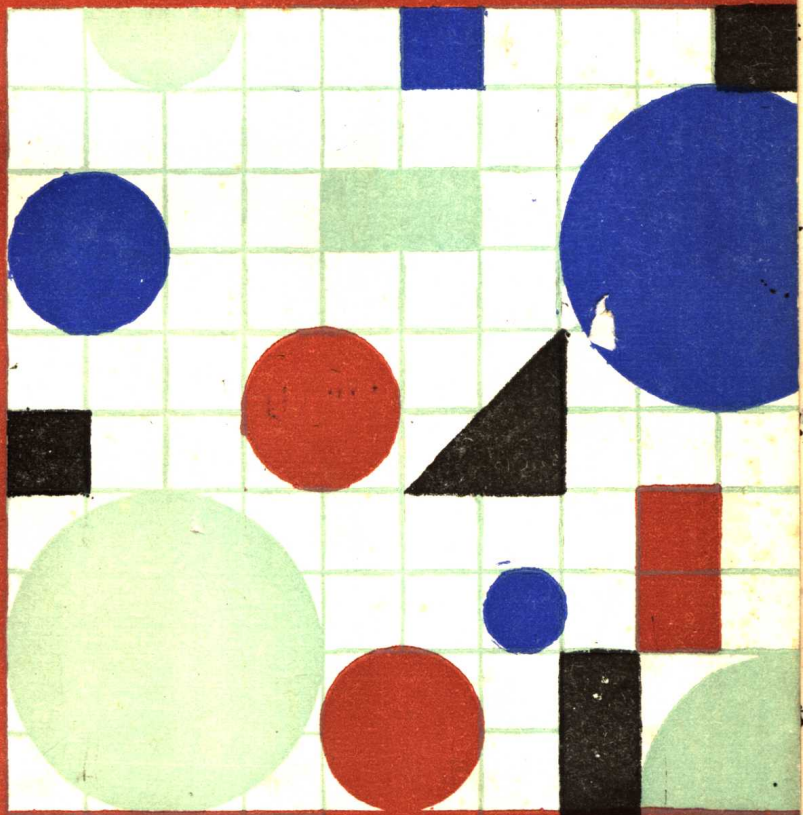


师专试用教材

# 初等 代数研究

张岳中等编  
湖南教育出版社





师专试用教材

# 初等代数研究

主 编 张岳中  
副主编 余楚云  
编 者 李子愚 陈绣卿 吴琼廉  
          黄又人 黄 鹏 徐长麟  
          余楚云 边舒威  
主 审 李传和

## 初等代数研究

张岳中等 编

责任编辑：胡 坚

湖南教育出版社出版发行(长沙展览馆路3号)  
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷厂印刷

850×1168毫米 32开 印张, 13.625 字数, 310,000

1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷

印数, 1—6,100

ISBN 7—5355—0191—4/G·485

定价: 2.95元

## 前 言

为了适应高师院校数学系(科)和高师函授数学专业的需要,由湖南省高师数学教育研究会主持,组织我省部分高师院校初等代数教师,根据他们多年来的教学经验,和目前教育发展的要求,编写此书,作为试用课本。

本书的特点有三:第一,取材简要,不要求面面俱到。如第一章讨论数时,重点地讲自然数与实数,而没有谈有理数;第三章,抓住方程的同解性,进行详细讨论;第五章讨论函数时,着重谈函数概念发展的唯物辩证过程,和利用代数方程判断初等函数的超越性。第二,尽量揭示教材中的数学思想、方法。如第二章中揭示恒等变形的目的,在于提供各式各样的恒等表达式,便于解题时有目的地选用;而方程、不等式的同解变形,在于用易于求解的同解式替换原式;第五章中的RMI原则,突出了数学系统的转化,在于由已知引得未知;第六章突出了容斥原则、母函数、递归关系这三种解题思路的特点。第三,多与高等数学挂钩,居高临下地解决问题。如开始讲不等式时,加上了“有序域”一节,为后面的讨论打下了理论基础;证明不等式时,讨论了凸、凹函数;解不定方程时,讨论了同余式;对方程无理根的近似值,讲了几种求法。同时,对例题的选择,如何做到思维丰富,也花了一定工夫。

