新世纪财经院校经济数学系列教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

新世纪财经院校经济数学系列教材

高 等 数 学

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/上海财经大学应用数学系编. —上海:上海财经大学出版社,2003.8
(新世纪财经院校经济数学系列教材)
ISBN 7-81049-974-2/O·18

Ⅰ.高… Ⅱ.上… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第060511号

GAODENG SHUXUE
高 等 数 学

上海财经大学应用数学系 编

责任编辑 刘光本 封面设计 周卫民

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海第二教育学院印刷厂印刷
上海浦东北联装订厂装订
2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 25.25印张 630千字
印数:0 001—5 000 定价:38.00元

内 容 提 要

本书系上海财经大学应用数学系编写的经济数学系列教材中的一本。

全书科学、系统地介绍了高等数学的基本内容，重点介绍了高等数学的方法及其在经济管理中的应用，本书各章均配备了一定的习题，并附有相应的参考答案。书中打有“*”号的内容，可根据各专业教学时数的不同，作为选学内容或学生自学用。

本书可作为高等院校经济管理类专业的数学基础课教材之一，也可作为考研学生自学、复习用书。

前　　言

当前，我们正面临知识经济的机遇和挑战。新时期的国力竞争将是知识、科技和人才的竞争，归根到底是教育的竞争。根据高等教育面向21世纪发展的要求，我们着手编写了经济数学系列教材，现在出版的是《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》三本。

在这套系列教材的编写过程中，我们注重了以下几点：

1. 为适应我国在21世纪经济建设和发展的需要，培养“厚基础，宽口径，高素质”的财经人才，基础课，特别是数学基础课应该得以加强。

2. 作为财经类院校数学基础课的教材，我们在注意保持数学学科本身的科学性、系统性的同时，力求深入浅出，突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍。

3. 注意兼顾经济管理学科各专业的后继课程以及学生继续深造的需要。

《高等数学》由上海财经大学应用数学系编写。参加编写的教师有：陈慧玉（第一、二章），杨爱珍（第三、四、五、六章），殷承元（第七、八、九、十、十二章），陈启宏（第十一章），卢慧芳（第十三章），最后由陈启宏教授对全书进行了统稿。

在本教材编写过程中，我们得到了学校的重视和支持，并得到了上海财经大学出版社的大力协助，在此一并致谢。

编　者

2003年6月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象，它从数量方面反映了一切客观事物之间的相互联系与相互影响。极限是高等数学的理论基础，每一个重要概念的产生过程可以说是人类对极限思想的认识逐渐加深、逐渐明确的过程。本章将介绍函数、极限以及函数连续性等基本内容。

第一节　函　　数

一、函数概念及其表示法

所谓变量是指在某一过程中不断变化的量。例如某地的气温、某时刻世界人口的总数等都是变量。在任何一种自然现象或任何一个经济活动中，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此联系并遵循着一定的变化规律，这种变量之间的依赖关系就是数学上要讨论的函数关系。我们先来看两个例子。

［例 1］　某化肥厂生产某种化肥 1 000 吨，每吨定价 600 元。如果销售量不超过 700 吨，按此价格出售；如超过 700 吨，则超过部分打九折出售。此时销售总收入 y(元)与销售量 x(吨)之间的关系可用下式表示：

$$y=\begin{cases}600x & (0<x\leqslant 700)\\ 600\cdot 700+600\cdot 0.9\cdot(x-700) & (700<x\leqslant 1\,000)\end{cases}$$

当 x 在$(0,\ 1\,000]$内任意取定一个数值时，由此关系式就可确定出 y 的相应数值。

［例 2］　设有一个半径为 R 的半圆形纸片，做成一个圆锥体。此时易知圆锥体的底圆半径 $r=\dfrac{R}{2}$，圆锥体的高 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$，于是圆锥体的体积 V 可用下式表示：

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\quad 即\ V=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi R^3$$

当 R 在$(0,\ +\infty)$内任意取定一个数值时，由此式就可确定出 V 的相应数值。

尽管上述两例中，变量之间联系的表达式完全不同，但它们却有着相同的本质，即在某个过程中的两个变量是相互联系的，当其中一个变量在某一范围内每取一个值时，另一个变量就按照一定的规律，有惟一确定的值与之对应。变量之间的这种相互依赖关系就是函数的概念，下面给出一元函数的定义。

