ZHONGXUESHUXUESIWEIFANGFACONGSHU

中学数学思维方法丛书

逻辑与演绎

吴大樑　过伯祥　编著

LUOJIYUYANYI
WUDALIANG
GUOBOXIANG

ZHONGXUE
SHUXUE
SIWEIFANGFA
CONGSHU

大象出版社

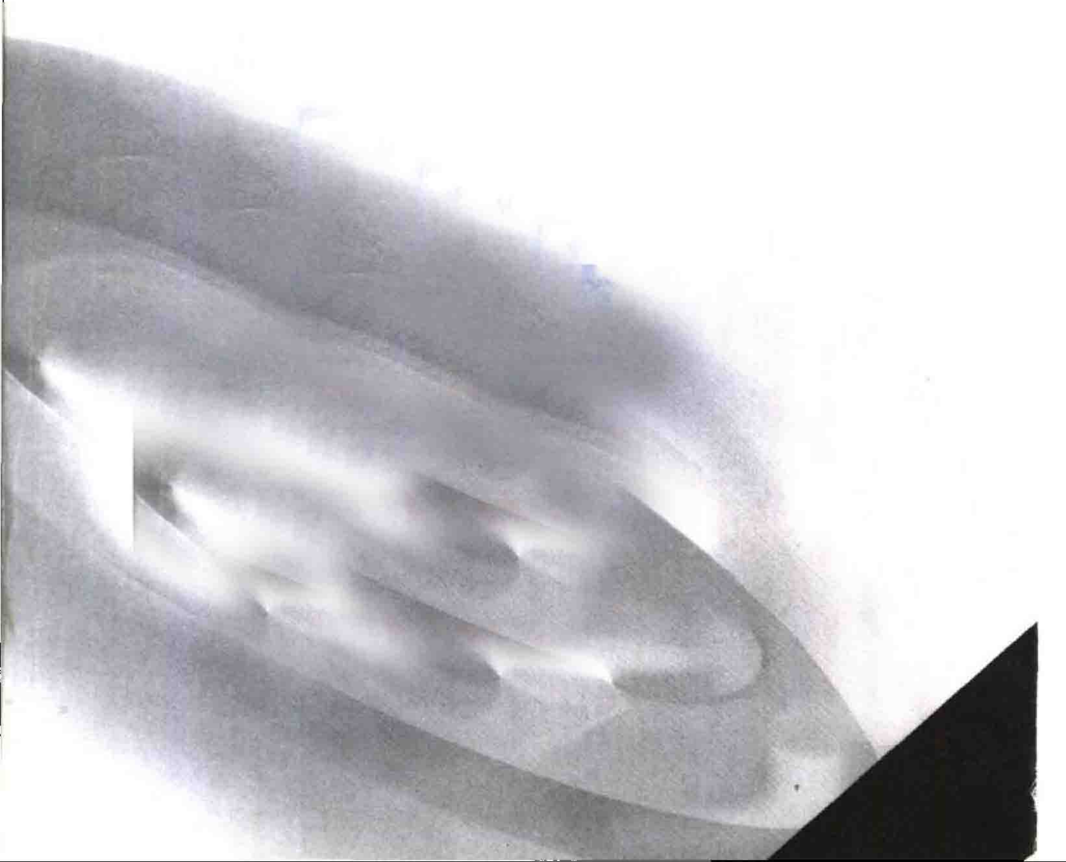
中 学 数 学 思 维 方 法 丛 书

逻辑与演绎

吴大樑　过伯祥　编著

大象出版社

LUOJIYUYANYI
WUDALIANG
GUOBOXIANG



图书在版编目(CIP)数据

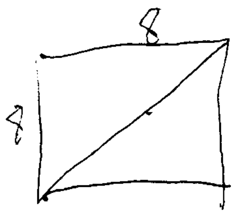
逻辑与演绎/吴大梁，过伯祥编著．-郑州：大象出版社，1999

(中学数学思维方法丛书/王梓坤，张乃达主编)

