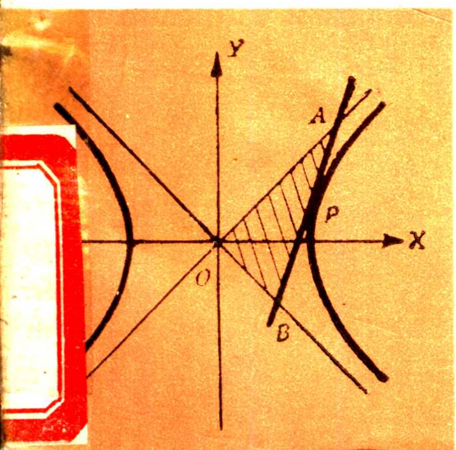
平面解析几何
解题思路与范例分析

汪良材
蔡永芳
吴在秩
何履端
编著



福建人民出版社

平面解析几何
解题思路与范例分析

汪良材　蔡永芳
吴在秩　何履端　编著

平面解析几何

解题思路与范例分析

汪良材、蔡永芳、吴在秩、何履端　编著

●

福建人民出版社出版

（福州得贵巷27号）

福建省新华书店发行

晋江地区印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　7.625印张　155千字

1980年12月第1版

1982年7月第2次印刷

印数：35,001—52,070

书号：7173·419　　定价：0.55元

前　言

平面解析几何研究的主要对象是变量和变化的图形。它是在坐标概念的基础上，用代数的方法，来研究几何图形的一门数学分科。平面解析几何是目前中学数学课程的重要组成部分，也是学习高等数学的出发点。

在本书中，我们参照全日制十年制学校中学数学教学大纲的精神，精选了多年来在教学实践中积累起来的、有代表性的平面解析几何的例题，约一百六十余道，基本按照教材顺序和知识系统进行分类，整理成六章。每章开头都简述了有关的概念、公式和解题注意事项。书中所提供的例题，对比较简单的，只做简要的解题思路的提示或解答；对比较复杂的，则做出详细的分析或注解，并写出完整的解答（或论证）过程。有些例题，还采用了一题多解，以介绍不同的解题思路与方法。为了便于读者巩固学习成果，我们还选编了一百五十多道习题，附于各章之后。

本书可供具有高中文化程度的知识青年自学和在校中学生复习时参考，同时也可供中学数学教师在教学中选用。

在编写过程中，承蒙马长冰同志提出许多宝贵意见，谨致谢意。

由于时间匆促，水平有限，书中不当之处，希望读者批评指正。

编　者

1979年10月脱稿

1980年3月修改

目　录

第一章 直角坐标系

一切平面几何图形，都是由同一平面内的点组成的。点是最简单的几何图形，不能把点再分割成比它更小的图形了，也就是说，点无大小可言。点的特征是表现在"点的位置"上。因此，解几里第一个要解决的问题，就是如何用代数的方法来确定点的位置。确定平面上点的位置的方法有很多种，其中直角坐标系，就是确定平面上点的位置的一种方法。

通过直角坐标系，可以把平面内的所有点和一切有序的实数对（x，y），建立起"一一对应"的关系。又几何图形可以看作满足某种条件的点的轨迹（或集合）。因而，使得几何图形的研究，转变为代数方程的讨论，再从代数方程讨论的结果，来确定几何图形的性质。

标志几何图形的性质的量，主要是线段的长短和角度的大小。在解几里，与这两种量最有关系的公式是：有向线段的数量；两点间的距离；线段的定比分点；直线的斜率等。

一、主要公式

1．有向线段AB的数量：

若在数轴上任意两点 A、B 的坐标分别为 x_A 和 x_B，则 AB的数量为

$$AB = x_B - x_A.$$

2. **两点间的距离：**

若已知两点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，则P_1和P_2之间的距离$|P_1P_2|$为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

3. **线段的定比分点：**

若已知线段的两个端点是$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，点P把有向线段P_1P_2分成P_1P和PP_2，且两线段的比为$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$，则分点$P$的坐标$(x, y)$可表为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

