

研究生教学用书

· 部委“九五”重点教材 ·

高等流体力学



Gao Deng

Liu Ti

Li Xue

王献孚 熊鳌魁 编著

华中科技大学出版社

高等流体力学

王献孚 熊鳌魁 编著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等流体力学/王献孚 熊鳌魁 编著
武汉:华中科技大学出版社, 2003年2月
ISBN 7-5609-2892-7

I. 高…

Ⅱ. ①王… ②熊…

Ⅲ. 流体力学-高等学校-教材

N. O35

高等流体力学

王献孚 熊鳌魁 编著

责任编辑:李 德

封面设计:潘 群

责任校对:张兴田

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司

印 刷:武汉首壹印刷厂

开本:787×960 1/16

印张:18.5

字数:327 000

版次:2003年2月第1版

印次:2003年2月第1次印刷

印数:1—1 500

ISBN 7-5609-2892-7/O · 276

定价:23.80 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是为船舶与海洋工程专业研究生编写的流体力学课程的教科书,它在大学本科教材的基础上,对有关问题做了高一层次的分析,以满足现代船舶流体力学研究对基础流体力学的需求。

全书着重阐述流体力学基本理论体系,在强调基础理论的完整性的同时,兼顾了后续专业课程和研究工作中的要求。内容包括:流体力学基础,流体运动学和旋涡运动理论,流体动力学基本方程式,势流理论,自由表面效应,工程湍流模拟等六章。

本书在内容取舍、体例安排上都力求精炼和注意应用,在理论表述上深入浅出,推理清楚,物理概念明确,通过学习能有效地提高读者的理论修养。书中设计的习题和复习思考题具有典型性和启发性,可以引导读者对内容的深入理解,并有利于自学。

本书是一本起点高、观点新的流体力学教材,除可作为本专业研究生教科书外,还可作为有关专业教师、研究人员和广大工程技术人员的参考用书。

作者的话

本书是根据全国高校船舶类教材委员会对全国高校船舶专业“九五”重点教材立项的选题编写的。

“高等流体力学”作为船舶工程、船舶流体力学学科研究生的一门基础学位课程，它在船舶工程专业本科“流体力学”教材基础上，为反映当代船舶流体力学研究对基础流体力学的需求，对流体力学基本理论和方法作高一层次的分析。本教材虽然密切注意到专业应用的需要，但强调的仍是基础理论的学习，不扩大到更多专业问题的具体应用，它在培养研究生的教学中的地位是属于一门基础课程。

基于以上考虑，虽然已出版有“流体力学”方面的多种专著，但有的篇幅过大、范围过广、专业针对性不强，作为教材在使用中都感到有颇多的不足之处。为适应本学科进一步发展的需要，出版一本有专业针对性的“高等流体力学”研究生用书，在全国高校船舶类专业师生中已有共识，从而有了本书的出版。

本书的宗旨，不同于一般的理论流体力学，但亦不代替船舶流体力学。本教材的主要任务是使学生对流体力学理论有进一步提高和更深入的掌握，为进一步学习船舶流体力学专业问题（船舶粘性阻力理论，船舶兴波阻力理论，波浪与海洋结构物相互作用理论，船舶推进螺旋桨理论，计算船舶流体力学，船用翼理论、船舶操纵性理论等等）打下坚实的基础。

全书分六章：第一章流体力学基础，作为学习本课程的一些基础，包括中级流体力学内容复习，矢量场论公式，笛卡儿张量简介等等，仅供查阅。第二章流体运动学和旋涡运动理论；第三章流体动力学基本方程；第四章势流理论；第五章自由表面效应，包括气泡动力学、水翼空化理论基础以及水波理论等；第六章工程湍流模拟。在第二章到第六章中，每章都附有习题和复习思考题。考虑到本课程学习的首要任务是理论的掌握和理解，因此安排的习题没有较大的难度，数量也不很多（70题）。复习思考题的目的仅供对部分内容做复习参考，从中可获得一定的启发。

