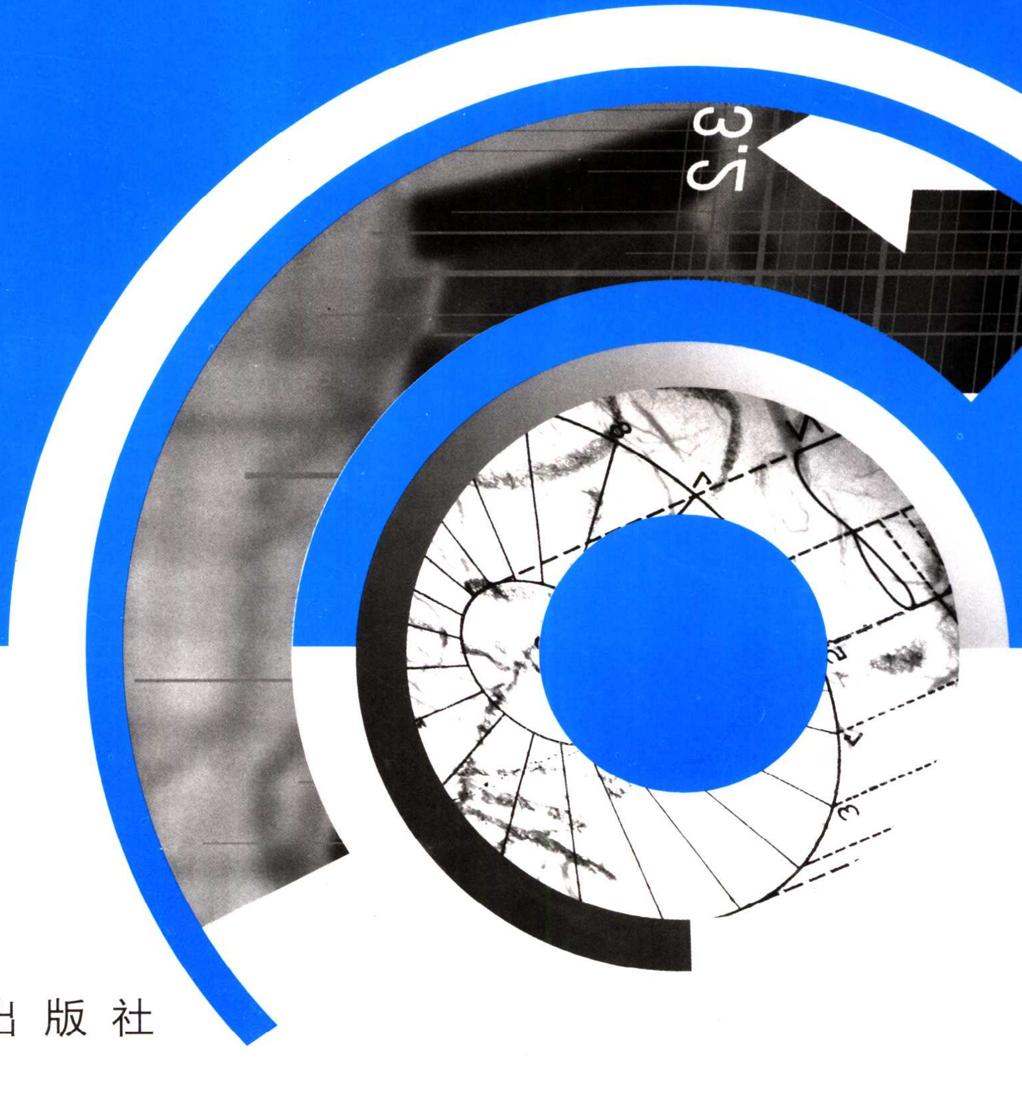
工商管理、市场营销本科系列教材

线性代数

Xianxing Daishu

主 编 李敬武



重庆大学出版社

工商管理、市场营销本科系列教材

线性代数

主　编　李敬武
副主编　赵展辉　青　敏
李兰芳　汤红英

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是为贯彻教育部“十五”教材建设规划精神而编写出版的高等学校本科系列教材之一。全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、矩阵特征值和特征向量以及二次型，最后一章把投入产出分析作为应用范例作了简要介绍。本书可作为高等院校线性代数课程的教材，亦可供经济管理与工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李敬武主编. —重庆:重庆大学出版社,2002.10