其中(x_1, y_1)，(x_2, y_2)分别为起点、终点的坐标。

当$\lambda=1$时，P为P_1P_2的中点，其坐标变为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

当$\lambda>0$时，P在P_1P_2上，叫做P内分P_1P_2。

当$\lambda<0$时，P在P_1P_2的延长线上，叫做P外分P_1P_2。

当$\lambda=-1$时，分点P不存在。

4. **A(x_1, y_1)和B(x_2, y_2)两点连线的斜率：**

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \quad (x_1\neq x_2)$$

这里$k_{AB}=\mathrm{tg}\alpha$，α为A、B两点连线的倾斜角$(0°\leqslant\alpha<180°)$。当$x_1=x_2$时，斜率不存在，倾斜角$\alpha=90°$。

显然，两条直线AB与CD平行的条件是它们的斜率相等，即$k_{AB}=k_{CD}$；互相垂直的条件是它们的斜率乘积为-1，即$k_{AB}\cdot k_{CD}=-1$。

5. 三角形的面积：

若$\triangle ABC$的三顶点是$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，则$\triangle ABC$的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值。}$$

二、注 意 事 项

1. 平面解析几何是通过数和式的计算，来研究平面几何图形的形状、大小和位置关系，因此，在学习解几时，要充分利用“形数结合”这个思想方法，弄清平面内点与有序数对的“一一对应”关系。

2. 有向线段的数量，在数轴上用它的两个端点的坐标表示；计算时，有向线段的起点和终点的顺序，会直接影响数量的正负号。要注意数量$AB\neq BA$。

3. 两点间的距离等基本公式，不论图形在坐标系的哪一个象限都是成立的。在应用定比分点公式时要注意：$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$中，分子的顺序是起点$P_1$到分点$P$，分母是分点$P$到终点$P_2$，而后再从内外分点确定$\lambda$的正负。

利用三顶点坐标求三角形的面积，由于坐标在三阶行列式中的排列顺序不同，会出现计算结果的符号不同。可以证明，若按逆时针方向来排列三点的顺序，则行列式为正值；若按顺时针方向，则为负值。因此在计算时，可归并为取它

的绝对值。若面积为零，则表明三点共线。

4. 用解析法证明几何问题，首先要选取适当的坐标系，并根据题目的条件，设置图形中点的坐标。坐标系选得是否适当，会直接影响到证题的简繁。所谓“适当”者，一般是使图形中的特殊点（如顶点、中心点等）落在坐标系的特殊位置上（如在原点、极轴和对称位置上）。这样可使计算简易。

三、例　　题

1. 在$\triangle ABC$中，已知$|BC|=5$，$|CA|=4$，$C=\arccos\frac{1}{8}$，试求出有向线段AB在有向直线AC和CA上的射影。

分析　有向线段在有向直线上的射影是个数量，若射影方向与它所在直线的方向相同，则为正；若方向相反，则为负。为了由三角形的已知边角，去求未知边角，就必须先通过余弦定理求出AB的长度。

解　在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得

$$|AB|=\sqrt{5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos\left(\arccos\frac{1}{8}\right)}$$

$$=\sqrt{25+16-40\times\frac{1}{8}}=6.$$

$$\cos A=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\times6\times4}=\frac{9}{16}.$$

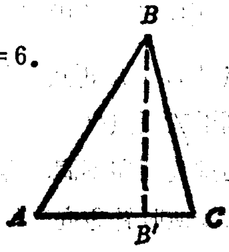


图1—1

有向线段AB在有向直线AC上的射影

$$AB' = |AB|\cos A = 6\times\frac{9}{16} = \frac{27}{8}.$$

有向线段AB在有向直线CA上的射影

$$B'A = -AB' = -\frac{27}{8}.$$

2. 已知三角形的三个顶点为$A(a\sin\theta_1,\ a\cos\theta_1)$、$B(a\sin\theta_2,\ a\cos\theta_2)$、$C(a\sin\theta_3,\ a\cos\theta_3)$ $(a>0)$，求证$\triangle ABC$的外心是原点O。