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在某实数集合 D 内任取一个数值时，变量 y 按照一定的法则，都有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数。记作 $y=f(x)$，其中变量 x 称为自变量，它的取值范围 D 称为函数的定义域，变量 y 称为因变量，它的取值范围是函数的值域。

从函数的定义中不难看出，定义域与对应规律是构成函数的两个基本要素。如果两个函数的定义域与对应规律都分别相同，则称这两个函数相同。

函数的定义域就是使函数表达式在实数范围内有意义的自变量的全体。当然，如在实际问题中，尚须根据问题的实际意义来确定。

[例 3] 求下列函数的定义域：

(1) $y = \lg(4 - x^2) + \arcsin(2x - 1)$

(2) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x| - x}$

解 (1) 由 $\begin{cases} 4 - x^2 > 0 \\ |2x - 1| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1$ 定义域为$[0, 1]$

(2) 由 $\begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \\ |x| - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow [-2, 0)$ 定义域为$[-2, 0)$

[例 4] 设 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 9$，求 $f[g(x)]$ 的定义域。

解 $f[g(x)] = \sqrt{x^2 - 9}$

由 $x^2 - 9 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3$ 或 $x \leqslant -3$

定义域为 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

在函数的定义中，并不要求当自变量变化时函数的值一定要改变，因此即使所有的 x 值都对应于一个 y 值也是允许的，即常数函数 $y = c$。

函数的表示法通常有三种：解析法、表格法和图示法。其中以解析法表示函数最为简捷，易于运算与讨论。

在用解析法表示函数时，值得注意的是分段函数。分段函数指的是，当自变量在定义域的不同范围时，其对应规律不同，它仍旧是一个函数，而不是几个函数。

[例 5] 取整函数 $y = [x]$ 表示不超过 x 的最大整数，即 $y = [x] = n$, $n \leqslant x < n+1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 是一个分段函数，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，图形如图 1-1 所示。

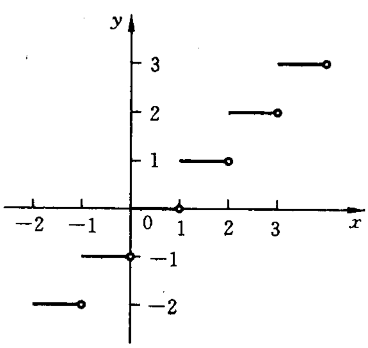

图 1-1

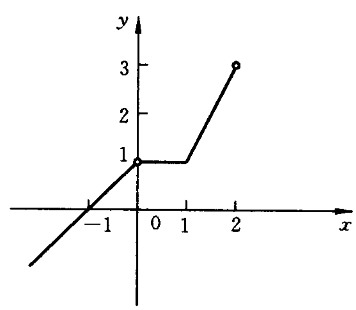

图 1-2

[例 6] $f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x < 0) \\ 1 & (0 < x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \leqslant x < 2) \end{cases}$

它是一个分段函数，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$，图形如图 1-2 所示。

二、函数的几种特性

有些函数具有某些特殊性质，掌握这些性质对研究函数很有帮助。

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义，若存在正数 M，使得对于该区间上任意点 x，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在该区间上有界；否则，就称函数 $f(x)$ 在该区间上无界。

显然，在某区间上有界函数 $f(x)$ 的图形一定在该区间上介于两条平行直线 $y = \pm M$ 之间。

如果 $f(x)$ 在某区间上有定义，若存在数 A（或 B），使得对于该区间上任意点 x，都有 $f(x) \leqslant A$（或 $f(x) \geqslant B$）成立，则称 $f(x)$ 在该区间上有上界（或有下界）。

显然，有界函数必有上界和下界。

例如 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为 $|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$；函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在定义域 $[-1, 1]$ 上有界，因为 $0 \leqslant y \leqslant 1$。而函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是无界函数，因为它只有下界而无上界。

注意函数的有界性与所选的区间有关。例如 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界，但在 $(1, 2)$ 内有界。

2. 函数的奇偶性

定义 1.3 如果函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的实数集 D 内有定义，若对每一个 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若对每一个 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

例如，$y = x^3$、$y = \sin x$ 是奇函数，而 $y = x^2$、$y = \cos x$ 是偶函数。显然，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称。