全书按70学时教学内容编写，对60学时和40学时的课程，需适当减少一些章节。本书初稿曾在原武汉交通科技大学船舶流体力学专业研究生中讲授过两次，学生

接受情况良好。

上海交通大学缪国平教授主审了本书的正式书稿,提出了许多宝贵意见,并写了序言,使本书质量有进一步提高,特此致以衷心的感谢。

本书除可供船舶工程和海洋工程专业研究生做教材外,其他相关专业的师生和工程科技人员均可作为参考用书。

本书第六章由熊鳌魁博士撰写,其他各章均由王献孚主笔,限于作者水平,难免还有错误和不妥之处,恳请使用本书的教师和读者随时赐教。

作者

武汉理工大学

2002.10

序 言

气、液、固物态三相中,流体就占了两相。作为研究流体的运动规律及其与物体相互作用的机理的一门专门学科,流体力学涉及范围之广及其在相关的自然科学和工程技术领域中的重要性自不待言。

王献孚教授等人编著的“高等流体力学”一书属全国高校船舶专业“九五”重点教材选题之一,是面向特定专业范围的基础理论方面高起点的教科书。旨在使船舶与海洋工程专业的研究生在已经掌握一定的流体力学知识的基础上,进一步在理论修养上得到提高,从而为后续专业课程学习和研究工作开展打下坚实的理论基础。

著书固难,编著教材则别有一番难处,尤其是“流体力学”这一类面对特定专业范围的基础理论方面的教材。对应的专业方向各不相同,偏理偏工大相径庭,既要考虑到基础理论体系的完整性,也必须兼顾后续专业课程的需要、学生知识面的拓宽和学科最新的发展,又有教学时数的限制。教材内容编排取舍之际,学识、经验、悟性缺一不可;见仁见智,每现匠心,显示出编著者对学科的独立见解。

王献孚教授执教40余年,可谓桃李遍天下;在船舶流体力学的相关研究领域中有建树,著述甚丰。今挟数十年从事船舶工程教学、科研之经验,厚积薄发,精心编著了本书。全书选材削枝强干,举凡六章,容量适中。第一章为基础流体力学若干知识的回顾,后续各章偏重于对流体力学基本理论体系的阐述;在粘性流体力学方面,考虑到后续专业课程的需要和本专业研究范围的特点,强调了湍流的工程模拟。理论表述上深入浅出,推理层次分明,物理概念清晰,对提高研究生的理论修养颇有助益。书中习题和复习题的设计有典型性和启发性,能引导学生对教学内容作深层次的思考和理解,也有利于学生复习和在教师指导下自学。总体上看,本教材既注意到后续专业课程和研究工作中的需要,也强调了基础理论的完整性,适合于本专业或相近专业的研究生使用;对有关专业的教师 and 研究人员来说,也是一本很好的参考用书。

任何一本教材均不可能包罗万象,面面俱到。“迷时师度,悟时自度”,苟能不拘一句一式,融会贯通,必可举一反三,达到无滞无碍的圆通境界;否则,虽多诵经,不解何意。

愿本书的出版在提高研究生培养质量上发挥其应有的作用。

蒙王献孚教授抬爱,嘱我作序,当之有愧,却之不恭。有感而发,聊充序言。

上海交通大学
缪国平 谨识

目 录

第一章 流体力学基础	(1)
§ 1-1 高斯定理	(1)
§ 1-2 雷诺输运定理和流体运动方程	(4)
§ 1-3 斯托克斯(Stokes)定理	(8)
§ 1-4 平面势流·复势	(11)
§ 1-5 伯拉西斯定理	(15)
§ 1-6 保角变换方法的应用	(18)
§ 1-7 无旋流动的空间源场和偶极子场	(21)
§ 1-8 格林定理	(24)
§ 1-9 二维水波速度势基本解	(27)
§ 1-10 常用的一些矢量运算公式	(31)
§ 1-11 笛卡儿张量	(33)
 第二章 流体运动学和旋涡运动理论	(39)
§ 2-1 描述流体运动两种方法的讨论	(39)
§ 2-2 流函数及其性质	(44)
§ 2-3 流体微团运动分析	(51)
§ 2-4 无旋运动速度势及其特性	(56)
§ 2-5 旋涡运动的基本特性和定理	(63)
§ 2-6 由速度散度场(源场)和涡量场确定速度场	(70)
§ 2-7 涡环及涡对冲量	(75)
§ 2-8 涡层和涡层的不稳定性	(78)
习题	(81)
复习思考题	(82)
 第三章 流体动力学基本方程	(84)
§ 3-1 流体本构方程	(84)
§ 3-2 质量守恒方程(连续性方程)	(86)
§ 3-3 动量守恒方程(欧拉/N-S 方程)	(90)
§ 3-4 能量方程	(93)