ISBN 7-5347-2336-1

Ⅰ．逻… Ⅱ．过… Ⅲ．数学课-中学-教学参考资料 Ⅳ．G634.803

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 21770 号



责任编辑　侯耀宗　　　　责任校对　王　森

大象出版社出版(郑州市农业路 73 号　邮政编码 450002)

新华书店经销　　河南省瑞光印务股份有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 6.375　字数 141 千字

1999 年 9 月第 1 版　　1999 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—2 500 册　　定　价 7.20 元

若发现印、装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。

印厂地址　郑州市二环路 35 号

邮政编码　450053　　电话　(0371)3822319

中学数学思维方法丛书

主　　编　王梓坤　张乃达

编　　委　(以姓氏笔画为序)

　　　　　王梓坤　过伯祥　杨世明

　　　　　张乃达　蒋　声

本册作者　吴大樑　过伯祥

序

早在1995年8月，大象出版社（原河南教育出版社）在扬州举办了一个座谈会，邀请十余位教学水平很高的数学教师参加，商讨出版一套“中学数学思维方法丛书”。与会同仁认为，这是一个富有创见的倡议，因而得到大家热烈赞许。提供一套既有较深厚的理论基础，又富有文采和启发性、可读性的关于数学思维的参考书，对中学数学教学，无疑会是非常有益的；而更主要的，广大的中学生们，将在形象思维、逻辑推理和严密计算等方面，学到很多的东西。这对将来无论做什么工作，都会受益无穷。

回想我们青少年时期学习数学的情景，总会有几分乐趣几分惊异。做出了几道难题是乐趣，而惊异则来自方法的进步。记得小学算鸡兔同笼，必须东拼西凑，多一只兔便比鸡多了两条腿，好不容易才能做出一题。而学过代数，这类问题便变得极为简单。做几何题也一样，必须具体问题具体解决，而学过解析几何后便有了一般的

程序可循。至于算圆的面积,如果不用积分便会相当麻烦。由此可见,方法的进步对科学的发展是何等重要。以上是对学习现成的东西而言。如果要进行科研,从事创新、发现或发明,那就更应重视方法,特别是思维方法。没有新思想,没有新方法,要超过前人是很困难的。有鉴于此,一些优秀的数学家便谆谆告诫学生们,要非常重视学习方法和研究方法。美国著名数学家 G. Pólya 写过好几种关于数学思想方法的书,如《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》,后来都成为世界名著,很受欢迎。

学习任何一门科学,都有掌握知识和培养能力两方面。一般说来,前者比较容易。因为知识已经成熟,而且大都已经过前人整理,成为循序渐进的教材。但能力则不然,那是捉摸不定、视之无形的东西,主要靠自己去思考,去探索,去总结,去刻苦锻炼。老师的培养固然重要,但只能起辅导作用。只可意会,不可言传,而有时甚至连意会都做不到。正如游泳,只靠言传是绝对学不会的。这是对受业人而说的。

至于老师,则应无保留地传授自己的经验和体会,尽量缩短学生学习的时间。中国有句古诗:“鸳鸯绣出凭君看,不把金针度与人。”意思是说知识可以输出,但能力不可传授。前一句话意思很好,后一句应改为“急把金针度与人”。这套丛书,正是专门传授金针的。

一般的科学研究方法,可分为演绎与归纳两大类。在数学中,演绎极为重要,而归纳则基本上用不上,除了 C. F. Gauss 等人偶尔通过观察数列以提出一些数论中的猜想而外。不过自从计算机发明后,这种情况已大为改

观。混沌学主要靠计算机而发展起来，数学模拟也主要靠计算机。再者，以往数学中极少实验，还是由于计算机的广泛使用，现在不少数学系已有了实验室，特别是统计实验室。可以期望，计算机对改变数学的面貌，对改善数学的思维方法，都会起到越来越大的作用。

在此之前，我国已经出版了几本关于数学方法的书，它们都各有特色。如就规模之大，选题之广，论述之精而言，这套丛书也许是盛况空前、蔚为大观的。我们希望它在振兴我国的科学事业和培养数学人才中，将会起到令人鼓舞的作用。

王梓坤

99.7.6.