[例 7] 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \dfrac{1}{a^x+1} - \dfrac{1}{2}$（其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$）

(2) $f(x) = \begin{cases} -x^3+1 & (x<0) \\ x^3+1 & (x \geqslant 0) \end{cases}$

解 (1)
$$f(-x) = \frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1+a^x} - \frac{1}{2} = \frac{a^x+1-1}{1+a^x} - \frac{1}{2}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+a^x} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{1+a^x} + \frac{1}{2}$$
$$= -f(x)$$

因此，$f(x)$ 是奇函数。

(2)
$$f(-x) = \begin{cases} -(-x)^3+1 & (-x<0) \\ (-x)^3+1 & (-x \geqslant 0) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x^3+1 & (x>0) \\ -x^3+1 & (x \leqslant 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^3+1 & (x\geqslant 0)\\ -x^3+1 & (x<0)\end{cases}$$

$$=f(x)$$

因此，$f(x)$是偶函数。

3. 函数的单调性

定义 1.4 设函数 $f(x)$在某区间上有意义，若对于该区间上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在该区间上单调增加；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$在该区间上单调减少。

单调增加与单调减少函数统称为单调函数。例如 $y=x^2$ 在$(-\infty, 0)$内单调减少，在$(0, +\infty)$内单调增加，但在整个定义域$(-\infty, +\infty)$内它不是单调函数。

［例 8］ 判断函数 $y=x^3$ 的单调性。

解 $x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]$

当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $x_1^3<x_2^3$。

因此，函数 $y=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$内单调增加，它的图形如图1-3所示。

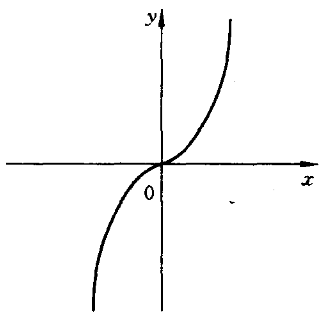

图 1-3

对函数单调性的讨论，将在第三章中作进一步的研究。

4. 函数的周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得对于定义域内的任意 x，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$为周期函数。满足上式的最小正数 T_0 称为函数 $f(x)$的周期。

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数，而 $y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是周期为 π 的周期函数。

［例 9］ 求函数 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的周期。

解 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x$$

$$=1-\frac{\sin^2 2x}{2}=1-\frac{1-\cos 4x}{4}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$

所以，y 的周期为 $T=\frac{\pi}{2}$。

三、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数。现分别简单介绍如下：

(1) 幂函数 $y=x^\mu$，μ 为任意实数，其定义域随 μ 的不同而不同。

(2) 指数函数 $y=a^x$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，其定义域为$(-\infty, +\infty)$。当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为单调减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为单调增函数。

在实际中，常出现以 e 为底的指数函数 $y=e^x$，其中 $e\approx 2.71828\cdots$ 是一个无理数。见图 1-4。

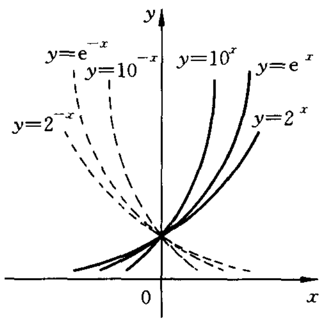

图 1-4

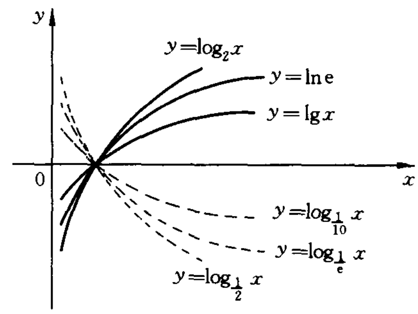

图 1-5

(3) 对数函数 $y=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，其定义域为$(0, \infty)$，图 1-5 展示了 a 取不同值时对数函数的图形。

以 10 为底的对数函数记为 $y=\lg x$，称为常用对数，而以 e 为底的对数函数记为 $y=\ln x$，称为自然对数。

根据对数的定义，可以推出两个常用等式：

$$a^{\log_a N}=N\ (a>0,\ a\neq 1)\quad (称为对数恒等式)$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\quad (称为换底公式)$$

