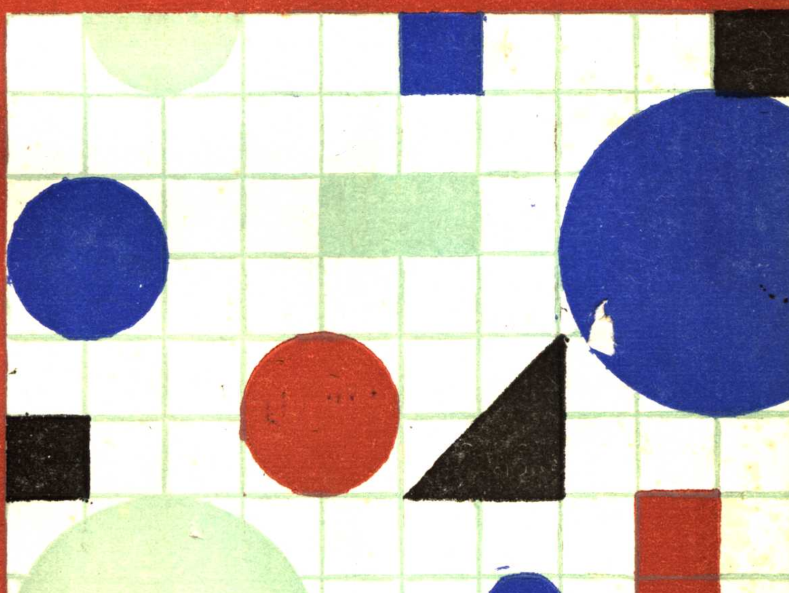
师专试用教材

初等代数研究

张岳中 等编

湖南教育出版社



师专试用教材

初等代数研究

主　编　张岳中
副主编　佘楚云
编　者　李子愚　陈绣卿　吴琼廉
黄又人　黄　鹏　徐长麟
佘楚云　边舒威
主　审　李传和

初等代数研究

张岳中等 编

责任编辑：胡 坚

湖南教育出版社出版发行(长沙展览馆路3号)

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168毫米 32开 印张：13.625 字数：310,000

1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷

印数：1—6,100

ISBN 7—5355—0191—4/G·485

定价：2.95元

前　言

为了适应高师院校数学系(科)和高师函授数学专业的需要，由湖南省高师数学教育研究会主持，组织我省部分高师院校初等代数教师，根据他们多年来的教学经验，和目前教育改革发展的要求，编写此书，作为试用课本。

本书的特点有三：第一，取材简要，不要求面面俱到。如第一章讨论数时，重点地讲自然数与实数，而没有谈有理数；第三章，抓住方程的同解性，进行详细讨论；第五章讨论函数时，着重谈函数概念发展的唯物辨证过程，和利用代数方程判断初等函数的超越性。第二，尽量揭示教材中的数学思想、方法。如第二章中揭示恒等变形的目的，在于提供各式各样的恒等表达式，便于解题时有目的地选用；而方程、不等式的同解变形，在于用易于求解的同解式替换原式；第五章中的RMI原则，突出了数学系统的转化，在于由已知引得未知；第六章突出了容斥原则、母函数、递归关系这三种解题思路的特点。第三，多与高等数学挂钩，居高临下地解决问题。如开始讲不等式时，加上了“有序域”一节，为后面的讨论打下了理论基础；证明不等式时，讨论了凸、凹函数；解不定方程时，讨论了同余式；对方程无理根的近似值，讲了几种求法。同时，对例题的选择，如何做到思维丰富，也花了一定工夫。

本书由湖南师范大学张岳中担任主编，李传和担任主审，衡

阳师余楚云担任副主编。编写的具体分工是：怀化师专李子愚编写第一章，邵阳师专陈绣卿编写第二章，常德师专吴琼廉编写第三章前六节，娄底师专黄又人编写第三章第七节，郴州师专黄鹏、徐长麟编写第四章，衡阳师专余楚云编写第五章，湘潭市教师进修学院边舒威编写第六章。

限于水平，加之时间仓促，本书难免存在缺点和错误，恳请读者指正。

最后，我们对湖南教育出版社的大力支持，表示衷心的感谢。

编者　1987年6月

目　录

第一章 数

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的一门科学。作为数学研究对象的数，也是研究数学和其他科学技术的基本工具。虽然在中小学数学教学中，对于数的知识，重点只是让学生理解数的意义，学会数的比较和运算，但作为数学教师来说，掌握一定的数的理论则是非常必要的。