本书由湖南师范大学张岳中担任主编,李传和担任主审,衡

阳师余楚云担任副主编。编写的具体分工是：怀化师专李子愚编写第一章，邵阳师专陈绣卿编写第二章，常德师专吴琼廉编写第三章前六节，娄底师专黄又人编写第三章第七节，郴州师专黄鹏、徐长麟编写第四章，衡阳师专余楚云编写第五章，湘潭市教师进修学院边舒威编写第六章。

限于水平，加之时间仓促，本书难免存在缺点和错误，恳请读者指正。

最后，我们对湖南教育出版社的大力支持，表示衷心的感谢。

编者 1987年6月

# 目 录

<b>第一章 数</b> .....	(1)
§ 1 自然数理论 .....	(1)
1.1 数概念的产生和发展 .....	(1)
1.2 自然数的定义 .....	(6)
1.3 自然数的大小比较 .....	(7)
1.4 自然数的四则运算 .....	(8)
1.5 自然数的序数理论 .....	(12)
1.6 数系的扩展原则 .....	(16)
§ 2 实数理论 .....	(17)
2.1 线段的度量 .....	(18)
2.2 实数的定义 .....	(22)
2.3 实数的大小比较 .....	(24)
2.4 实数的四则运算 .....	(25)
2.5 实数的开方 .....	(28)
2.6 无理指数幂与对数 .....	(30)
2.7 实数集的性质 .....	(33)
§ 3 整数论基础 .....	(40)
3.1 整数的整除性 .....	(40)
3.2 不定方程 .....	(55)
3.3 一次同余式 .....	(67)

习题一	(74)
<b>第二章 解析式的恒等变形</b>	(80)
§ 1 解析式的概念	(80)
1.1 解析式的定义与分类	(80)
1.2 解析式的许可值集	(82)
§ 2 解析式的恒等变形	(83)
2.1 解析式恒等变形的概念	(83)
2.2 解析式恒等变形的目的	(84)
§ 3 恒等变形的有关定理	(86)
3.1 多项式恒等的有关定理	(86)
3.2 恒等式证明举例	(91)
3.3 解析式的两类恒等变形	(95)
§ 4 组合变形	(96)
4.1 多项式、分式的组合变形	(96)
4.2 根式和超越式的组合变形	(100)
§ 5 分解变形	(104)
5.1 “1”和“0”的各种变形	(104)
5.2 分解因式	(107)
5.3 配方法	(119)
5.4 分式分解为部分分式	(125)
习题二	(134)
<b>第三章 方程和方程组</b>	(138)
§ 1 方程的基本概念	(138)
1.1 方程的定义	(138)
1.2 方程的分类	(141)
1.3 解方程的两大步骤	(142)

§ 2	方程的同解性 .....	(144)
2.1	方程同解的概念 .....	(144)
2.2	方程同解的基本定理 .....	(147)
§ 3	方程的变形 .....	(150)
3.1	乘方变形 .....	(150)
3.2	根式变形 .....	(151)
3.3	对数变形 .....	(152)
3.4	倒数变形 .....	(152)
3.5	利用比例定理变形 .....	(153)
§ 4	方程的几种解法 .....	(154)
4.1	公式法 .....	(154)
4.2	换元法 .....	(164)
4.3	因式分解法 .....	(171)
4.4	观察法 .....	(174)
4.5	应用函数的性质解方程 .....	(175)
§ 5	近似根的计算 .....	(177)
5.1	实根个数的估计 .....	(177)
5.2	确定实根所在的区间 .....	(181)
5.3	实根的近似计算方法 .....	(185)
§ 6	三角方程中的同解问题 .....	(192)
6.1	三角方程通解公式的等效性 .....	(192)
6.2	解三角方程中的增失根的问题 .....	(198)
§ 7	方程组 .....	(203)
7.1	方程组的一般概念 .....	(203)
7.2	方程组的同解理论 .....	(208)
7.3	特殊类型方程组的解法 .....	(218)



