中，接触点的位移是在与轴垂直的截面中进行，这个与轴垂直的截面通常称为横截面．因此，两齿轮在接触点处的速度矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_2$ 总是在同一个横截面里．根据式(44)规定的条件，横截面中的齿廓曲线也是一条齿线．

然而，还应指出：齿轮在过两齿轮轴线的平面里的接触点，其两速度矢量 $\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=0$、因而在这些点上，齿面任意方向的线素均可成为齿线的线素．例如，精密机械传动中采用的可调整齿侧间隙的变厚齿轮传动的一对齿坯节面却是过节点的两圆锥面，如图 1-8 所示，此时齿线是圆锥面的母线．这条齿线在过两齿轮轴线的平面内．

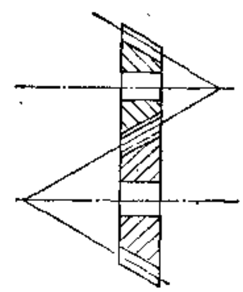

图 1-8

通常，圆柱齿轮是以它的齿廓形状来命名的．例如：渐开线齿轮和摆线齿轮，其齿廓形状分别为渐开线和摆线．有时，圆柱齿轮也有用齿线的形状来命名，例如曲线齿圆柱齿轮，就在于它的齿线是一条在节圆柱上的弧线．

正如以上所述，齿线的切线在节面的切平面内，而齿线的方向就是由它的切线方向规定的．齿廓沿着齿线运动，形成了圆柱齿轮轮齿的齿曲面，所以轮齿的倾斜方向就是由齿线的方向决定的．通常，把齿轮轴线在节面的切平面里的投影与齿线切线的夹角，称作“齿轮轮齿的螺旋角”．在平行轴的圆柱齿轮传动中，齿轮轴线在节面的切平面里的投影与节圆柱的母线重合，因此轮齿的倾斜角也就是齿线在节圆柱上的螺旋线倾角，故而称它为螺旋角．在直齿圆柱齿轮中，齿线以及齿线的切线与节圆柱的母线重合，所以螺旋角为零度．

齿线是齿曲面与齿坯节面上的一条公共曲线．所以，齿线上一点的齿曲面的法线方向和齿坯节面的法线方向均与齿线方向正交．齿曲面的法线方向与齿坯节面的法线方向之间的夹角的余角，定义为“齿面的压力角”．换句话说，过齿线上一点的齿面法线与它在节面的切平面上投影之间的夹角为齿面的压力角．在斜齿圆柱齿轮中，垂直于齿线的面称为法面，上述的压力角就是斜齿轮的法面压力角．因为斜齿圆柱齿轮的齿曲面是等升距螺旋面，它

是由端面齿廓曲线作螺旋运动而成．所以，除了上述的法面压力角外，还有端面压力角．端面廓线在节点处的法线与它的节圆切线之间的夹角，定义为**端面压力角**．不言而喻，法面压力角与端面压力角之间有着一定的换算关系，并与螺旋角的大小有关．

如同螺旋角代表着齿线的倾斜度一样；压力角代表着廓线的倾斜度．螺旋角与压力角是圆柱齿轮的两个极其重要的啮合特性参数．

第五节　齿轮啮合基本定理

通常，在讨论一对齿轮的运动时，总是认为齿轮是完全刚性体．因此，当一对齿轮连续传动时，在齿面的接触点的法线方向不能有相对运动（不然，一对齿轮不是彼此分离，就是彼此嵌入；在此种情况下，一对齿轮就不能正常传动）．无论是定速比传动的齿轮还是变速比传动的齿轮，是线接触的齿轮还是点接触的齿轮，均应满足这个基本要求．

假设一对齿轮某一瞬时在某点 p 上接触，齿轮 1 上的 p 点的线速度是 $\boldsymbol{v}_1$；齿轮 2 上的 p 点的线速度是 $\boldsymbol{v}_2$．在 p 点的两接触齿面的公法线的单位矢量是 $\boldsymbol{n}$．因为 $\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1$；$\boldsymbol{v}_2$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2$．根据一对齿轮在它的接触点的法线方向不能有相对运动的基本要求，则

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2. \tag{45}$$

移项，$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)=0$．令

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2, \tag{46}$$

则

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{47}$$

式中，$\boldsymbol{v}$ 是两齿轮在接触点处的相对速度矢量．由式(47)可知，为使一对齿轮能正常传动，两齿轮的相对速度必定要垂直于两齿面接触点处的公法线．换句话说，两齿轮的相对速度必定要在两齿面接触点处的公切平面内．这就是所有齿轮的齿形啮合条件．