引　言

数学家们的理想是把数学建成一个严谨的演绎推理系统.古有希腊的大数学家欧几里得,他首先把几何学建成了以一组公理为基础的演绎的大厦,建立了数学史上的不朽功勋.近有德国的大数学家希尔伯特,他在完成了形式公理几何学的构建任务后,与他的合作者共同提出了雄伟的“希尔伯特规划”,要把整个数学建成一个完备的形式系统.他的规划能成功吗?大数学家哥德尔一鸣惊人,作出了令世人震惊的回答.

这本小册子,围绕着“逻辑与演绎”的话题,反思历史,讲述数学是怎样通过一批大数学家的出色工作,从不严格逐步走向严格的;联系中学数学的各个分支,进行了详细而又比较严密的逻辑分析.力图通过深入浅出的描绘,对各个系统结构的多角度剖析,以及数学逻辑问题的有益探讨,为读者提供一幅多彩的出人意表的新画卷.

作　者

1999 年 4 月

目　　录

一、数学怎么会与逻辑结缘

科学是反映自然、社会、思维等的客观规律的分科的知识体系，是知识的长期发展的总结.

每一门科学所必需的科学真理的联系，是客观现实的联系的反映，但这种联系往往不是直截了当一望可知的.除了很少一部分科学原理被承认为公理而无须任何证明外，其余一切原理都是借助于说理证明，即通过确定出这些原理同其他真理的必然联系而判明为真理的.

因而，证明是一切论断具有科学性的首要的不可或缺的条件.

“使思想具有无可辩驳的说服力量的，不是主观的自信，而是**有根有据的、经过证实的信念**.”

本章将比较地、历史地来展示一下，人类关于证明思想的发展，从中说明，作为形式化了的思想材料的数学，怎样在这一方向上尽显优势而独领风骚的.

1.是非如何才能辨明

看看其他一些学科是怎么辨明道理的,对于理解数学的逻辑结构,也是很有启发意义的.

例 1 达尔文论证他的自然选择学说.

比如长颈鹿,并不是它经常伸长脖子导致它的后代脖子这么长,而是由于变异的缘故:

有些鹿生来颈就长一些.	$\Longrightarrow$	这些长颈的鹿因能吃到更多的树叶,所以更有存活优势.	$\Longrightarrow$	漫长的岁月过去了,那些脖子变长的变异因素在生存竞争中总是保持着优势,因而不断积累,终于形成了我们今天看到的长颈鹿.

显然,这样的论证,是以大量的观察收集的材料为基础的,只是一种推想式的论断.这是由生物学的特点,及当时的科学发展水平所决定了的.

事实上,达尔文早年从剑桥学到的一个科学家的工作方法便是,"所谓科学,就是综合事实,从而根据事实得出一般的规律和结论".

后来,达尔文参加了"贝格尔号"的环球科学考察活动,他收集各种动植物标本、挖掘古生物化石、记录地层情况,为研究工作积累了大量而丰富的材料;而地质学家赖尔所倡导的比较历史方法又给达尔文以深刻的启迪,地质渐变思想使达尔文产生了强烈的认同感,比较联想后,使他产生了生物逐渐进化的思想;人口学家马尔萨斯关于人类为争夺食物所导致的灾难性竞争的观点,又使达尔文自然想到在自然界中,生物一定也有类似的生存竞争,从而

逐渐形成了他的伟大的自然选择学说.他后来又借人工选择的实验来进一步证明生物通过自然选择而进化的思想.

这就是达尔文的方法论——通过观察、实验、联想、借喻等,来论证理论.

例 2 伽利略批驳亚里士多德的运动理论.

亚里士多德认为,在落体运动中,重的物体先于轻的物体落到地面,而且速度与重量成正比.

亚里士多德是古希腊的哲学家.当年,他大概是在经验中找到证据的:比如一根羽毛就比一块石头后落到地面.

伽利略曾在比萨斜塔上做过落体实验,是一则著名的历史传闻.但伽利略本人从未提起过这件事.