§ 3-5	统一的流体动力学方程组·初始条件和边界条件	(96)
§ 3-6	无量纲形式流体动力学基本方程·相似准则	(99)
§ 3-7	特殊坐标系中流体动力学基本方程	(104)
§ 3-8	不同层次简化的流体动力学诸方程	(111)
§ 3-9	不可压缩粘性流动的若干精确解	(117)
§ 3-10	任意曲线坐标系流体力学诸方程	(125)
§ 3-11	非正交曲线坐标系流体力学诸方程	(134)
习题		(139)
复习思考题		(143)
第四章 势流理论 (145)		
§ 4-1	二维势流的复势	(145)
§ 4-2	平壁面镜像和圆柱面镜像	(151)
§ 4-3	保角变换方法的应用	(156)
§ 4-4	伯拉休斯定理和拉加利定理	(164)
§ 4-5	柱体运动的复势	(171)
§ 4-6	在理想流体中运动的二维柱体上作用力及附加质量	(176)
§ 4-7	三维势流基本解及叠加	(183)
§ 4-8	球定理(球面镜像)	(189)
§ 4-9	物体在无界流体中做任意运动时的受力及附加质量计算	(194)
§ 4-10	三维拉加利定理	(200)
习题		(204)
复习思考题		(207)
第五章 自由表面效应 (209)		
§ 5-1	气泡动力学	(209)
§ 5-2	水翼空化绕流的理论解	(215)
§ 5-3	水波的基本方程及自由表面边界条件	(221)
§ 5-4	理想流体水波运动的基本解	(227)
§ 5-5	两种液体分界面上表面波	(231)
§ 5-6	自由表面下二维奇点移动的复势	(236)
§ 5-7	自由表面下三维移动奇点的速度势	(241)
§ 5-8	水波绕射、辐射及脉动源速度势的基本解	(246)
§ 5-9	在波浪中船舶运动的一些基本概念	(251)
习题		(255)

复习思考题	(256)
第六章 工程湍流模拟	(258)
§ 6-1 湍流现象及其描述方法	(258)
§ 6-2 湍流统计理论基础	(261)
§ 6-3 雷诺运动方程及雷诺应力输运方程	(266)
§ 6-4 湍流场中的能量方程及湍能耗散率方程	(269)
§ 6-5 零方程模式	(270)
§ 6-6 一方程模式及二方程模式	(271)
§ 6-7 近壁湍流的模拟	(274)
§ 6-8 雷诺应力方程模型(RTM)及代数应力模型(ATM)	(276)
§ 6-9 模式理论小结	(279)
习题	(280)
复习思考题	(281)
参考书目	(282)

第一章 流体力学基础

本章叙述在以后各章节中要用到的一些基础流体力学的结论,假定读者都已学过了,为便于复习和应用,对所引述的有关内容作简要的介绍。

§ 1-1 高斯定理

速度矢量 $\mathbf{v}$ 的散度 $\text{div} \mathbf{v}$ (相对体积膨胀率) 的定义:

$$\text{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Delta A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA \quad (1-1)$$

式中, ΔA 为微元体积 $\Delta \tau$ 的表面积; $\mathbf{n}$ 为 ΔA 上外法向单位矢量。 $\text{div} \mathbf{v}$ 的物理意义为单位时间内通过封闭表面的流体体积与该封闭表面所包围的体积之比值, 当体积缩小到一点时的极限值。因为 $\Delta \tau$ 的形状是任意的, 将它取为直角坐标系中微元平行六面体体积 $\Delta x \Delta y \Delta z$, 如图 1-1 所示, 并在其六个边界平面上示出速度分量 $\mathbf{v}(u, v, w)$ 之间关系。直接对指定的六面体计算定义式 (1-1) 右边的曲面积分, 忽略高阶小量后, 即有

