高等学校数学学习辅导教材
GAODENG XUEXIAO SHUXUE XUEXI FUDAO JIAOCAI

高等数学课程过关强化试卷

高等数学教学研究组／组编
曹铁川／主编

高等数学（上）

（理工类·重点院校）

真正的一线教师力作
针对性强 信息超值
考点覆盖率100%
考试成功率100%
保你轻松过关得高分

ISBN 7-5611-2294-2
9 787561 122945 >
ISBN 7-5611-2294-2 定价:19.00元(本册9.50元)
大连理工大学出版社
责任编辑/刘 杰 封面设计/王福刚

高等学校数学学习辅导教材

高等数学课程过关强化试卷

高等数学（上）

（理工类・重点院校）

高等数学教学研究组　组编

曹铁川　主编

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学课程过关强化试卷：高等数学(上)(理工类·重点院校)／曹铁川主编．—大连：大连理工大学出版社,2003.4
ISBN 7-5611-2294-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．曹…　Ⅲ．高等数学—高等学校—习题　Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 017824 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:7　字数:150 千字
印数:1～8 000
2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　责任校对:刘智伟
封面设计:王福刚

定　价:19.00 元(本册 9.50 元)

前　　言

高等数学是理工科院校最重要的基础课之一。学习该课程既为后续专业课奠定必需的数学基础，同时也是提高自身数学素养的必经途径。与初等数学相比，高等数学在研究内容及研究方法上有着许多本质差异，加之大学课堂教学密度大，进度快，对学生的自学能力要求高，因而使得一部分刚升入大学的一年级新生不很适应，感到高等数学不好学，甚至视为畏途，特别是期末考试之前，面对众多的知识点，五花八门的题型，常理不清头绪，抓不住重点，不能有效地复习备考。

怎样才能学好高等数学呢？其要领是多方面的，其中一个重要方面就是要做够一定数量的习题。因为习题通常是知识的载体，在正确方法的指导下，通过演算题目，可以加深对数学概念的理解，对数学思想的领悟，以及对数学思维能力的培养。反过来，为了检测学生是否达到了教学要求，也要通过解答试题来考核，因此笔试仍是各高校期末考试的主要形式。

能否有效地对学生进行考核，试卷就显得至关重要。一份好的试卷要能够体现出教学大纲的要求，能够考查出学生对基本概念、基本方法和基本原理的理解，同时在一定程度上考查出学生的运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力及运用所学知识解决实际问题的能力，甚至是创新能力。《高等数学课程过关强化试卷》（理工类・重点院校）正是力求体现上述功能而编制的。

本试卷集的命题原则参照了原国家教委审定的工科院校“高等数学教学基本要求”，以及高等学校工科数学课程指导委员会近年来关于工科数学教学内容改革的一系列建议，主要针对的是重点理工科院校非数学类专业的本科学生，以及普通理工科院校对数学要求较高专业的本科学生。试卷兼收并蓄了传统教材和面向 21 世纪教材的内容，如同济大学的《高等数学》（四、五版），清华大学的《微积分教

程》，西安交通大学的《工科数学分析基础》，大连理工大学与原吉林工业大学合编的《工科数学基础》，同济大学的《微积分》等。

本试卷集的题型结构包括填空题、选择题、解答题和证明题。其中填空题的知识点比较单一，难度不大，要求学生运用基本公式和方法正确计算和推导。选择题的概念性较强，计算量一般不大，主要考查学生对基本概念和原理的掌握程度。解答题和证明题是考试的主要题型，主要考查学生对高等数学的公式、方法、原理掌握和运用的熟练程度，并有效地反映学生的能力。

按照教学要求，各套试卷包含了主要知识点，内容齐全，覆盖面广。认真解答这些试卷可对高等数学进行较系统的复习。每套试卷的满分为 100 分，其中基本题约占 70 分，中等难度的综合题约占 20 分，难题或创新题约占 10 分。每套试卷均有较高的区分度，使用本试卷可以检测出学生个体之间的差异，也可使优秀学生脱颖而出。当然，各试卷之间在难度和要求上也存在着一定的区别，可根据各校的具体情况有选择地使用和参考。