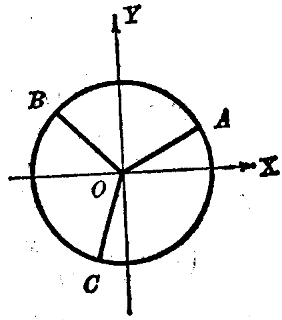


图1—2

分析 因三角形的外心为其三边垂直平分线的交点，故欲证$\triangle ABC$的外心在原点，只须证明原点与三顶点等距离即可。

证明 由距离公式，得原点O与$\triangle ABC$的三顶点的距离分别为

$$|OA| = \sqrt{a\sin\theta_1-0)^2+(a\cos\theta_1-0)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)} = a; \quad (a>0)$$

$$|OB| = \sqrt{(a\sin\theta^2-0)^2+(a\cos\theta_2-0)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2)} = a;$$

$$|OC| = \sqrt{(a\sin\theta_3-0)^2+(a\cos\theta_3-0)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(\sin^2\theta_3+\cos^2\theta_3)} = a.$$

由于$|OA| = |OB| = |OC| = a$，所以$\triangle ABC$的外心是在原点上。

3. 在点$P_1(x_1,\ y_1)$、$P_2(x_2,\ y_2)$上分别放置重量是m_1，m_2的两个质点，求证：它们的重心P的坐标是：

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

证明 根据力学，重心P把线段P_1P_2分成与重量m_1，m_2成反比的两部分，就是$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{m_2}{m_1}$.

设重心P的坐标为（x，y），则

$$x=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},$$

$$y=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

∴ 所求的重心坐标是

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\ \frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}\right).$$

注：（1）如果把三角形看作三个顶点上放置相同重量m的质点系，那么三角形的重心坐标是：

$$x=\frac{mx_1+mx_2+mx_3}{m+m+m}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{my_1+my_2+my_3}{m+m+m}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

（2）可以用数学归纳法证明，n个质点P_1，P_2，…，P_n分别放置n个质量m_1，m_2，…，m_n，则质点系的重心坐标是：

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

$$y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

4. 在$\triangle ABC$中，A点的坐标是（4，-1），AB的中点是$M(3, 2)$，重心是$P(4, 2)$。求B和C点的坐标。

分析 本题是由三角形重心的坐标，求三角形顶点的坐标，故可通过三角形重心坐标公式来计算。

解 设B和C点的坐标分别是(x_2, y_2)和(x_3, y_3)则

$$\frac{4+x_2}{2}=3,\quad \frac{-1+y_2}{2}=2; \tag{1}$$

$$\frac{4+x_2+x_3}{3}=4,\quad \frac{-1+y_2+y_3}{3}=2. \tag{2}$$

由(1)得$x_2=2$，$y_2=5$。

代入(2)得$x_3=6$，$y_3=2$。

故B和C点的坐标分别是（2，5）和（6，2）。

注 对于任何一个数学公式（例如重心公式）都必须掌握它的正逆两方面的应用（例如由质点求重心；由重心求质点就是）。

5. 已知边长为2的正方形$OABC$，顶点O在原点，C点在第二象限，且OA的倾斜角为30°，求这个正方形的重心G的坐标。

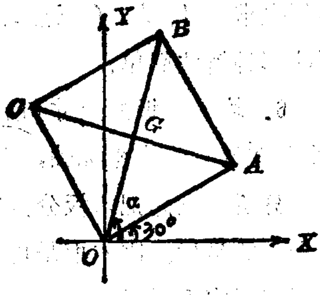


图1—8

分析 由平面几何知道，正方形的重心就是它的中心，所以本题只要求出B点的坐标，则OB的中点就是所求正方形的重心。

解 正方形$OABC$的对角线OB之长

$$|OB|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

倾斜角$\alpha = 30° + 45° = 75°$.