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} & \left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - u \Delta y \Delta z + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \right. \\ & \left. - v \Delta x \Delta z + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - w \Delta x \Delta y \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-2) \end{aligned}$$

引入算符 ∇ (读 nabra) 在直角坐标系中的定义式:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-3)$$

故有

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-4)$$

按照式 (1-1), 对微元体积 $\Delta \tau$ 有

$$\int_{\Delta A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \Delta \tau \quad (1-5)$$

若将任意有限体积 τ 分为大量小体积 $\Delta \tau$, 并以 A 表示包围 τ 的表面积, 对式 (1-5) 求和。由于沿两个相邻小体积的公共边界上外法线方向 $\mathbf{n}$ 的符号相反, 求和时就彼此相互抵消, 剩下的

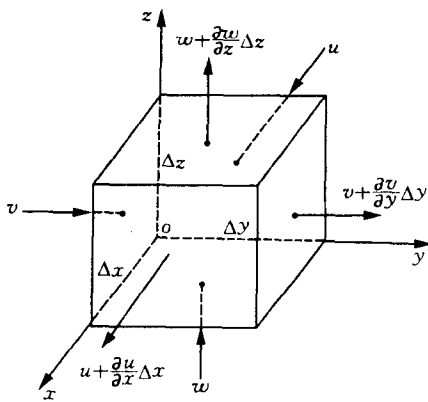


图 1-1 微元平行六面体上流体速度通量

只有沿体积 τ 的表面外部的面积分, 因此就有如下积分公式成立:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dA = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau \quad (1-6)$$

此即高斯散度定理。注意式中 $\mathbf{n}$ 定义为区域 τ 边界的外法线单位矢量。若 $\mathbf{n}$ 定义为区域 τ 边界的内法线单位矢量, 则要将等式 (1-6) 的一端加一个负号。高斯散度定理中的 $\mathbf{v}$ 若为常量, 则 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, 且 $\mathbf{v}$ 可以提到面积分号之外, 此时高斯散度定理便退化为对任意封闭曲面都成立的如下几何关系式

$$\int_A \mathbf{n} dA = 0 \quad (1-7)$$

利用标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 梯度的定义式

$$\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1-8)$$

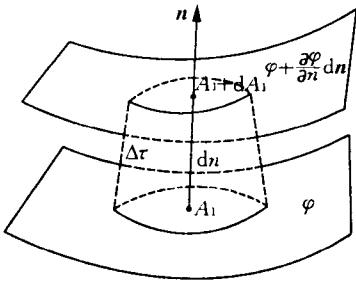


图 1-2 两个相邻等位面之间流体小体积 $\Delta\tau$

考察两个相邻等位面 φ 和 $\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial n} dn$ 之间 (距离为 dn) 所截取的任一小体积 $\Delta\tau$, 其表面积为 ΔA , 如图 1-2 所示, $\mathbf{n}$ 为等位面上外法线单位矢量, 计算包围 $\Delta\tau$ 的曲面的面积分 $\int_{\Delta A} \mathbf{n}' \varphi dA$ 。式中 $\mathbf{n}'$ 是整个积分曲面的外法线单位矢量, 曲面面积 ΔA 包括该柱体截面积 A_1 和 $A_1 + dA_1$ 以及侧面积之和。

忽略高阶小量, 在侧面上的 φ 值可以认为是常数, 故有

$$\begin{aligned} \int_{\Delta A} \mathbf{n}' \varphi dA &= -\mathbf{n} \varphi A_1 + \mathbf{n} \left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial n} dn \right) (A_1 + dA_1) + \int_{\text{侧面}} \mathbf{n}' \varphi dA \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n} A_1 dn + \varphi (n dA_1 + \int_{\text{侧面}} \mathbf{n}' dA) \end{aligned} \quad (1-9)$$

因为

$$\int_{\Delta A} \mathbf{n}' dA = -\mathbf{n} A_1 + \mathbf{n} (A_1 + dA_1) + \int_{\text{侧面}} \mathbf{n}' dA = 0$$

将这一关系式代入式 (1-9), 则有

$$\int \mathbf{n}' \varphi dA = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n} A_1 dn = \nabla \varphi \cdot \nabla \tau$$