本试卷集分为两部分，第一部分为试题部分，第二部分为答案和解答部分。在解答中给出了主要步骤，希望同学们先独立去解答，然后再对照答案比较推敲，并总结解题经验和技巧，从中提炼出一些有代表性的思想。相信同学们做了若干套试卷后，定会增强信心，开阔眼界，提升解题能力。

本书由曹铁川（大连理工大学）主编和统稿。参与试题命制的有朱晓平（同济大学）、武忠祥（西安交通大学）、韩云瑞（清华大学）、崔荣泉（西安冶金科技大学）、蒋志刚、金光日（大连理工大学）。各命题教师长期工作在教学第一线，有着丰富的教学经验，谙知试题设计方案和编制技巧，对试卷的广度和深度有着较准确的把握，因而试卷命题合理，针对性强，富有启发性，具有较高的信度和效度，是大学生学习高等数学和课程过关的良师益友，对于数学教师也不失为一本有用的教学参考书。

对于本书中的不足与疏漏，恳请读者批评指正。

编　者

2003.4

班级________ 姓名________ 得分________

试卷一

（时间 110～120 分钟）

一、填空题（本题 16 分，每小题 4 分）

1. 设函数 $y=f(x^3)$ 在点 $x=1$ 处的自变量增量 $\Delta x=0.1$，对应函数微分 $\mathrm{d}y$ 为 0.2，则 $f'(1)=$ ______。

2. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy-\ln y=1$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$ ______。

3. 抛物线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率 $k=$ ______。

4. 曲线段 $\begin{cases} x=t^3+1 \\ y=\dfrac{3}{2}t^2-1 \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的弧长是______。

二、选择题（本题 16 分，每小题 4 分）

1. 设 $f(x)=x\sin x\cdot e^{\cos x}$，则在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 是（　　）。

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

2. 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$，则在 $x=1$ 处，函数 $f(x)$（　　）。

A. 不连续　　B. 连续但不可导

C. 可导，但导数不连续　　D. 可导，且导数连续

3. 设雨滴为球体状，若雨滴聚集水分的速率与表面积成正比，则在雨滴形成过程中（一直保持球体状），雨滴半径的增加率（　　）。

A. 与球体体积的立方根成正比　　B. 与球体半径成正比

C. 与球体体积成正比　　D. 为一常数

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x=$（　　）。

A. $2(1-e)$　　B. $2(e-1)$　　C. $1-e$　　D. $e-1$

三、（本题 6 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$。

四、（本题 6 分）

求由参数方程 $\begin{cases} x=a\left(\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t\right) \\ y=a\sin t \end{cases}$，所确定的函数 $y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

五、（本题 7 分）

对函数 $y=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$，填写下表：

单调增加区间		凹（⌣）区间	
单调减少区间		凸（⌢）区间	
极值点		拐点	
极值		渐近线	

六、（本题 6 分）

已知 $a_1=1, a_2=1+\dfrac{a_1}{1+a_1}, a_3=1+\dfrac{a_2}{1+a_2},\cdots,a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}},\cdots$，证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n$。

七、(本题 6 分)

证明在已给定底边和给定面积的所有锐角三角形中，以等腰三角形的周长为最短。

八、(本题 6 分)

计算不定积分$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$。

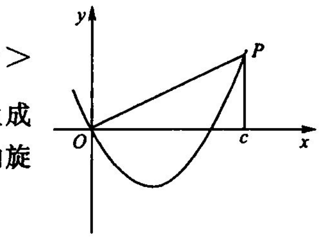
九、(本题 6 分)

计算定积分$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$。

十、(本题 6 分)

设曲线的方程为$y=\int_1^x \frac{e^{-x^2t^2}}{t}dt$，当$x=1$时曲线上对应的点为$A$。求过$A$点的该曲线的切线方程。

十一、(本题 6 分)