习题三	(227)
<b>第四章 不等式</b>	(234)
§1 有序域	(234)
§2 不等式的概念和基本性质	(238)
2.1 不等式的概念	(238)
2.2 不等式的基本性质	(239)
2.3 不等式的同解性	(241)
2.4 不等式的同解定理	(241)
§3 不等式的解法	(244)
3.1 一元有理不等式	(244)
3.2 无理不等式	(251)
3.3 简单超越不等式	(257)
3.4 含绝对值符号的不等式	(263)
3.5 二元不等式(组)	(268)
§4 不等式的证明	(272)
4.1 比较法	(272)
4.2 综合法	(274)
4.3 分析法	(277)
4.4 反证法	(278)
4.5 数学归纳法	(279)
4.6 换元法	(281)
4.7 判别式法	(283)
4.8 放缩法	(284)
4.9 凸凹函数法	(285)
§5 应用不等式求某些函数的极值	(295)
5.1 应用判别式求极值	(295)

5.2 应用平均不等式求极值 .....	(296)
习题四 .....	(301)
<b>第五章 初等函数</b> .....	(307)
§1 函数的概念 .....	(307)
1.1 函数概念的发展 .....	(307)
1.2 函数的值域 .....	(316)
§2 初等函数的建立和分类 .....	(324)
2.1 函数方程 .....	(325)
2.2 用函数方程建立基本初等函数 .....	(331)
2.3 初等函数分类 .....	(339)
2.4 初等函数超越性的证明 .....	(340)
§3 函数的性质和图象 .....	(347)
3.1 对称函数 .....	(347)
3.2 周期函数 .....	(352)
3.3 函数图象 .....	(360)
§4 可逆映射 .....	(370)
4.1 反函数 .....	(370)
4.2 利用可逆映射解题的一种典型方法 —— <i>RMI</i> 原理 .....	(374)
习题五 .....	(384)
<b>第六章 组合初步</b> .....	(389)
§1 排列与组合 .....	(389)
1.1 中学排列组合的复习 .....	(389)
1.2 元素允许重复的排列与组合 .....	(393)
1.3 二项式定理及其推广 .....	(398)
§2 鸽笼原理 .....	(402)

2.1 鸽笼原理的最简形式 .....	(402)
2.2 鸽笼原理的一般形式 .....	(403)
§3 容斥原理 .....	(406)
3.1 容斥原理的应用 .....	(409)
§4 母函数 .....	(412)
4.1 母函数法 .....	(412)
4.2 母函数法的应用 .....	(415)
4.3 指数型母函数 .....	(417)
§5 递推关系 .....	(420)
5.1 Fibonacci 序列 .....	(420)
5.2 Hanoi塔问题 .....	(423)
习题六 .....	(426)
主要参考书目 .....	(428)

# 第一章 数

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的一门科学。作为数学研究对象的数，也是研究数学和其他科学技术的基本工具。虽然在中小学数学教学中，对于数的知识，重点只是让学生理解数的意义，学会数的比较和运算，但作为数学教师来说，掌握一定的数的理论则是非常必要的。

根据中学数学教师教学的需要，本章将着重介绍自然数理论、实数理论和整数论的基础知识，也兼顾数的理论的系统性。

## §1 自然数理论

### 1.1 数概念的产生和发展

数，这个我们现在已经很熟悉的概念，它的形成却经历了一个漫长的历史阶段。

最初，人类并没有数的概念。随着生产的发展，人们逐渐感到有需要将一类事物和另一类事物进行量的比较。例如，为了把一堆武器分配给一群猎人，就需要解决武器够不够分的问题。因为人们没有数的概念，只能使用最原始的方法：把武器和猎人一一搭配起来，然后作出应有的判断。如果猎人都拿到了武器，而武器还有剩余，那么猎人比武器少；如果武器已经分光，而还有