工商管理、市场营销本科系列教材

ISBN 7-5624-2700-3

Ⅰ.线...　Ⅱ.李...　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材

Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 053932 号

线 性 代 数

主　编　李敬武

副主编　赵展辉　青　敏

李兰芳　汤红英

责任编辑:梁　涛　　版式设计:梁　涛

责任校对:廖应碧　　责任印制:张永洋

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内

邮编:400044

电话:(023) 65102378　65105781

传真:(023) 65103686　65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

自贡新华印刷厂印刷

*

开本:787×960　1/16　印张:14　字数:251 千

2002 年 10 月第 1 版　　2002 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5624-2700-3/O · 210　　定价:17.00 元

前　　言

《线性代数》是高等学校经济与管理专业的必修基础课。本教材为适应新世纪高等教育发展需要，着力体现加强基础、重视应用、培养创新能力的教学理念。在编写中注意既有学科上的科学性和系统性，又有教学上的针对性和实用性。力求通俗、简明、适用，起点、分量适中。书中带“＊”号的内容和习题可根据需要选学。

参加本书编写的是赵展辉(第1章)，李敬武(第2,7章)，李兰芳(第3章)，青敏(第5章)和汤红英(第4,6章)。全书由李敬武总纂。邱敦元教授、张振良教授、赵则民副教授参与了本书编写大纲的审定，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

书中难免有错误和不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2002年5月

目录

第1章 行列式

1.1 n阶行列式的定义 …… 1
1.2 行列式的性质 …… 10
1.3 行列式按行(列)展开 …… 18
1.4 克莱姆法则 …… 25
习题1 …… 29

第2章 矩阵

2.1 矩阵的概念 …… 34
2.2 矩阵的运算 …… 36
2.3 逆矩阵 …… 50
2.4 分块矩阵 …… 55
2.5 矩阵的初等变换 …… 61
2.6 矩阵的秩 …… 70
习题2 …… 73

第3章 线性方程组

3.1 线性方程组的消元解法 …… 81
3.2 n维向量及其计算 …… 91
3.3 向量间的线性关系 …… 95
3.4 向量组的秩 …… 107
3.5 线性方程组解的结构 …… 112
习题3 …… 123

*第 4 章　向量空间

4.1　向量空间的概念 …………………………………………………… 130
4.2　向量的内积 ……………………………………………………………… 135
习题 4 ……………………………………………………………………… 143

第 5 章　矩阵的特征值和特征向量

5.1　矩阵的特征值与特征向量 ………………………………………… 145
5.2　相似矩阵与矩阵的对角化 ………………………………………… 152
5.3　实对称矩阵的对角化 ……………………………………………… 157
习题 5 ……………………………………………………………………… 164

第 6 章　二次型

6.1　二次型 ………………………………………………………………… 166
6.2　化二次型为标准型 …………………………………………………… 169
6.3　正定二次型 …………………………………………………………… 176
习题 6 ……………………………………………………………………… 180

*第 7 章　投入产出数学模型

7.1　投入产出分析的基本概念 ………………………………………… 181
7.2　部门间的投入产出表 ……………………………………………… 182
7.3　消耗系数 ……………………………………………………………… 185
7.4　基本平衡方程式 ……………………………………………………… 188
7.5　应用举例 ……………………………………………………………… 192
习题 7 ……………………………………………………………………… 195

附录

参考答案

参考文献

第 1 章 行列式

行列式是一类特定计算过程的简明表示，是线性代数中的一个基本概念和重要工具。它不仅在数学中有广泛的应用，而且在其他理论和实际问题的应用中，也发挥着十分重要的作用。本章从解二元、三元线性方程组出发，给出二三阶行列式的概念，再把它们加以推广，引入 n 阶行列式，并讨论 n 阶行列式的性质和计算方法，最后，给出用 n 阶行列式解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二三阶行列式

