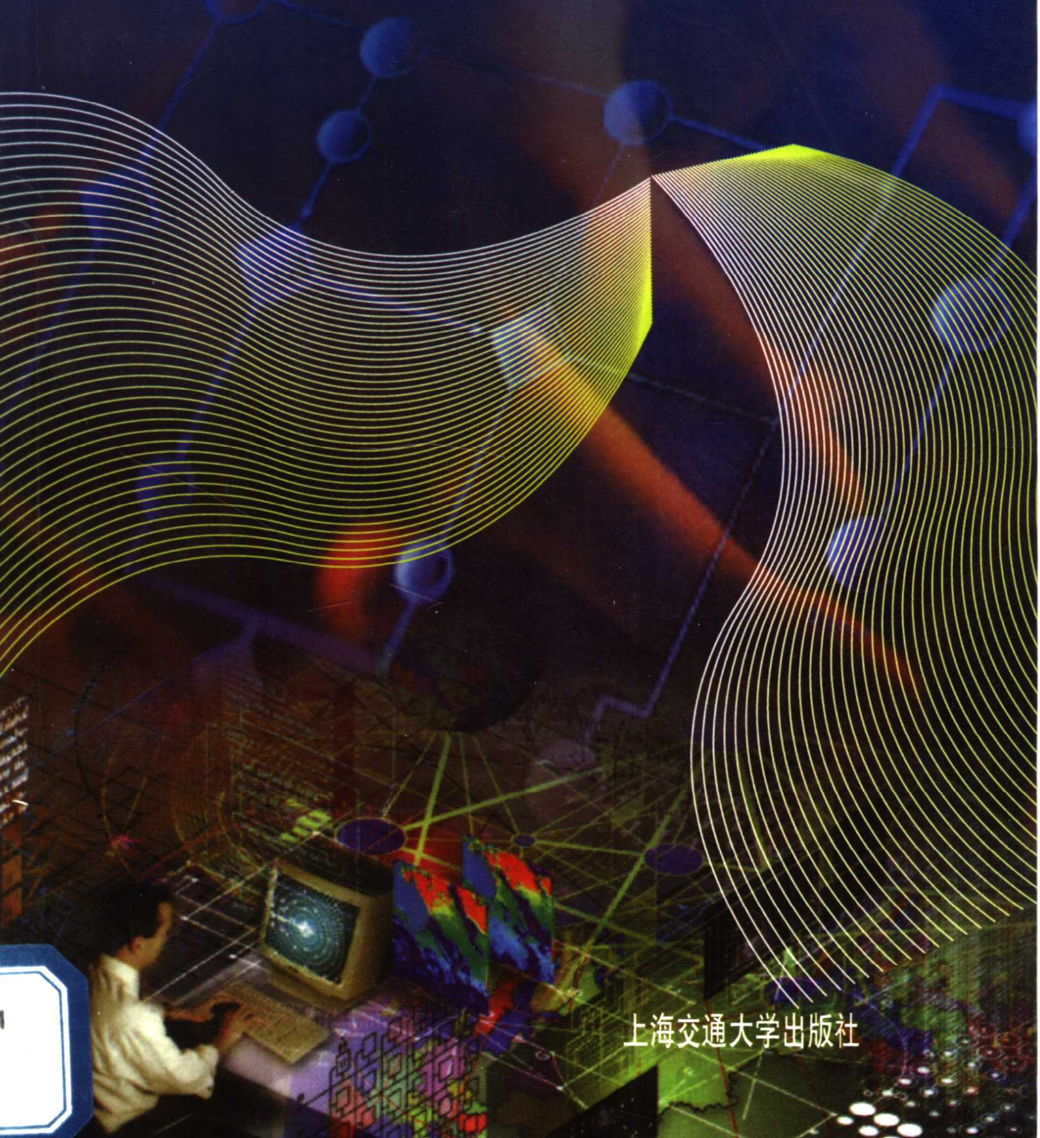
离散数学丛书

有限反射群的不变式论

万哲先 编



上海交通大学出版社

上海“九五”重点图书
离散数学丛书

有限反射群的不变式论

万哲先 著

上海交通大学出版社

有限反射群的不变式论

万哲先　著

上海交通大学出版社出版发行
上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030
电话　64281208　传真　64683798
全国新华书店经销
常熟市印刷二厂·印刷
开本:850×1168(mm) 1/32　印张:5.625　字数:146 千字
版次:1998 年 12 月　　第 1 版
印次:1998 年 12 月　　第 1 次
ISBN 7-313-01896-7/O·123
定价:10.50 元