(4) 三角函数有以下 6 个：正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$。

正弦函数与余弦函数的定义域都为$(-\infty, +\infty)$。

正切函数与正割函数的定义域为 $\left\{x \middle| x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$，余切函数与余割函数的定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi,\ k\in \mathbf{Z}\}$。

这 6 个三角函数都是周期函数，$\sin x$、$\cos x$、$\sec x$、$\csc x$ 的最小正周期为 2π；$\tan x$ 与 $\cot x$ 的最小正周期为 π。它们的图形如图 1-6、图 1-7 所示。

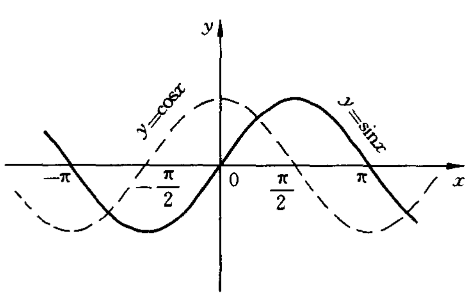

图 1-6

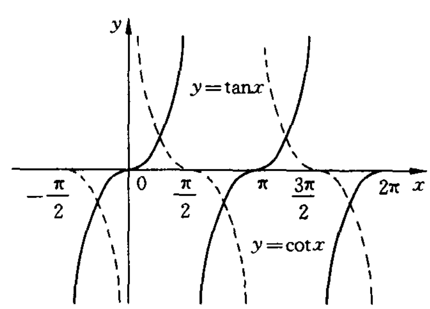

图 1-7

(5) 反三角函数。

由于三角函数有周期性，因此对应于一个函数值 y 的自变量 x 有无穷多个，在整个定义域上三角函数不存在反函数。但我们可以选取适当的区间上考虑反函数。

反正弦函数 $y = \arcsin x$，它是正弦函数 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数。其定义域为 $[-1, 1]$，值域 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，如图 1 - 8 所示。

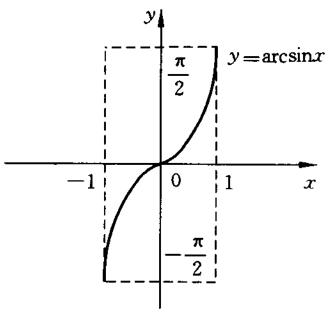

图 1 - 8

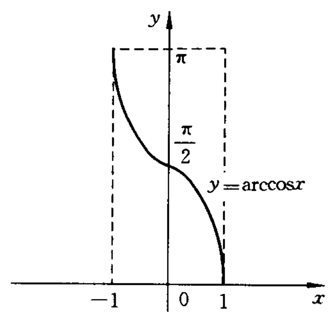

图 1 - 9

反余弦函数 $y = \arccos x$，它是余弦函数 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上的反函数。其定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$，如图 1 - 9 所示。

反正切函数 $y = \arctan x$，它是正切函数 $y = \tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数。其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，如图 1 - 10 所示。

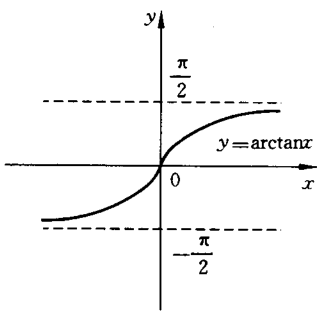

图 1 - 10

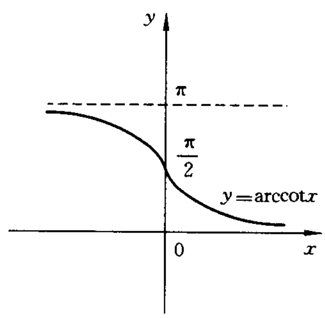

图 1 - 11

反余切函数 $y = \text{arccot}\, x$，它是余切函数 $y = \cot x$ 在 $(0, \pi)$ 上的反函数，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, \pi)$，如图 1 - 11 所示。

还有许多重要的三角公式，在此就不一一列出。

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$，若将 y 作为自变量，x 作为因变量，则由关系式 $y = f(x)$ 惟一确定的函数 $x = \varphi(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数。习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，因此 $x = \varphi(y)$ 可写为 $y = \varphi(x)$ 或用 $y = f^{-1}(x)$ 表示。