由此可以得到标量函数梯度的积分表达式

$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta A} \mathbf{n} \varphi dA \quad (1-10)$$

类似于高斯散度定理, 可将式 (1-10) 推广到任意有限体积 τ 和 τ 的表面积 A , 获得高斯梯度定理为

$$\int_A \mathbf{n} \varphi dA = \int_\tau \nabla \varphi d\tau \quad (1-11)$$

此处 $\mathbf{n}$ 指积分曲面外法向单位矢量。在直角坐标系中, 高斯梯度定理的分量形式又可写为

$$\begin{aligned} \int_A n_x \varphi dA &= \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau, \\ \int_A n_y \varphi dA &= \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\tau, \\ \int_A n_z \varphi dA &= \int_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\tau \end{aligned} \quad (1-12)$$

式中, (n_x, n_y, n_z) 是 $\mathbf{n}$ 的方向数。

利用速度矢量 $\mathbf{v}(u, v, w)$ 的旋度 Ω 的定义式

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v} = \text{rot} \mathbf{v} \quad (1-13)$$

在直角坐标中展开为

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1-14)$$

考虑微元平行六面体 $\Delta x \Delta y \Delta z$ (图 1-3) 的下列面积为

$$\begin{aligned} \int_{\Delta A} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dA &= \left[-(\mathbf{i} \times \mathbf{v}) + \mathbf{i} \times \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z \\ &\quad + \left[-(\mathbf{j} \times \mathbf{v}) + \mathbf{j} \times \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \Delta y \right) \right] \Delta x \Delta z \\ &\quad + \left[-(\mathbf{k} \times \mathbf{v}) + \mathbf{k} \times \left(\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Delta z \right) \right] \Delta x \Delta y \\ &= \left[\left(\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) + \left(\mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) + \left(\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

因 $\mathbf{v} = iu + jv + kw$, $\mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{k} - \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{j}$; $\mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{k} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{i}$; $\mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{j} - \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{i}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_{\Delta A} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dA &= \left[\mathbf{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= (\nabla \times \mathbf{v}) d\tau \end{aligned} \quad (1-15)$$

由此可得到速度矢量旋度的积分定义式

$$\nabla \times \mathbf{v} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \tau} \int_{\Delta A} \mathbf{n} \times \mathbf{v} dA \quad (1-16)$$

类似于推导高斯散度定理, 将式(1-16)推广到任意有限体积 τ 和由 τ 所包围的表面积 A , 获得高斯旋度定理为

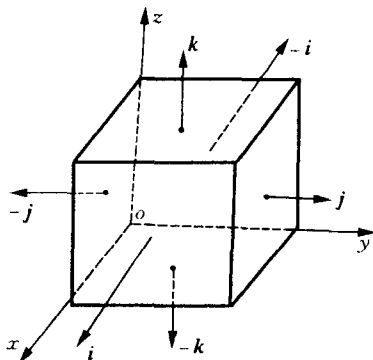


图 1-3 微元平行六面体表面上外法向矢量

$$\int_A \mathbf{n} \times \mathbf{v} dA = \int_{\tau} \nabla \times \mathbf{v} d\tau \quad (1-17)$$

高斯定理包括高斯散度定理、高斯梯度定理和高斯旋度定理,可统一表示为:令 X 是体积 τ 内和包围体积 τ 的表面积 A 上某一标量函数或矢量函数,由高斯定理得出

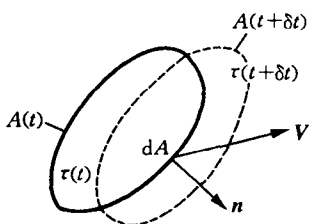
$$\int_{\tau} (\nabla \cdot X) d\tau = \int_A \mathbf{n} X dA \quad (1-18)$$

式中, $\mathbf{n}$ 为表面积 A 上外法线单位矢量。如令 $X = \varphi$ (标量函数), 则有梯度形式高斯定理式(1-11); 如令 $X = \mathbf{v}$ (矢量函数), 则有散度形式高斯定理式(1-6); 如令 $X = \mathbf{xv}$, 则为旋度形式的高斯定理式(1-17)。这里只指出, 当 X 为张量, 以上张量形式的高斯定理亦成立。