(十一题图)

设$\overset{\frown}{OP}$为抛物线$y=x(x-4)$上介于$[0,c]$上的弧段($c>4$)。问c为何值时，$\overset{\frown}{OP}$与$x=c, y=0$所围图形绕x轴旋转生成的旋转体体积和直线段$\overline{OP}$与$X=c, y=0$所围三角形绕x轴旋转生成的圆锥体体积相等。

十二、(本题 6 分)

设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导，且$f'(x)\leqslant M, f(a)=0$，证明$\int_a^b f(x)dx\leqslant \frac{1}{2}M(b-a)^2$。

十三、(本题 7 分)

设$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)(0<\theta<1)$，又$f''(x)$连续且$f''(x)\neq 0$，证明$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$。

班级________ 姓名________ 得分________

试卷二

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$ ______。

2. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x+\sqrt{xy}+y=7$ 确定，则 $y'(1)=$ ______。

3. 曲线 $y=\arctan x$ 在点 $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切线方程是______。

4. $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{4-x^2}\right)^2 dx =$ ______。

5. 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且 $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$，则 $f(2)=$ ______。

二、选择题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可微，且 $f'(x)\neq 0$，Δy 和 dy 分别是 $f(x)$ 在 x 处的增量和微分，则当 $\Delta x\to 0$ 时（　）。

A. Δy 是比 dy 高阶的无穷小　　B. Δy 是比 dy 低阶的无穷小

C. Δy 与 dy 是同阶但非等价无穷小　　D. Δy 与 dy 是等价无穷小

2. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$（　）。

A. 没有渐近线　　B. 既有水平渐近线又有铅直渐近线

C. 只有铅直渐近线　　D. 仅有水平渐近线

3. 设 $f(x)=\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin x}{|x|}$，则 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的（　）。

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

4. 设 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx$（　）。

A. $e^x(1-x)+c$　　B. $e^x(1+x)+c$

C. $e^x(x-1)+c$　　D. $-e^x(1+x)+c$

5. 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中必为偶函数的是（　）。

A. $\int_0^x f(t^2)dt$　　B. $\int_0^x f^2(t)dt$

C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　D. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

三、（本题 8 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x), & -\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$。问 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导？

四、（本题 8 分）

设 $\begin{cases}x=e^{2t}-1\\ y=t^3+1\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

五、（本题 9 分）

计算不定积分 $\int \sin(\ln x)dx$。

六、(本题 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^2}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)$。

七、(本题 9 分)

若 $0<x<1$,证明不等式$\dfrac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}$ 成立。

八、(本题 9 分)

设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A,过坐标原点 O 和 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形。问 a 为何值时,该图形的面积最大?最大面积是多少?

九、(本题 9 分)

设地球质量为 M,半径为 R,自地面垂直向上发射质量为 m 的火箭。

(1) 当火箭上升的高度为 h(从地面算起)时,求克服地球引力作的功;

(2) 若火箭摆脱地球的引力(即 $h\to+\infty$)需具备多少能量?

(3) 若上述能量由火箭发射时的动能转化,则火箭的最小初速度应是多少?

(注:取 $R=637\times10^8\ \mathrm{cm}$,重力加速度 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$)

十、(本题 9 分)

设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数,$f(a)$ 和 $f(b)$ 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值和最小值。证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(a)(\xi-a)+f(b)(b-\xi)$。

班级____________ 姓名____________ 得分____________

试卷三

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 16 分，每小题 4 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & x\leqslant 0 \\ (1+x)^{\frac{b}{x}}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 满足等式______。

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=$______。

3. 设 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$______。

4. 位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界图形的面积是______。

二、选择题（本题 16 分，每小题 4 分）

1. 下列等式中正确的是（　）。

A. $\dfrac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$　　B. $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=f(x)-f(a)$

C. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$　　D. $\int f'(x)dx=f(x)$

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$I=\int_{-v}^{u-v}f(x+v)dx$，则（　）。