∴ 设B点的坐标为（x'，y'），则

$$x' = 2\sqrt{2}\cos75°$$
$$= 2\sqrt{2}(\cos45°\cos30° - \sin45°\sin30°)$$
$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \sqrt{3} - 1,$$
$$y' = 2\sqrt{2}\sin75°$$
$$= 2\sqrt{2}(\sin45°\cos30° + \sin30°\cos45°)$$
$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \sqrt{3} + 1.$$

故对角线OB的中点坐标为

$$x = \frac{x'}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad y = \frac{y'}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

因为其中点即为所求的重心，因此得正方形的重心坐标为$G\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$.

注 本题还可以按照求质点系重心的方法求解，这样就必须先求出A、B、C三点的坐标。显然，这种解法没有上面的那种解法简单。

6. 均匀木板的尺寸和形状如图所示，试分别以AB和AC所在的直线为坐标轴，求这块木板的重心。

分析 设想把木板分割成两块矩形，先求两个矩形重心M和N的坐标。因木板是均匀的（单位面积的质量为常量），故两矩形木板重量之比等于它们的面积之比，所以可用每个矩形的面积，来代替放置在各自重心M和N处的重量。最后再求两个质点M和N的重心坐标。即将面积的重心问题转化

为求质点系的重心问题。

解：因矩形重心在其对角线的中点，故矩形$ABGC$的重心M的坐标是（5，7），矩形$GDEF$的重心N的坐标是（17，13）。

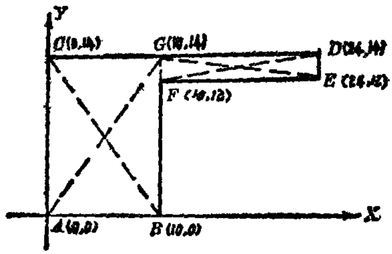


图1—4

而矩形$ABGC$的面积是 $10\times14=140$；

矩形$GDEF$的面积是 $2\times14=28$。

∴ 质点M和N的重心坐标是

$$x=\frac{140\times5+28\times17}{140+28}=7,$$

$$y=\frac{140\times7+28\times13}{140+28}=8.$$

因此木板的重心坐标是（7，8）。

7．试证：以平行四边形$ABCD$的二邻边AB与BC为边所作的两个正方形面积之和，不小于以平行四边形$ABCD$两对角线为边所作的矩形面积。

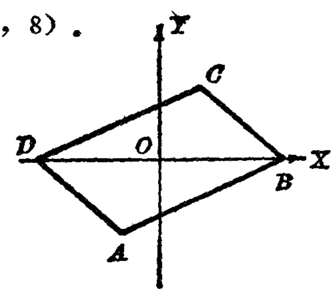


图1—5

分析 （1）本题即证明$|AB|^2+|BC|^2\geqslant|AC|\cdot|BD|$。

（2）平行四边形的相对顶点是关于对角线交点成中心对称。所以，如以对角线交点为坐标原点，以一条对角线所在的直线为坐标轴来建立坐标系，可使平行四边形的顶点落在

对称位置上和坐标轴上。于是顶点的坐标出现相反数或零。

证明 以▱$ABCD$的对角线交点为原点，以对角线BD所在的直线为x轴，建立坐标系（如图），则它的顶点坐标可分别设为：

$A(-m,\ -n)$、$B(b,\ 0)$、$C(m,\ n)$、$D(-b,\ 0)$。

（其中$m,\ n,\ b>0$）

$$\therefore\quad |AB|^2+|BC|^2$$
$$=[(-m-b)^2+(-n-0)^2]+[(b-m)^2+(0-n)^2]$$
$$=2(b^2+m^2+n^2).$$

$$|AC|\cdot|BD|=\sqrt{(m+m)^2+(n+n)^2}\cdot\sqrt{(b+b)^2+0^2}$$
$$=4b\sqrt{m^2+n^2}.$$