前面说过，两齿轮的相对运动是沿着瞬时轴作瞬时螺旋运动．假如，把齿轮 2 看成相对静止；齿轮 1 在作相对运动，则齿轮 1 上的齿面点相对于齿轮 2 运动时，将描绘出绕瞬时轴作螺旋运动的螺旋线，而这些螺旋线的包络乃是齿轮 2 的齿面．两齿轮的齿面在啮合过程中应始终在接触处相切，所以齿面上接触点的瞬时螺旋运动线的切线矢量必定在接触点的两齿面的公切平面内．接触点处两齿轮的相对速度方向就是沿着瞬时螺旋运动线的方向．因此，接触点处的两齿轮的线速度在螺旋运动线的正交方向的分速度也应该相等．

就一对圆柱齿轮来说，其相对运动是绕节圆柱上的瞬时轴作纯回转运动，接触点的相对速度

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}, \tag{48}$$

式中：$\boldsymbol{\omega}_r$ 是一对齿轮的相对角速度矢量；$\boldsymbol{r}$ 是原点取在瞬时轴上的接触点的矢径．

由式(48)可清楚地知道，相对速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于瞬时轴与矢径 $\boldsymbol{r}$ 构成的平面．当一个齿轮相对于另一个齿轮绕瞬时轴回转时，只有齿面上的切线与它的相对运动方向一致的点才能进入接触．因此，进入接触的齿面上的点，其齿面法线也必定在上述的瞬时轴与矢径构成的平面里．换句话说，凡进入接触的齿面上的点，其齿面法线必通过瞬时轴．这就是通常所说的两圆柱齿轮啮合的必要条件："齿面接触点的公法线通过节点"．

然而，必须指出："齿面接触点的公法线要通过瞬时啮合节点"这个齿轮啮合基本定理（即维利斯定理）只适用于平行轴齿轮传动和相交轴齿轮传动，而不适用于交错轴齿轮传动。交错轴传动的齿轮齿面接触点的公法线，并不一定要通过瞬时轴。因为在交错轴传动中，齿面接触的相对速度矢量是两项分矢量之和。一项是绕瞬时轴的回转速度矢量；另一项是沿着瞬时轴线的平动速度矢量。由于有平动速度矢量的存在，相对速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 就不一定垂直于瞬时轴与矢径 $\boldsymbol{r}$ 构成的平面，所以齿面的公法线也就不一定与瞬时轴相交。

如果我们选择瞬时轴作为直角坐标轴的 z 轴，在与瞬时轴垂直的平面里选择两互相垂直的直线为 x、y 轴。于是，该瞬时的齿曲面方程式可表示成

$$f(x, y, z)=0. \tag{49}$$

该瞬时的齿面单位法线矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \tag{50}$$

式中 $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

因为齿轮的相对运动是绕瞬时轴（即 z 轴）的瞬时螺旋运动。绕瞬时轴旋转的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_r=\omega_r\boldsymbol{k}$，沿瞬时轴的平动速度矢量 $\boldsymbol{v}_r=v_r\boldsymbol{k}$。因为坐标原点在瞬时轴上，若取接触点位置的向径为 $\boldsymbol{r}$，则齿面接触点的相对速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}_r=\omega_r\left(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}+\frac{v_r}{\omega_r}\boldsymbol{k}\right)=\omega_r(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}+p_r\boldsymbol{k}), \tag{51}$$

式中 $p_r=\frac{v_r}{\omega_r}$ 是螺旋运动参数。

因为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，把它代入式(51)，得两齿轮在接触点的相对速度

$$\boldsymbol{v}=\omega_r(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+p_r\boldsymbol{k}). \tag{52}$$

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$，所以

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla f=0.$$

将式(52)代入上式，得

$$\omega_r(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+p_r\boldsymbol{k})\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0,$$

$$-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}+p_r\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{53}$$

显然，式(49)与式(53)的联立解（即两曲面的交线），就是该瞬时的齿面上的接触线。因为接触线在齿面上，所以它必定满足式(49)；另外，接触线上的点又要满足式(53)，因此，上述两式的联立解是一条接触线。由式(53)可清楚地知道：接触线的位置是与齿曲面的形状、瞬时轴的位置以及瞬时螺旋运动的螺旋参数有关，而跟一对齿轮的运动速度大小无关。因为

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0,$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}+p_r\boldsymbol{k})=0. \tag{54}$$

满足上述条件的法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 可以有无数个。因此，在两轴空间交错情况下，只有某个特殊的 $\boldsymbol{n}$ 才通过瞬时轴。所以，齿面接触点上的公法线不一定通过瞬时轴。

可是，就圆柱齿轮来说，$p_r=0$。把它代入式(54)，得