A. I 是 x 的函数　　B. I 是 u 的函数

C. I 是 v 的函数　　D. I 中含 u 和 v

3. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)dx$，则（　）。

A. $N<P<M$　　B. $M<P<N$　　C. $N<M<P$　　D. $P<M<N$

4. 曲线 $y=\dfrac{x}{e}-1-\ln x$ 在区间 $(0,e)$ 内是（　）。

A. 单调下降，向下凸　　B. 单调下降，向上凸

C. 单调上升，向下凸　　D. 单调上升，向上凸

三、解答下列各题（本题 20 分，每小题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$。

2. 设 $f(x)=\dfrac{a}{bx+c}$，求 $f^{(n)}(x)$。

3. 设 $y=\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，求 y'。

4. 已知曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，求常数 a,b 的值。

四、解答下列各题(本题 42 分,每小题 7 分)

1. 设曲线 $y = f(x)$ 在原点处与 $y = \sin x$ 相切,试求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} n^{\frac{1}{2}} \sqrt{f\left(\frac{2}{n}\right)}$。

2. 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} \mathrm{d}x$。

3. 计算 $\int_0^4 x^2 \sqrt{4x - x^2} \mathrm{d}x$。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$。

5. 设 $y > 0$,证明 $xy \leqslant e^{x-1} + y\ln y$。

6. 设平面图形 A 由 $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ 与 $y \geqslant x$ 所确定,求图形 A 绕直线 $x = 2$ 旋转一周所得旋转体的体积。

五、(本题 6 分)

设平面区域 g 含于平面区域 G 内,现向 G 内投掷一“随机点”,并假设“随机点”落在 G 内任一处的可能性都是相同的。显然此“随机点”落入 g 内的可能性可用数 $p = \frac{g\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}$ 来度量,我们称 p 为该“随机点”落入区域 g 的“概率”。

现任意取两个小于 1 的正数 x 和 y,求 $xy \geqslant \frac{1}{2}$ 的“概率”(取 $\ln 2 \approx 0.6931$)。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷四

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 20 分，每小题 5 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$。

2. 设 $f'(\cos x)=\cos 2x$，求 $f''(x)$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

4. 利用夹逼准则求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]$，这里记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

二、（本题 15 分，每小题 5 分）

1. 已知 $y=\ln\cos\sqrt{x^2+1}$，求 dy。

2. 求曲线 $y=\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ 的拐点。

3. 设 $f(x)=e^{x^2}-1$，写出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处带有 lagrange 余项的一阶 Taylor 公式。

三、(本题15分,每小题5分)

1. 设曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\int_0^{t^2}\sqrt{1+u}\,\mathrm{d}u \\ y=\int_0^{t^2}\sqrt{1-u}\,\mathrm{d}u \end{cases}$ 确定,求该曲线对应于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 的弧长。

2. 求三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta$ 所围图形的面积。

3. 计算广义积分 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$。

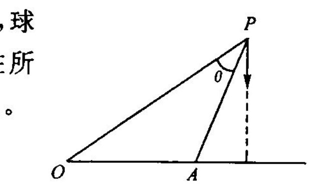
四、(本题12分,每小题6分)

1. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$。

2. 计算定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$。

五、(本题7分)

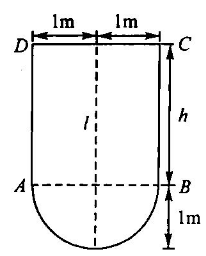
在一场足球比赛中,我方一名球员 P 突破对方的防守后,带球沿垂直于底线方向急速前进(如图),已知球门 OA 宽 6 m,球员前进方向与右门柱的水平距离为 1 m。当该球员与两门柱所成视角 θ 最大时,起脚射门最佳。请你为该球员确定射门位置。



(五题图)

六、(本题 8 分)

某闸门的形状与大小如图所示，其中直线 l 为对称轴，闸门上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成。当水面与闸门上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5 : 4，闸门矩形部分的高 h 应为多少 m(米)？



(六题图)

七、(本题 8 分)