根据中学数学教师教学的需要，本章将着重介绍自然数理论、实数理论和整数论的基础知识，也兼顾数的理论的系统性。

§1 自然数理论

1.1 数概念的产生和发展

数，这个我们现在已经很熟悉的概念，它的形成却经历了一个漫长的历史阶段。

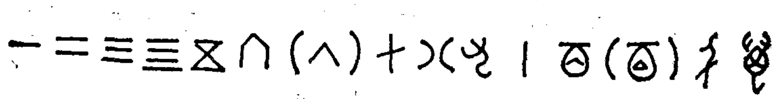
最初，人类并没有数的概念。随着生产的发展，人们逐渐感到有需要将一类事物和另一类事物进行量的比较。例如，为了把一堆武器分配给一群猎人，就需要解决武器够不够分的问题。因为人们没有数的概念，只能使用最原始的方法：把武器和猎人一一搭配起来，然后作出应有的判断。如果猎人都拿到了武器，而武器还有剩余，那么猎人比武器少；如果武器已经分光，而还有

一些猎人没有武器，那么猎人比武器多；如果猎人都拿到了武器，而武器又恰巧分光，那么猎人和武器一样多。这种比较方法，用今天的数学语言来说，就是把猎人集合里的元素和武器集合里的元素逐一对应起来，看哪个集合里的元素先"空"（或者都"空"）了。

人们经历了无数次类似上面这样的比较，在经验的积累中逐步形成了"多"和"少"的概念，并意识到这是事物集合的一个重要特征。这样，数的概念就开始萌发了。不过在相当长的历史时期内，人们还不能把数从具体事物中抽象出来。譬如数 5，人们还只能用一只手的手指来表示，或者用五个别的物体（如五根木捧等）来表示。今天幼儿学习数数，开始总要和具体事物联系在一起，如两只眼睛、三只兔子、五个苹果等等，反映了这种历史的痕迹。

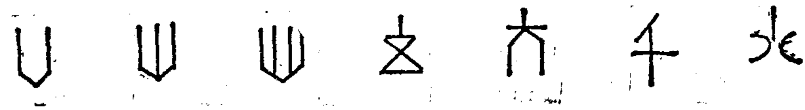
到了更高的历史阶段，人们通过反复实践，积累了更多的经验，最后才把元素能建立一一对应的一类集合的共同特征抽象出数，并创造了记数的符号和方法，从而形成了自然数的概念。

值得一提的是，在对数的认识以及记数符号和方法的创造方面，我们的祖先都是走在世界前列的。从殷墟出土的甲骨文中可以看到，早在殷商以前，我们的祖先已经创造了十三个记数单字：



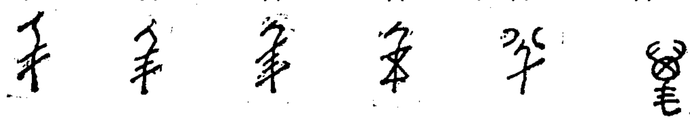
一 二 三 四 五 六　　七 八 九 十 百　　千 万

以及一些记录十、百、千、万的倍数的合文。例如：



二十　三十　四十　五十　六十　七十　八十

二百　三百　四百　五百　六百　八百　九百



二千　三千　四千　五千　八千　三万

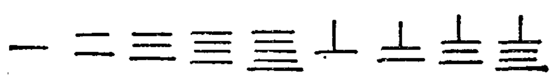
我们的祖先运用十进位制和上述十三个单字及合文，在殷商以前就能记十万以内的任何自然数了，例如“二千六百五十六”记作

稍后，为了记录更大的数，又引进了亿、兆、经、核等字表示数字的十进单位，即十万为亿，十亿为兆等。后来又把这些单位改从万进，即万万为亿，万亿为兆等。这就是我国最早的十进位制文字记数法。

大约在春秋时期，我们的祖先又创造了算筹记数法。表示数目一到九的算筹有纵横两种形式：

纵式

横式



一　二　三　四　五　六　七　八　九

要表示一个多位数，则象现在用阿拉伯数码记数一样，把各位数目从左到右横列，但各位数目的筹式必须纵横相间，且个位数必用纵式。《孙子算经》说："凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵。千十相望，万百相当。"说的就是这种记数方法。例如6614用算筹表示出来是⊥⊤一||||。数字有空位时，如10340用算筹表示出来是|　|||　≣　，千位和个位都不放算筹。