在中学里已经学习了用消元法求解二元、三元一次(线性)方程组，下面再次对这一方法进行分析，并由此建立起行列式的概念。

我们知道，二元一次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,j=1,2)$ 是未知数 $x_i(i=1,2)$ 的系数，$b_i(i=1,2)$ 是常数项，分别用 a_{22}，a_{12} 乘式(1.1)第一个方程和第二个方程，然后两式相减，消去 x_2 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

同理，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

于是，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可求得线性方程组(1.1)的惟一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

注意到线性方程组(1.1)的求解公式(1.2)的分子和分母都是两数乘积之差，为了便于记忆这些解的公式，引入二阶行列式如下，用符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称之为二阶行列式。其中数 a_{ij} 叫做行列式的元素，其第一个下标 i 表示这个元素位于式(1.3)左边行列式记号中的第 i 行，称 i 为行标；其第二个下标 j 表示这个元素位于式(1.3)左边行列式记号中的第 j 列，称 j 为列标。

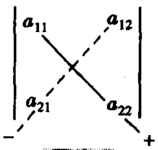


图 1.1

利用对角线法则(图 1.1)，很方便地记忆二阶行列式的计算公式(1.3)，图中用实线连接的两个元素的乘积减去用虚线连接的两个元素的乘积即为二阶行列式的值。

利用二阶行列式，线性方程组(1.1)的解，即式(1.2)的分子可分别表示为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是，关于线性方程组(1.1)的解的结论就可以叙述为：

如果线性方程组(1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组(1.1)有惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2)$ 是把系数行列式 D 中的第 j 列换成方程组(1.1)等号右边的常数项 b_1,b_2 后所得到的二阶行列式。

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases}$$

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2\times 2-(-3)\times 1=7\neq 0$$

所以方程组有惟一解，又

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -6 & 2\end{vmatrix}=-14,\ D_2=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -6\end{vmatrix}=-14$$

故方程组的惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{7}=-2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{7}=-2$$

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{1.4}$$

引入三阶行列式如下

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.5}$$

用消去法解式(1.4)，可得出与二元线性方程组(1.1)相类似的结果，即：如果线性方程组(1.4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$$

则线性方程组(1.4)有惟一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 j 列换成方程组(1.4)等号右边的常数项 b_1,b_2,b_3 后所得到的三阶行列式。

可见，二阶、三阶行列式的引入，能将二元、三元线性方程组的求解公式很简洁地表示出来。

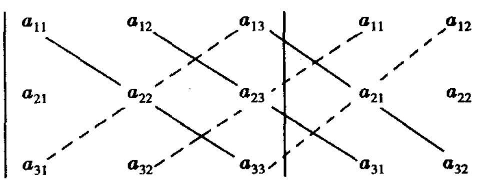


图 1.2

同样，利用对角线法则(图 1.2)，也将很方便地记忆三阶行列式的计算公式

(1.5)，其中用实线连接的 3 个元素乘积取正号，用虚线连接的三个元素乘积取负号，然后加起来就是三阶行列式的值。

例 1.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按对角线法则有

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2)-1\times1\times3=-23$$

例 1.3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}=a\times(-1)\times a-1\times(-1)\times4=4-a^2$

而 $4-a^2>0$ 的充分必要条件是 $|a|<2$，因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$$

的充分必要条件是 $|a|<2$。

从以上讨论可以看出，利用二阶、三阶行列式可以很方便地求解二元、三元线性方程组，但在实际应用中，遇到的方程组的未知元常常多于 3 个，而且在某些理论研究上也需要讨论 n 个未知元的线性方程组的求解问题。这样，要把二阶、三阶行列式加以推广，引入 n 阶行列式的概念。

1.1.2 n 阶行列式的定义

1. 排列及其性质

作为定义 n 阶行列式的准备，先介绍排列及其性质。

定义 1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列。

例如，3412 及 2431 都是 4 元排列，43251 是一个 5 元排列。又如，123，132，

213,231,312,321 是全部的 6 个 3 元排列。

易知,n 元排列总共有 $n!$ 个,n 元排列常记为 $i_1i_2\cdots i_n$。在 n 元排列 $12\cdots n$ 中,数字按从小到大的顺序排列,而其他的排列中都或多或少地出现数字大小与排列顺序不一致的情形。