的确有人(在斜塔上)做过落体实验:

1586 年荷兰物理学家斯台文做过一个实验,用两个大小不同重量比为 1 比 10 的铅球,让它们从高 30 英尺的高度下落,结果两者几乎同时落在地面上的木板上.

一位亚里士多德派的物理学家为了反驳伽利略,后来也于 1612 年在比萨斜塔上做了一个实验,结果表明,相同材料但重量不同的物体,并不是在同一时刻到达地面.

对此结果,伽利略是这样辩护的:“重量 1 比 10 的两个物体下落到地面时只差很小的距离,可是亚里士多德却说差 10 倍,为什么忽视亚里士多德如此重大的失误却盯住我小小的误差不放呢?”

伽利略还设计过这样一个“思想实验”来批驳亚氏理论:假设亚里士多德的判断是对的.现有物体 A 与 B,设它们的重量分别为 a、b,$a>b$,则按亚氏理论 A 应比 B 先落地;再将 A、B 两物体捆在一起构成物体 $A+B$,其重量为 $a+b>a$,那么 $A+B$ 应比 A 先落地(r).

另一方面，由于物体 B 比 A 下落得慢，当 A、B 捆在一起时，B 应减慢 A 的下落速度，因此，$A+B$ 应比 A 后落地(r').

这样，从亚氏的判断可得出两个互相反对的结论 r 与 r'，由此可知亚氏的理论是错误的.

上述例子，大致说明了伽利略当年研究物理学的主要方法：以观察与实验为基础，辅以合逻辑的(不可避免的)推论手段.他们接受由此得来的每个事实.

例 3 考古学是通过讲故事而取得进展的.

往昔的伟大人物都已逝去了——我们也许再也看不到他们的同类了——但是一支由略微有些怪癖的、富于献身精神的专家和业余爱好者组成的大军正在地球上勤奋地工作，试图去理解往昔的意义.

那么，考古工作者是怎样工作的，他们是怎样证明他们的发现的呢?

投身到这一学科的人，都是不折不扣的好奇者，都有强烈的自己去回头看看的好奇心.

但是，"在考古学所研究的过去所发生的所有事物中有99.99%以上没有任何种类的证据幸存超过一秒钟.在仍然不可计数的留存下来的事例中，只有百分之一的一百万分之一这样一个微小的比例有证据留存下来.其中，只有无穷小的一部分被考古学发掘了出来，而其中更小的一部分得到了正确的解释".(R.贝德纳里克)

考古学是从对文物宝藏的追寻，到对古代的信息的探寻，一步步发展而来的.因为没人知道在过去发生了什么，考古学(也)是通过讲故事而取得进展的.这些故事里，有多少是基于遗骨与器物的? 又有多少是基于文学的准则的? 后来，新的遗迹或发现将改

变已为人们广泛接受了的虚构故事.

随着时间的推移,考古发掘已经变得比原来缓慢得多,也更细致刻苦;不仅获得了数量有着巨大增长的各种类型的材料,而且,现在可以从每件器物上获得比过去多得多的信息.然而,对于考古学特别重大的确定日期这样一件大事("如果你不能获悉时间,只有爱好也无济于事")来说,虽然技术与方法大大地扩展了,对于史前时期的文物,也只能排出一个孰先孰后的相对日期而已.考古学只是在小部分遗物加上大量假设的基础上,拼构出关于古代的可能的近似图景的学科.

上述分析可以说明,一些学科在其某一发展阶段,它所使用的方法不那么严谨,所获得的结果不那么完善,这既是学科内容的特点所决定了的,也是一个学科处在它的发展过程之中所不可避免的事.

从哲学的原理上说来,这正反映了"辩证唯物主义把认识看做从不知到知,从对现实的个别现象、个别方面的知识到更深刻、更完满的知识,以致发现更新的发展规律这样一种运动的历史过程",亦即从相对真理向绝对真理不断发展不断逼近的过程.而在这样的发展过程之中,实践则是检验真理的唯一标准.