算筹记数法是人类历史上最早出现的十进位值制记数法。我们的祖先，用极简单的竹筹，纵横布置，就可以表示任何自然数。他们的智慧和天才，不能不使我们惊叹。

在世界数学史上，许多国家虽然很早就有了十进制记数法，但应用"逢十进一"的位值制记数法却是相当晚的。印度人开始使用十进位值制记数法大约是公元六世纪，欧洲人直到公元十六世纪以后才开始使用。

社会生产不断发展，人们对客观世界的认识逐渐丰富，不断引进新数，扩展数的集合，建立了今天的数的完备体系。

数概念的发展，首先是由于生产实践为了测量某种量的需要。也就是说，新数的引入与量的度量是分不开的。例如，为了精确表示各种可分割的量，引进了分数(正)；为了精确表示各种不可公度的量，引进了无理数(正)；为了精确表示具有相反方向的量，又引进了负数。

在小学数学里，"0"是作为数概念的第一次扩展被引进的。但从历史上看，"0"作为一个数被引进数的系统是非常迟的。大约在六世纪末印度人开始把"0"作为缺位的符号，它不但比分数的出现晚得多，而且比无理数的出现还要晚。

从另一方面看，新数的引入也是为了数学本身的需要。例如，在自然数集合里，除法不是总能实施，亦即方程$ax=b$在自然数

集合里不是总有解。为了解决这个问题，就有引进分数(正)的必要。在正数集合里，减法也不是总能实施，亦即方程$a+x=b$在正数集合里不是总有解。为了解决这个问题，又有引进零和负数的必要。

无理数和虚数的引入，都是由于实施开方运算的需要。特别是无理数引入后，虽然正实数的开方运算能实施了，但对于全体实数来说，开方运算仍不是总能实施，一个极简单的方程$x^2+1=0$在实数集合里仍然无解。十六世纪意大利数学家发现，用求根公式解实系数一元三次方程时，虽然根是实数，但仍需要用负数开平方的形式表示。为了解决这个问题，便引入了虚数。虚数的引入，虽然最先是由于数学本身的需要，但也只有当它得到几何解释并在解决实际问题中得到广泛应用之后，才获得人们的普遍承认。虚数也就不“虚”了。

客观历史表明，数概念的发展是交错、曲折的。在人们还没有全部认识自然数时，分数概念就产生了；在人们还没有认识负数之前，早已有了无理数概念；在实数理论还没有建立之前，虚数概念已经产生了。因此，数概念发展的客观顺序与我们建立数的理论的逻辑顺序不尽相同。

数概念发展的历史顺序大致如下：

$$\text{自然数集}\xrightarrow{\text{添正分数}}\text{正有理数集}\xrightarrow{\text{添正无理数}}\text{正实数集}\xrightarrow{\text{添零和负数}}\text{实数集}\xrightarrow{\text{添虚数}}\text{复数集。}$$

在中小学课程中，数概念扩展的顺序是

$$\text{自然数集}\xrightarrow{\text{添零}}\text{扩大自然数集}\xrightarrow{\text{添正分数}}\text{算术数集}\xrightarrow{\text{添负有理数}}\text{有理数集}\xrightarrow{\text{添无理数}}\text{实数集}\xrightarrow{\text{添虚数}}\text{复数集。}$$

建立数的科学理论，一般采取下列程序：

自然数系⟶整数系⟶有理数系⟶实数系⟶复数系。

1.2 自然数的定义

从理论上来研究自然数，需要解决以下一些问题：

1°怎样给自然数这一概念下定义。

2°怎样确定两个自然数之间的大小关系，并揭示这种关系的内在规律。

3°怎样定义自然数的四则运算，并讨论这些运算具有什么规律。

自然数的理论不止一种，主要的有基数理论和序数理论。这里首先介绍基数理论。

基数理论是以集合的元素的“个数”为基础建立起来的。什么是集合的元素的“个数”?对有限集来说，概念是比较清楚的。例如五个手指或五只羊所构成的集合，它们的个数都是5．这个5是这两个集合所含元素在数量上的共同属性的反映，也就是说手指的集合与羊的集合间可以建立一一对应关系。如果其他集合的元素也能与上述集合的元素建立一一对应关系，同样也用5这个符号来表示它的“个数”．这一概念也可以推广到无限集。凡元素间能建立一一对应关系的集合，我们都认为它们在数量上有相同的属性，就说它们有相同的“势”，即用“势”来表示它们元素的“个数”．

定义1 如果集合A与B的元素间能够建立起一一对应关系，则称集合A与集合B等势。记作$A\sim B$。

根据定义，可知集合等势具有以下性质：

定理1