定义 1.2 在一个排列中,如果一个大的数排在一个小的数的前面,就称这一对数构成一个逆序。一个排列中的逆序的总数称为这个排列的逆序数。用 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$表示排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数。逆序数是偶数的排列称为偶排列,逆序数是奇数的排列称为奇排列。

例如,在 5 元排列 43251 中,共有 43,42,41,32,31,21,51 这 7 个逆序,故 $\tau(43251)=7$,排列 43251 是奇排列。

又因 $\tau(12\cdots n)=0$,故排列 $12\cdots n$ 是偶排列。

由 1,2,3 组成的所有 3 元排列的情况如表 1.1。

表 1.1

排　列	逆　序	逆 序 数	排列的奇偶性
123	无	0	偶排列
132	32	1	奇排列
213	21	1	奇排列
231	21,31	2	偶排列
312	31,32	2	偶排列
321	21,31,32	3	奇排列

把一个排列中某两个数 i,j 的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这样的一个变换称为对换,记为(i,j)。

例如,5 元排列 43251 经过 2,5 这两个数的对换,就变成排列 43521,容易计算 $\tau(43521)=8$。说明奇排列 43251 经过一次对换后变成偶排列43521。

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性。即经过一次对换,偶排列变成奇排列,奇排列变成偶排列。

证明 先证相邻对换的情形。设排列

$$\cdots ij\cdots \tag{1.6}$$

经过 i,j 对换变成

$$\cdots ji\cdots \tag{1.7}$$

这里"…"表示那些不动的数。显然在排列式(1.6)与式(1.7)中,这些数之间的逆序的情况是一致的,又 i 或 j 与这些数所构成逆序的情况也是一致的。不同

的只是i,j的次序。如果$i<j$，那么式(1.7)比式(1.6)多一个逆序；如果$i>j$，那么(1.7)比(1.6)少一个逆序。因此，排列式(1.6)与式(1.7)奇偶性相反。

再证一般对换的情形。设排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1.8}$$

经过 i,j 对换变成

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1.9}$$

显然，这样一个对换可以通过一系列的相邻对换来实现：在排列式(1.8)中，先用 i 与它右邻的元素连续做 $s+1$ 次相邻对换，即得排列

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots \tag{1.10}$$

然后，在排列式(1.10)中，再用 j 与它左邻的元素连续做 s 次相邻对换，即得排列式(1.9)。这样，排列式(1.8)经过 $2s+1$ 次(奇数次)相邻对换就得到排列式(1.9)，由于相邻对换都改变排列的奇偶性，奇数次相邻对换就改变了排列的奇偶性。证毕。

由定理1.1，很容易得到以下两个推论，证明留给读者。

推论1 在全部 n 元排列中，奇、偶排列各占一半，即都是$\frac{n!}{2}$个($n\geqslant 2$)。

例如，在全部6个3元排列中，有3个偶排列为：123，231，312；有3个奇排列为：132，213，321。

推论2 任意一个 n 元排列与自然序排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性。

例如，$43215 \xrightarrow{(4,1)} 13245 \xrightarrow{(3,2)} 12345$。所作对换次数2与$\tau(43215)=6$都是偶数。

2. n阶行列式的定义

下面通过观察和分析二阶、三阶行列式所具有的特点，并加以推广，从而引进 n 阶行列式的定义。

由于二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

它们都是一些项的代数和。下面来考察一下这些代数和中各项的构成以及各项前所带的正负号的确定有什么规律性。以三阶行列式为例,不难发现三阶行列式具有如下特点:

①三阶行列式是所有取自行列式记号中不同行、不同列的 3 个元素乘积的代数和;任意一个乘积项可表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中行标形成一个三元自然序排列,列标形成一个三元排列 $j_1j_2j_3$。当 $j_1j_2j_3$ 取遍所有三元排列时,恰好得出三阶行列式展开式(1.5)中的所有项,共有3! = 6 项。

②项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 所带的符号是这样确定的:当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时,该项带正号;当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时,该项带负号。

根据观察到的这些特点,二阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三元排列求和。

类似地,二阶行列式的展开式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有三元排列求和。

按照上面分析,可定义 n 阶行列式如下:

定义 1.3 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

等于所有取自式(1.11)不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.12}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列,每一项式(1.12)都按如下规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,式(1.12)带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,式(1.12)带负号,这样 n 阶行列式定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (1.13)$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和。由于 n 元排列共有 $n!$ 个，因此，式(1.13)的右边是 $n!$ 项的代数和。式(1.13)称为 n 阶行列式按行标的展开式。

一阶行列式 $|a|$ 就是 a；行列式(1.11)有时也简记为 $|a_{ij}|$。

定义 1.3 表明，为了计算 n 阶行列式，首先要做出所有可能的由位于不同行不同列的 n 个元素的乘积，并把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序，然后根据列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号，最后计算出代数和的值。

例 1.4 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解 四阶行列式的展开式中应该含有 $4!=24$ 个乘积项，但注意到在一个乘积项中只要有一个元素为零，那么这乘积项的值为零。容易看出，在要计算的行列式中，不等于零的乘积项只有 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 这一项，而 $\tau(2134)=1$，这一项的符号应为负。于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = -120$$

例 1.5 计算上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 在展开式中，行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

显然，不为零的项中必有 $j_n=n$，而 j_{n-1} 可取 n 或 $n-1$，但 $j_n \neq j_{n-1}$，因此 $j_{n-1}=n-1$，依此类推，可得 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_2=2,j_1=1$，即展开式中不为零的项只有

$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，而 $\tau(12\cdots n)=0$，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在 n 阶行列式(1.11)中，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为行列式的对角线元素，它们所在的对角线叫做主对角线。以上例子说明上三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积。

作为上三角行列式的特殊情形，对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n$$

同理可证明下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在行列式的定义中，为了确定每一项的符号，把项中 n 个元素的行标按自然顺序排列，由于数的乘法满足交换律，因而这 n 个元素的次序可以是任意的，一般地，n 阶行列式的一项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.14}$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 元排列。不难证明式(1.14)的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} \tag{1.15}$$

事实上，为了根据定义来确定式(1.14)的符号，就要把这 n 个元素重新排列使得它们的行标成自然顺序，也就是排成

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} \tag{1.16}$$

于是它的符号是

$$(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)} \tag{1.17}$$

现在来证明式(1.15)和式(1.17)是一致的。我们知道，由式(1.14)变到式(1.16)可以经过一系列元素的对换来实现。每做一次对换，元素的行标和列标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 就都同时做一次对换，也就是说，逆序数 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，因而它们的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

的奇偶性不变。因此，在一系列对换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)} = (-1)^{\tau(k_1 k_2 \cdots k_n)}$$

即式(1.15)与式(1.17)是一致的。

定理 1.2　n 阶行列式(1.11)的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 元排列。

例如，$a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 是 4 阶行列式中的一项，$\tau(2314)=2$，$\tau(1243)=1$，于是它的符号应为 $(-1)^{2+1}=-1$，如按行指标排列起来，就是 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$，$\tau(4123)=3$，因而它的符号也是 $(-1)^3=-1$。

按定理 1.2 来决定行列式中每一项的符号的好处在于，行指标与列指标的地位是对称的。因而为了决定每一项的符号，同样可以把每一项的列指标按自然顺序排起来，于是得到 n 阶行列式定义的另一种表示法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \qquad (1.18)$$

式(1.18)也叫做 n 阶行列式按列标的展开式。

1.2　行列式的性质

行列式的计算问题是一个很重要的问题，但当行列式的阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式是很麻烦的。为了简化行列式的计算，这一节讨论行列式的性质，要指出的是，这些性质不仅是为了简化行列式的计算，而且对行列式的理论研究及应用也是很重要的。

1.2.1　行列式的性质

设 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将行列式 D 的行与列互换，所得到的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的转置行列式，记为 D^T，即

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^T 相等。

证明 在行列式 D^T 中，元素 a_{ij} 位于第 j 行第 i 列，即 i 是它的列标，j 是它的行标，因而，将 D^T 按列标的展开式为

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这恰好是行列式 D 按行标的展开式。所以，$D^T=D$。证毕。

性质 1 表明，行列式中行与列的地位是同等的，因而凡是有关行的性质，对列也成立。所以，下面提到的行列式的性质大多数是对行而言的，对列也有相同的性质，在此就不重复了。

性质 2 交换行列式的两行，行列式的值变号。

证明 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行，得到行列式