一些猎人没有武器，那么猎人比武器多；如果猎人都拿到了武器，而武器又恰巧分光，那么猎人和武器一样多。这种比较方法，用今天的数学语言来说，就是把猎人集合里的元素和武器集合里的元素逐一对应起来，看哪个集合里的元素先“空”（或者都“空”）了。

人们经历了无数次类似上面这样的比较，在经验的积累中逐步形成了“多”和“少”的概念，并意识到这是事物集合的一个重要特征。这样，数的概念就开始萌发了。不过在相当长的历史时期内，人们还不能把数从具体事物中抽象出来。譬如数5，人们还只能用一只手的手指来表示，或者用五个别的物体（如五根木棒等）来表示。今天幼儿学习数数，开始总要和具体事物联系在一起，如两只眼睛、三只兔子、五个苹果等等，反映了这种历史的痕迹。

到了更高的历史阶段，人们通过反复实践，积累了更多的经验，最后才把元素能建立一一对应的一类集合的共同特征抽象出数，并创造了记数的符号和方法，从而形成了自然数的概念。

值得一提的是，在对数的认识以及记数符号和方法的创造方面，我们的祖先都是走在世界前列的。从殷墟出土的甲骨文中可以看到，早在殷商以前，我们的祖先已经创造了十三个记数单字：

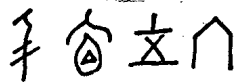
一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千 万

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 百 千 万

以及一些记录十、百、千、万的倍数的合文。例如：

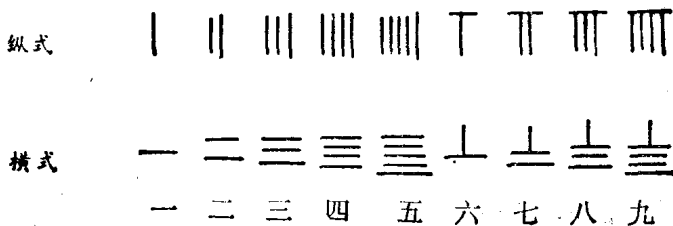


我们的祖先运用十进位制和上述十三个单字及合文，在殷商以前就能记十万以内的任何自然数了，例如“二千六百五十六”记作



稍后，为了记录更大的数，又引进了亿、兆、经、姪等字表示数字的十进单位，即十万为亿，十亿为兆等。后来又把这些单位改从万进，即万万为亿，万亿为兆等。这就是我国最早的十进位制文字记数法。

大约在春秋时期，我们的祖先又创造了算筹记数法。表示数目一到九的算筹有纵横两种形式：



要表示一个多位数，则象现在用阿拉伯数码记数一样，把各位数目从左到右横列，但各位数目的筹式必须纵横相间，且个位数必用纵式。《孙子算经》说：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵。千十相望，万百相当。”说的就是这种记数方法。例如6614用算筹表示出来是  $\perp \top - \text{||||}$ 。数字有空位时，如10340用算筹表示出来是  $| \quad \text{|||} \quad \equiv$ ，千位和个位都不放算筹。

算筹记数法是人类历史上最早出现的十进位值制记数法。我们的祖先，用极简单的竹筹，纵横布置，就可以表示任何自然数。他们的智慧和天才，不能不使我们惊叹。

在世界数学史上，许多国家虽然很早就有了十进制记数法，但应用“逢十进一”的位值制记数法却是相当晚的。印度人开始使用十进位值制记数法大约是公元六世纪，欧洲人直到公元十六世纪以后才开始使用。

社会生产不断发展，人们对客观世界的认识逐渐丰富，不断引进新数，扩展数的集合，建立了今天的数的完备体系。

数概念的发展，首先是由于生产实践为了测量某种量的需要。也就是说，新数的引入与量的度量是分不开的。例如，为了精确表示各种可分割的量，引进了分数(正)；为了精确表示各种不可公度的量，引进了无理数(正)；为了精确表示具有相反方向的量，又引进了负数。