就 k 的不同取值，讨论曲线 $y=\ln x+k$ 和直线 $y=x$ 的交点个数。

八、(本题 7 分)

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x$ 所围图形绕直线 $y=x$ 旋转一周所得到的旋转体的体积 V。

九、(本题 8 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；

(2) 对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷五

（时间 110～120 分钟）

一、填空题（本题 20 分，每小题 4 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{k|x|}}=2$，则 $k=$ ______。

2. 曲线 $y=2(x-1)^2$ 的最小曲率半径 $R=$ ______。

3. 若 $y=f(x)$ 存在着单值反函数，且 $y'\neq 0, y''\neq 0$，则 $\frac{d^2x}{dy^2}=$ ______。

4. 设 $g(x)$ 为连续函数，$g(0)=1, G(x)=\int_{\sin x}^{x^2} g(t)dt$，则 $G'(0)=$ ______。

5. 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线方程是______。

二、选择题（本题 20 分，每小题 4 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin x, g(x)=1-\cos 4x, h(x)=\ln(1+\sqrt{x})$ 都是无穷小量，它们按 x 低阶至高阶的排列，依次应为（　　）。

A. $f(x),h(x),g(x)$　　B. $h(x),g(x),f(x)$

C. $g(x),f(x),h(x)$　　D. $h(x),f(x),g(x)$

2. 设曲线用极坐标方程 $r=\sin 3\theta$ 给出，则该曲线在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的切线斜率为（　　）。

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

3. 设 $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$，$n$ 为正整数，则函数 $f(x)$（　　）。

A. 必有极小值　　B. 必有极大值

C. 既无极小值也无极大值　　D. 是否有极值依赖于 n 的取值

4. 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx$，其中 $t>0, s>0$，则 I 的值（　　）。

A. 依赖于 s 不依赖于 t　　B. 依赖于 t 和 x 不依赖于 s

C. 依赖于 s 和 t　　D. 依赖于 s,t,x

5. 曲线的极坐标方程为 $r=ae^{b\theta}(a>0,b>0)$，该曲线从 $\theta=0$ 至 $\theta=\alpha$ 的一段弧长为（　　）。

A. $\int_0^{\alpha}\sqrt{1+(abe^{b\theta})^2}d\theta$　　B. $\int_0^{\alpha}ae^{b\theta}\sqrt{1+b^2}d\theta$

C. $\int_0^{\alpha}\sqrt{1+(ab\theta)^2}d\theta$　　D. $\int_0^{\alpha}abe^{b\theta}\sqrt{1+(abe^{b\theta})^2}d\theta$

三、（本题 6 分）

用函数极限的 $\varepsilon - x$ 定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$。

四、（本题 8 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

五、（本题 7 分）

当 $|x|\ll 1$ 时，求 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的关于 x 的线性近似式。

六、(本题 8 分)

试讨论方程$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=x$有几个实根。

七、(本题 8 分)

求$\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$。

八、(本题 7 分)

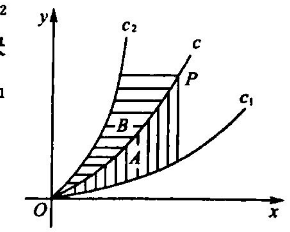
判断广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}dx$的敛散性。

九、(本题 8 分)

证明:若 $x_1\cdot x_2>0$,则 $x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$,其中 ξ 在 x_1 和 x_2 之间。

十、(本题 8 分)

设 c_1 和 c_2 是两条通过原点的曲线(如图),曲线 c 介于 c_1,c_2 之间。如果过 c 上任意点 P 引平行于 x 轴和 y 轴的直线,得两块阴影所示区域 A 和 B 有相等的面积。假设 c 的方程是 $y=x^2$,c_1 的方程是 $y=\frac{1}{2}x^2$,求曲线 c_2 的方程。



(十题图)

班级__________ 姓名__________ 得分__________

试卷六

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 30 分，每小题 3 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $f[g(x)]=$ ______。

2. 当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 $a=$ ______，$b=$ ______。