显然 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数。它们的图形关于直线 $y=x$ 对称。

需要指出的是，并非所有的函数都存在反函数。例如，函数 $y=x^2$ 在定义域$(-\infty, +\infty)$内就没有反函数。只有一一对应函数，才存在反函数。单调增（或减）的函数显然是一一对应函数，所以必存在反函数。

例如，由 $y=-\sqrt{x-1}$ 可确定出 $x=y^2+1\ (y\leqslant 0)$，因此函数 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数为 $y=x^2+1\ (x\leqslant 0)$。

3. 复合函数

定义 1.6 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，如果 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域之交集非空，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$。其中 x 称为自变量，y 是因变量，u 是中间变量。

例如，$y=e^u$ 与 $u=\sin x$ 构成复合函数 $y=e^{\sin x}$，$y=\sqrt{u+1}$ 与 $u=\lg x$ 构成复合函数 $y=\sqrt{\lg x+1}$。

中间变量的个数可以多于一个，即可以由两个以上的函数经过复合构成一个函数。例如，$y=\cos^3\sqrt{x}$ 是由 $y=u^3$ 与 $u=\cos v$ 以及 $v=\sqrt{x}$ 复合而成，其中 u 与 v 都是中间变量。

在分解复合结构时，必须由表及里，逐层分解，每一层都是基本初等函数或者已是基本初等函数的四则运算形式。分清复合结构，非常重要。

必须注意的是，并非任何两个函数都可构成一个复合函数。例如，由 $y=\lg u$ 与 $u=-x^2$ 就不能构成复合函数，这是因为 $y=\lg u$ 的定义域与 $u=-x^2$ 的值域之交集是空集。

[例 10] 分解下列复合函数的复合结构。

(1) $y=\sin e^{x^2+x}$ (2) $y=\ln\cos\sqrt{x^2+1}$

解 (1) 最外层是 $y=\sin u$，第二层是 $u=e^v$，内层是 $v=x^2+x$。

(2) 最外层是 $y=\ln u$，第二层是 $u=\cos v$，第三层是 $v=\sqrt{w}$，最内层是 $w=x^2+1$。

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的，且可用一个式子表示的函数称为初等函数。

例如，$y=\lg\cos x$、$y=\sin^3\sqrt{x}+e^{-2x}$ 等都是初等函数。

通常一个分段函数不是初等函数，但有些分段函数仍是初等函数。例如：

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & (x<0)\\ x & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

是分段函数，但它可表示为 $f(x)=\sqrt{x^2}$，可看作初等函数。

从以 e 为底的指数函数出发，给出以下几个在应用上常常遇到的函数：

双曲正弦：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦：$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

双曲正切：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

这里再介绍形如 $[f(x)]^{g(x)}$ 的函数（其中 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是初等函数，$f(x)>0$），称之为

幂指函数。由于

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

因此幂指函数也是初等函数。

例如，$x^{\sin x}(x>0)$，$(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>-1)$ 都是初等函数。

四、常见的经济函数

1. 成本函数、收益函数和利润函数

人们在从事生产和经营活动时，关心的是产品的成本、销售的收益和获得的利润。通常把成本、收益和利润称为经济变量。在不考虑一些次要因素的情况下，这些经济变量都只与其产品的产量 x 有关，可以看成是 x 的函数。

(1) 成本函数 $C(x)$，它包括固定成本 C_0 和可变成本 $C_1(x)$，即 $C(x)=C_0+C_1(x)$，而$\frac{C(x)}{x}$称之为平均成本函数，即单位产品的成本，记作$\overline{C(x)}$即 $\overline{C(x)}=\frac{C(x)}{x}$。

(2) 收益函数 $R(x)$，设产品的单价为 ρ，如产销平衡，即产量就是销售量，则收益 $R(x)=\rho\cdot x$，这里的 ρ 可以是给定的某常数，也可以是需求量 x 的函数 $\rho(x)$，那么 $R(x)=\rho(x)\cdot x$。

(3) 利润函数 $L(x)$，显然有 $L(x)=R(x)-C(x)$。

2. 需求函数与供给函数

市场上某种商品的需求量是指消费者愿意购买且有能力购买的该商品的数量，它与该商品本身的价格、消费者的收入以及与该商品有关的商品的价格等因素有关，我们暂且只把需求量 Q_d 看作是该商品本身价格 ρ 的函数，即 $Q_d=f_d(\rho)$。