在小学数学里，“0”是作为数概念的第一次扩展被引进的。但从历史上看，“0”作为一个数被引进数的系统是非常迟的。大约在六世纪末印度人开始把“0”作为缺位的符号，它不但比分数的出现晚得多，而且比无理数的出现还要晚。

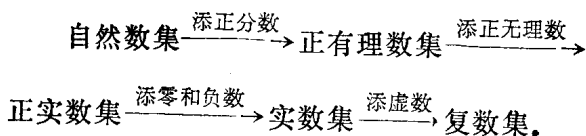
从另一方面看，新数的引入也是为了数学本身的需要。例如，在自然数集合里，除法不是总能实施，亦即方程  $ax = b$  在自然数

集合里不是总有解。为了解决这个问题，就有引进分数(正)的必要。在正数集合里，减法也不是总能实施，亦即方程 $a + w = b$ 在正数集合里不是总有解。为了解决这个问题，又有引进零和负数的必要。

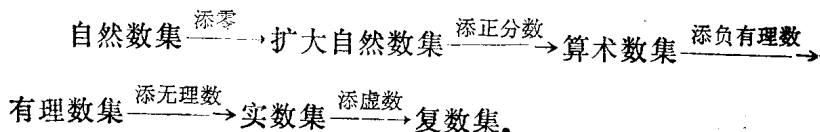
无理数和虚数的引入，都是由于实施开方运算的需要。特别是无理数引入后，虽然正实数的开方运算能实施了，但对于全体实数来说，开方运算仍不是总能实施，一个极简单的方程 $w^2 + 1 = 0$ 在实数集合里仍然无解。十六世纪意大利数学家发现，用求根公式解实系数一元三次方程时，虽然根是实数，但仍需要用负数开平方的形式表示。为了解决这个问题，便引入了虚数。虚数的引入，虽然最先是由于数学本身的需要，但也只有当它得到几何解释并在解决实际问题中得到广泛应用之后，才获得人们的普遍承认。虚数也就不“虚”了。

客观历史表明，数概念的发展是交错、曲折的。在人们还没有全部认识自然数时，分数概念就产生了；在人们还没有认识负数之前，早已有有了无理数概念；在实数理论还没有建立之前，虚数概念已经产生了。因此，数概念发展的客观顺序与我们建立数的理论的逻辑顺序不尽相同。

数概念发展的历史顺序大致如下：



在中小学课程中，数概念扩展的顺序是





建立数的科学理论，一般采取下列程序：

自然数系 $\longrightarrow$ 整数系 $\longrightarrow$ 有理数系 $\longrightarrow$ 实数系 $\longrightarrow$ 复数系。

## 1.2 自然数的定义

从理论上研究自然数，需要解决以下一些问题：

1°怎样给自然数这一概念下定义。

2°怎样确定两个自然数之间的大小关系，并揭示这种关系的内在规律。

3°怎样定义自然数的四则运算，并讨论这些运算具有什么规律。

自然数的理论不止一种，主要的有基数理论和序数理论。这里首先介绍基数理论。

基数理论是以集合的元素的“个数”为基础建立起来的。什么是集合的元素的“个数”？对有限集来说，概念是比较清楚的。例如五个手指或五只羊所构成的集合，它们的个数都是5。这个5是这两个集合所含元素在数量上的共同属性的反映，也就是说手指的集合与羊的集合间可以建立一一对应关系。如果其他集合的元素也能与上述集合的元素建立一一对应关系，同样也用5这个符号来表示它的“个数”。这一概念也可以推广到无限集。凡元素间能建立一一对应关系的集合，我们都认为它们在数量上有相同的属性，就说它们有相同的“势”，即用“势”来表示它们元素的“个数”。

**定义 1** 如果集合 $A$ 与 $B$ 的元素间能够建立起一一对应关系，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 等势。记作 $A \sim B$ 。

根据定义，可知集合等势具有以下性质：

### 定理 1