3. 已知曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\sin x$ 在原点相切，并且函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(2x)}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______。

4. 已知 $y=f(2x-1)$，且 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ ______。

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x=t^3+2t+1\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 所确定，则该曲线在 $t=0$ 所对应点处的切线方程是______。

6. 曲线 $y=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$ 的拐点是______。

7. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{x^2}，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ ______。

8. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围平面图形的面积是______。

9. 设非负函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $f(x)F(x)=2x^3+2x$，$F(0)=1$，则 $f(x)=$ ______。

10. 设 $A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$，$B=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$，$C=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x})\mathrm{d}x$，则 A,B,C 之间的大小关系为______。

二、（8 分）

一个汽球以 40(cm^3/s) 的速率充气，当球半径 $r=10$ cm 时，求球半径的增长率。

三、（本题 9 分）

已知曲线 $y=f(x)$ 在曲线上任意点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率为 $a^2x^2-4ax+3$，函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值 0，试确定 $f(x)$，并求 $f(x)$ 的其他极值。

四、（本题 12 分，每小题 6 分）计算下列积分。

(1) $\int e^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$。

(2) $\int_0^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数。

五、(8 分)

求星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t (a > 0)$ 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积。

六、(8 分)

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f''(x) > 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

七、(8 分)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在$[-1,1]$上可导，且$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，$f(x)$ 只有有限个零点，$g(x) \neq 0$，证明：在$(-1,1)$内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$。

八、(8 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$，且对 $x \geqslant 1$ 有 $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + f^2(x)}$，证明：

(1) $f(x)$ 在$[1, +\infty)$上有界；

(2) $F(x) = \int_1^x f(x)\mathrm{d}t$ 在$[1, +\infty)$上一致连续。

九、(9 分)

设连续函数 $f(x)$ 在$[1, +\infty)$上严格单调增加。

(1) 证明：$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\mathrm{d}x < f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$；其中 n 为大于 1 的正整数；

(2) 取 $f(x) = \ln x$，并利用(1)的结论证明：$e^{1-n}n^n < n! < e^{1-n}\cdot n^{n+1}$；

(3) 求$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$。

班级________ 姓名________ 得分________

试卷七

（时间 110 ～ 120 分钟）

一、填空题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\cos t\mathrm{d}t}{\ln(1+x^2)}=$ ______。

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\mathrm{e}^4$，则常数 $a=$ ______。

3. 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)-\sin f(x_0)}{x-x_0}=$ ______。

4. 设 $y=y(x)$ 是由 $x-\int_1^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 所确定的函数，则曲线 $y=y(x)$ 在 $(0,1)$ 点处的切线方程为______。

5. $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$ ______。

二、单项选择题（本题 15 分，每小题 3 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$ 的跳跃间断点是 $x=$（　　）。

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{4}{3}}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）。

A. 极限不存在　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续，但不可导　　D. 可导

3. 设函数 $f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{x+\sqrt{x^2+y^2}}+o(\Delta x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处的微分 $\mathrm{d}y$ 等于（　　）。

A. 0　　B. $\mathrm{d}x$　　C. $2\mathrm{d}x$　　D. $3\mathrm{d}x$

4. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}$（　　）。

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有铅直渐近线

C. 既有水平渐近线，又有铅直渐近线　　D. 既无水平渐近线，也无铅直渐近线

5. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为非零偶函数，则 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为（　　）。

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 可能是奇函数，也可能是偶函数　　D. 既非奇函数，也非偶函数

三、（10 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2，试确定系数 a 和 b，并求出 $f(x)$ 的所有极值及曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

四、（10 分）

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内二阶可导。

（1）写出 $f(x)$ 的带有皮亚诺型余项的二阶麦克劳林公式；

（2）若 $f(x)$ 还满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0$，试求 $f(0)$，$f'(0)$ 和 $f''(0)$ 之值。

五、（10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续。

（1）证明 $\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$；

（2）当 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x$ 时，利用（1）的结论求 $f(x)$。