高斯定理在流体力学公式推导中有广泛的应用。

§ 1-2 雷诺输运定理和流体运动方程

考虑流体中某体积 $\tau(t)$ 及其表面积 $A(t)$, 它们以瞬时速度 $\mathbf{V}$ 在流体中移动, 如图 1-4 所示, $\tau(t)$ 和 $A(t)$ 在空间中位置和大小均随时间 t 而变化。



对任一流场量 $f(x, y, z, t)$, 著名的雷诺输运定理指出:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau(t)} f(x, y, z, t) d\tau &= \int_{\tau(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{V}) \right] d\tau \\ &= \int_{\tau(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \int_{A(t)} f\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \end{aligned} \quad (1-19)$$

图 1-4 流体某体积 $\tau(t)$ 在运动过程中变化

该定理可简要证明如下。考虑时间增量 δt 后 $\tau(t)$ 和 $A(t)$

的变化, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int f(x, y, z, t) d\tau &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\tau(t+\delta t)} f(x, y, z, t+\delta t) d\tau - \int_{\tau(t)} f(x, y, z, t) d\tau \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\tau} f(x, y, z, t+\delta t) d\tau - \int_{\tau} f(x, y, z, t) d\tau \right] \\ &\quad + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\Delta\tau} f(x, y, z, t+\delta t) d\tau \end{aligned} \quad (1-20)$$

对于很小的时间增量, 利用如下级数展开式后

$$f(x, y, z, t+\delta t) = f(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, z, t) \delta t$$

$$\int_{\tau} f(x, y, z, t+\delta t) d\tau = \int_{\tau} f(x, y, z, t) d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\tau} f(x, y, z, t) d\tau \right) \delta t$$

所以

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int_{\tau} f(x, y, z, t + \delta t) d\tau - \int_{\tau} f(x, y, z, t) d\tau \right] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} f(x, y, z, t) d\tau \quad (1-21)$$

注意到式(1-20)右端第二项中体积增量 $\Delta\tau$,由图1-4所示可知

$$\Delta\tau = \int_A \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \delta t dA \quad (1-22)$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_{\Delta\tau} f(x, y, z, t + \delta t) d\tau = \int_A f \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA \quad (1-23)$$

将式(1-21)和(1-23)代入式(1-20)后,并应用高斯散度定理,即得广义雷诺输运定理式(1-19)。当 $\mathbf{V}=\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ 为流体质点瞬时速度矢量,即有通常的雷诺输运定理:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\tau(t)} f(x, y, z, t) d\tau = \int_{\tau(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \int_{A(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\tau(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{v}) \right] d\tau \quad (1-24)$$

其中 $\tau(t)$ 和 $A(t)$ 则为随流体移动的物质体积和其表面积。

雷诺输运定理对流场建立了拉格朗日研究方法与欧拉研究方法之间的关系,它在流体力学研究中许多重要应用。如流体质量守恒定律应满足如下关系式

$$\frac{D}{Dt} \int_{\tau(t)} \rho(x, y, z, t) d\tau = 0 \quad (1-25)$$

式中, $\rho(x, y, z, t)$ 为流体密度。应用雷诺输运定理,便可写出质量守恒方程的积分形式:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_A \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (1-26)$$

通过高斯散度定理的应用,即可得流体质量守恒的微分形式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1-27)$$

将式(1-27)展开合并还可写成另一形式为

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1-28)$$

对不可压缩流体, $\frac{D\rho}{Dt}=0$,质量守恒方程即连续性方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1-29)$$

在研究流体运动的动量守恒方程时,如任取流体体积 τ ,其表面积为 A 。设流体质点速度矢量 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$,其分量形式 $\mathbf{v}(u, v, w)$ 或 $v_i (i=1, 2, 3)$,考虑在体积 τ 内流体动量 $\int_{\tau} \mathbf{v} \rho d\tau$ 的变化率:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \mathbf{v} \rho d\tau \quad \text{或} \quad \frac{d}{dt} \int_{\tau} v_i \rho d\tau, \quad i = 1, 2, 3$$

因流体中质量守恒,故

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} v_i \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{dv_i}{dt} \rho d\tau \quad \text{或} \quad \frac{d}{dt} \int_{\tau} v_i \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{dv_i}{dt} \rho d\tau$$