2.数学凭什么使人信服

就是数学,它的逻辑结构的严谨也仅仅是近代的事.至于学生学习过程中的数学,多数情况下强调的是与他们的年龄特征相适应的可接受性,只有极少数人才能见到数学大厦是怎么从少量的基础公理上,真正严谨地一步步建构起来的.

我们顺着历史的轨迹,从中撷取几个镜头,借以说明"数学是怎样使人信服的",人类又是怎样才逐渐地懂得"证明是什么"的.

(1)证明,在不同的时代有不同的含意

例 4 从勾股定理的证明方法,看人类证明思想的发展.

勾股定理是一个很古老很著名的定理.有人曾经推荐过,将勾股定理的图形做成"光线信号",传送给其他天体上的可能的居住者,作为首选的彼此联系的办法之一.亦可见此定理的影响的深远.

1° 勾股定理被发现到如今,至少已有五千多年的历史了.

公元前约三千年的古巴比伦人就知道和应用了勾股定理.他们还知道许多勾股数组.

古埃及人在建筑宏伟的金字塔和尼罗河泛滥后测量土地时,也应用过勾股定理.

我国的商高(约公元前 1120 年)知道了勾三股四弦五,陈子(公元前 7 ~ 前 6 世纪)则已得到直角三角形三边间的普遍关系.

只是在很长的一个时期内,人们只满足于发现直角三角形三边长的关系,并在实践中应用它;还没意识到应该证明它,更不知道该怎么去证明.

2° 史传,首先从理论上证明了勾股定理的,是约公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派,大概也是由此之故,西方国家一律称此定理为"毕达哥拉斯定理".

据今天的史家研究,毕达哥拉斯发现的是形的勾股定理,即:"在直角三角形斜边上的正方形等于直角边上的两个正方形."人们猜测,毕达哥拉斯的证法,很可能与如下的证法类似:

任给直角△ABC,如图 1,各边为 a,b,c.

以 $a+b$ 为边完成的正方形,由 4 个全等的三角形和 c 边上的正方形Ⅲ拼成.

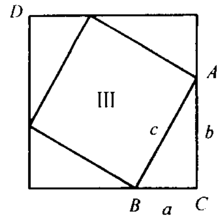


图 1

如果将这些三角形按另一种方式来排列,如图 2,立刻看出图 1 也可以由同样的 4 个三角形与 a、b 上的两个正方形Ⅰ、正方形Ⅱ拼成.从而得到

正方形Ⅲ = 正方形Ⅰ + 正方形Ⅱ.

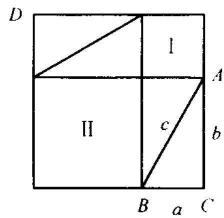


图 2

这一类证明,称为分解证法,据说国外有一本书,搜罗的这类证法有三百多种呢.

3° 欧氏几何系统内的勾股定理.

在欧几里得的《几何原本》里,勾股定理是由各方面来解释的、居中枢地位的一个数学事实;它不过是一长串定理连锁中的一环,一个大的数学真理体系中的一件而已.

"这种体系的性质是,每个新的节都是前面的连锁节的纯粹逻辑的结果.每个证明都以以前的定理为根据而出发.……全部真理的终极,只有有限的几个原则."这个体系根本是逻辑的,在这个体系之中,勾股定理成为平面几何中的基本定理之一.

从欧氏的整个定理体系来看,勾股定理的证法是算得最简单的.如图 3,添三条辅助线 CF、DB 和 CE 是必要的:作 $CF \perp EG$,连结 DB、CE.

由三角形全等判定定理知 $\triangle DAB \cong \triangle CAE$.

又由与一三角形等高同底的平行四边形面积为三角形面积的两倍的定理知:

$S_{\text{正方形I}}$ 是 $S_{\triangle DAB}$ 的 2 倍,

$S_{\text{矩形}AEFO}$ 是 $S_{\triangle CAE}$ 的 2 倍,∴ $S_{\text{正方形I}} = S_{\text{矩形}AEFO}$.