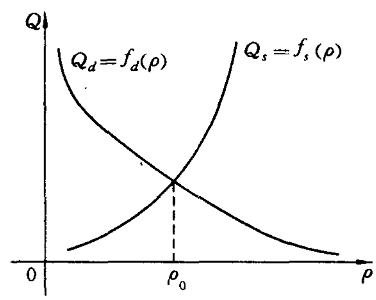

图 1-12

一般来说，需求函数 $Q_d=f_d(\rho)$ 是单调减函数。

市场上某种商品的供给量 Q_s 也可以看作是该商品本身价格 ρ 的函数，记作 $Q_s=f_s(\rho)$。

供应函数 $Q_s=f_s(\rho)$ 是价格的单调增函数。

在经济领域中，所谓"均衡价格"就是指市场上对某种商品的需求量与供给量相等时的价格 ρ_0。当市场价格 $\rho>\rho_0$ 时，供大于求，商品滞销；当 $\rho<\rho_0$ 时，供不应求，商品短缺，如图1-12所示。

[例 11] 生产某种产品需固定成本 3 万元，每多生产 1 百台，成本增加 2 万元，已知需求函数 $Q=20-2\rho$（其中 ρ 表示价格，单位为万元；Q 表示需求量，单位为百台），假设产销平衡，试写出利润函数 $L(Q)$的表达式。

解 收益 $R(Q)=\rho\cdot Q=\frac{20-Q}{2}\cdot Q=-\frac{1}{2}Q^2+10Q$

成本 $C(Q)=3+2Q$

利润 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{1}{2}Q^2+8Q-3 \quad (0<Q<20)$

[例 12] 若某商品的需求量 Q 是价格 ρ 的线性函数。已知每台售价 500 元时，每月可销售 1 500 台，如果售价降为 450 元时，每月可增销 250 台，试写出需求函数。

解 设 $Q = ap + b$

由题意得 $\begin{cases} 1\,500 = 500a + b \\ 1\,750 = 450a + b \end{cases}$

解出 $a = -5$，$b = 4\,000$，于是需求函数为 $Q = -5p + 4\,000$。

第二节 极限的概念与性质

一、数列极限的定义与几何意义

按照一定规律排列、永无终止的一列数 a_1，a_2，…，a_n，…称为数列，简记为$\{a_n\}$。其中，第 n 项 a_n 称为数列的通项。数列$\{a_n\}$可看作是定义在自然数集上的函数：

$$a_n = f(n),\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

例如，(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，…，$\dfrac{1}{2^n}$，…

(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$：$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$，…，$\dfrac{n}{n+1}$，…

(3) $\{(-1)^n\}$：-1，1，-1，…，$(-1)^n$，…

(4) $\{3n\}$：3，6，9，…，$3n$，…

现考察当自变量 n 无限增大时，通项 a_n 的变化趋势。不难看出，上面数列(1)与(2)中，通项 a_n 无限趋向于某个确定的数，此时称数列$\{a_n\}$为收敛数列；而数列(3)与(4)中，通项 a_n 不趋向于某个确定的数，此时称数列$\{a_n\}$为发散数列。

数列极限指的是：

设数列$\{a_n\}$，当项数 n 无限增大时，如果通项 a_n 无限趋近于某个常数 A，则称 A 为数列$\{a_n\}$的极限。记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

所谓 a_n 无限趋近于 A，即 $|a_n - A|$ 无限趋近于零。以数列(2)为例作如下分析：

对于$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$：$|a_n - A| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$，若要 $|a_n - 1| < \dfrac{1}{100}$，即$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{100}$，得 $n > 99$，这表示从数列的第 100 项起，以后各项与 1 之差的绝对值都小于$\dfrac{1}{100}$；若要 $|a_n - 1| < \dfrac{1}{1\,000}$，即$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{1\,000}$，得 $n > 999$，这表示从数列的第 1 000 项起，以后各项与 1 之差的绝对值都小于$\dfrac{1}{1\,000}$。若要 $|a_n - 1| < \varepsilon$（其中 ε 是任意给定的一个充分小的正数），即 $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$，得 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$，这表示对于项数 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ 的以后各项，总有 $|a_n - 1| < \varepsilon$ 成立。

由于 ε 是任意给定的充分小的正数，不等式 $|a_n - 1| < \varepsilon$ 就刻画了数列 $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 的极限为 1 这个事实。