$$\because\quad b^2+(m^2+n^2)\geqslant 2b\sqrt{m^2+n^2},$$

$$\therefore\quad 2(b^2+m^2+n^2)\geqslant 4b\sqrt{m^2+n^2}.$$

于是证得 $|AB|^2+|BC|^2\geqslant|AC|\cdot|BD|$。

8. 已知三点$O(0,\ 0)$、$A(1,\ 0)$、$P(x,\ y)$，且设$x\geqslant1$，$y\neq0$。

(1) 如果选取一点Q，使四边形$OAPQ$成为一平行四边形，求Q点的坐标；

(2) 如果此时AP的中垂线通过Q点，求P点在什么方程所表示的图像上；

(3) 在这样的P点中间，平行四边形$OAPQ$变成菱形时，求P点的横坐标。

解 如图

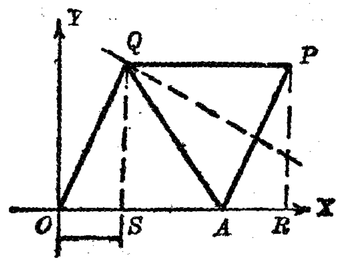


图1—6

(1) 因使四边形$OAPQ$是平行四边形的条件是$OQ\perp AP$，过点P、Q分别作$PR\perp OX$，$QS\perp OX$。

由 $\triangle OQS\cong\triangle APR$，

得 $OS=AR=x-1$，

$QS=PR=y$，

因此，Q的坐标是$(x-1,\ y)$。

(2) 由AP的中垂线通过Q这一条件，得$AQ=QP$，

$\therefore\quad \sqrt{(x-2)^2+y^2}=1$，即 $(x-2)^2+y^2=1$，

因此，P点在方程 $(x-2)^2+y^2=1$所表示的图像上。

(3) 当四边形$OAPQ$变成菱形时，有

$AP=AQ=QP=1$，

$\therefore\quad (x-2)^2+y^2=(x-1)^2+y^2=1$，

即 $(x-2)^2=(x-1)^2$， $\therefore\quad x=\dfrac{3}{2}$。

因此，P点的横坐标是$\dfrac{3}{2}$。

9. 已知$\triangle ABC$的三个顶点是$A(-a,\ 0)$、$B(a,\ 0)$和$C\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，试判别$\triangle ABC$的形状。

分析 (1) 三角形的形状按两种方法分类：一是按边分类；一是按角分类。因此本题的解法也有两种途径：一种是

从边来考虑；一种是从角来考虑。

(2) 按题设条件，先尽量画出较准确图形，由图形可以初步发现$AC\perp BC$。这样就是通过“形数结合”的方法，找到解题的途径。

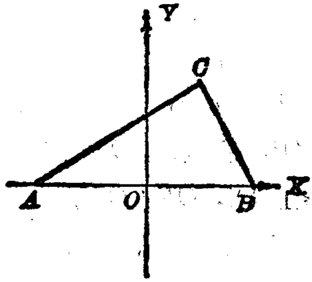


图1—7

解法一 从边来考虑：

$$|AB|=\sqrt{(a+a)^2+(0-0)^2}=2a,$$

$$|AC|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a+a\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a-0\right)^2}=\sqrt{3}a,$$

$$|BC|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a-a\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a-0\right)^2}=a.$$

$\because$ $|AC|^2+|BC|^2=3a^2+a^2=4a^2=|AB|^2$,

又 $|AC|\neq|BC|$,

$\therefore$ $\triangle ABC$是非等腰的直角三角形。

解法二 从角来考虑：

设 k_{AC}和k_{BC}分别是AC边和BC边的斜率，

$$\because\quad k_{AC}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}a-0}{\frac{1}{2}a+a}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad\therefore\quad\angle BAC=30^\circ;$$

$$\because\quad k_{BC}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}a-0}{\frac{1}{2}a-a}=-\sqrt{3},$$

$\therefore$ $\angle ABC=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.