设作用于单位质量流体的质量力矢以 F 表示(或以分量形式表示为 $F_i, i=1, 2, 3$), 则作用于流体体积 τ 上总的质量力为

$$\int_{\tau} F_i \rho d\tau \quad \text{或} \quad \int_{\tau} F_i \rho d\tau, \quad i=1, 2, 3$$

设作用于该流体 τ 所包围的表面面积基元 dA 上(其外法向单位矢量记以 n , 或 n_j , $j=1, 2, 3$) 在 i 方向表面应力记以 $\sigma_{ji} \cdot n_j dA$ (重复哑指标 j 为求和约定), 其中 σ_{ji} 为应力张量, 则作用于流体体积 τ 上表面力的合力为 $\int_A \sigma_{ji} n_j dA$ 。根据高斯梯度定理有

$$\int_A \sigma_{ji} n_j dA = \int_{\tau} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\tau$$

则动量守恒方程便可写为

$$\int_{\tau} \frac{dv_i}{dt} \rho d\tau = \int_{\tau} F_i \rho d\tau + \int_{\tau} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\tau \quad (1-30)$$

或

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} v_i \rho d\tau = \int_{\tau} F_i \rho d\tau + \int_A \sigma_{ji} n_j dA \quad (1-31)$$

对式(1-31)应用雷诺输运定理, 可得

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} d\tau + \int_A \rho v_i v_j n_j dA = \int_{\tau} F_i \rho d\tau + \int_A \sigma_{ji} n_j dA \quad (1-32)$$

这个方程的物理意义很清楚, 左端表示 τ 内流体在 i 方向动量增量, 右端表示作用于该流体中质量力和表面力的合力。

由式(1-30)还可立即写出应力形式的动量守恒微分方程

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (1-33)$$

在无粘性流中应力张量 σ_{ij} 为

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ -p, & i = j \end{cases} \quad (1-34)$$

其中压力 p 指向为流体边界面的内法向, 与 σ_{ji} 指向相反, 故对无粘性流体运动方程即有

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i=1, 2, 3 \quad (1-35)$$

或

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \nabla p \quad (1-36)$$

此即所熟知的欧拉(Euler)运动微分方程式。根据物质导数和矢量恒等式:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \quad (1-37)$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} |v|^2 \right) - v \times (\nabla \times v) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |v|^2 - v \times \Omega\end{aligned}\quad (1-38)$$

则欧拉运动微分方程又可写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |v|^2 - v \times \Omega = F - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1-39)$$

对无旋流动 $\Omega=0$, 存在速度势函数 $\phi(x, y, z, t)$, 并有 $v = \nabla \phi$ 。对有势力场, 存在力势函数 $u(x, y, z)$, 并有 $F = \nabla u$ 。对正压流体 (密度 ρ 仅是压力 p 的函数), 如令 $P(p)$ 定义

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho} \quad (1-40)$$

$$\nabla p = \frac{dp}{dP} \nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \int \frac{dp}{\rho} \quad (1-41)$$

故在无旋正压和有势力场中, 式(1-39)可写为

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |v|^2 - U + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0 \quad (1-42)$$

即得无旋流伯努利方程 (又称拉格朗日积分) 为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |v|^2 - U + \int \frac{dp}{\rho} = C(t) \quad (1-43)$$

式中, 积分常数 C 是时间的函数。对不可压缩等密度流体, ρ 为常数, 以及在重力场中 $U = -gz$, 则伯努利方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho |v|^2 + gz + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (1-44)$$

定常流中伯努利方程即为

$$\frac{1}{2} \rho |v|^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (1-45)$$

我们知道, 即使流动不是无旋, 也可推出伯努利方程在流线上成立的相同形式。对定常流不可压缩流体和重力场中, 沿流线 s 方向欧拉运动微分方程可写为

$$v \frac{\partial v}{\partial s} = -g_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (1-46)$$

式中, g_s 是重力加速度 g 沿流线方向的分量。将式(1-46)积分可得沿流线上伯努利方程:

$$\frac{1}{2} |v|^2 + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数} \quad (1-47)$$

这里的常数与所选的流线有关。