内 容 提 要

本书共分三章:第一章主要介绍有限伪反射群不变式的一般理论;第二章着重介绍有限实反射群的分类;第三章进一步讨论有限反射群的不变式,特别对于每个不可约有限反射群都列出了它的一组基本不变式.各章之末均为习题,这些习题与正文构成了有机的整体.本书是作者根据自己的理解编写的,旨在引导读者进入目前较活跃的两个数学分支——反射群和不变式.

本书可供数学工作者和数学系高年级学生使用.只要具备大学线性代数和抽象代数的知识,即可阅读本书.

离散数学丛书编委会

序　　言

对称函数的基本定理是数学中重要的经典定理：n 个未定元的对称多项式一定可以表示成 n 个初等对称多项式的多项式，而且表法唯一．对称多项式实际上就是在对称群作用下不变的多项式，而对称群又可以看作是由欧氏空间中的反射生成的群．一个自然发生的问题是，对称函数的基本定理可不可以推广？特别是能不能推广到欧氏空间中反射生成的有限群？后者简称为有限反射群．Coxeter 于 1935 年完成了不可约有限反射群的分类，1951 年他就对一个个的不可约有限反射群来研究这个问题．1954 年 Shephard-Todd 完成了不可约有限复反射群的分类以后，又对一个个的不可约有限复反射群来研究这个问题．他们得到了正面的结果．1955 年 Chevalley 对任意有限反射群给出了统一的证明：作用在 n 维欧氏空间上的有限反射群的任一不变多项式，都可以表示成 n 个基本不变多项式的多项式，而且表法唯一．后来这一结果又被推广到有限伪反射群，这是不变式论中精彩的篇章．

本书试图先对有限伪反射群的不变式论作一介绍，这就是本书第一章的内容，然后再落实到有限反射群上去．为了这个目的，本书第二章对有限反射群的分类作了详细的介绍．有限反射群的分类与李群、李代数理论有极为密切的关系，但限于篇幅，本书未作涉及．本书第三章进一步讨论有限反射群的不变式，特别对于每个不可约有限反射群都列出了它的一组基本不变式．

读者只要具备大学线性代数和抽象代数的知识，即可阅读本书，本书所需要的超出这两门课程的知识，都在书中作了详细介

绍,本书各章之末均为习题,这些习题与正文构成了有机的整体,读者应重视.希望读者通过阅读本书能产生进一步钻研不变式或Coxeter群的兴趣,它们都是当前值得注意的研究对象.

万哲先

1997年5月

目　　录

第一章　有限伪反射群的不变式论

本章主要介绍有限伪反射群不变式的一般理论. 对于这一理论,有限维向量空间上的多项式函数代数的知识是必需的基础知识,在 1.1 节中作了介绍. 1.2 节主要介绍 Hilbert 和 Noether 的关于有限群不变式的有限生成定理,了解这些内容所需要的交换代数知识也附带作了介绍. 1.3 节介绍了 Molien 公式. 1.4 节是本章的主体,有限伪反射群不变式的 Chevalley 定理和 Shephard-Todd 定理是这一节的主要内容. 1.5 节介绍了有限伪反射群的相对不变式. 1.6 节介绍了关于有限伪反射群的次数的 Solomon 定理,证明这个定理所需要的有关微分 p-齐式的一些性质也一并作了介绍.

§1.1　向量空间上的多项式函数代数

设 F 是域,n 是正整数,而 V 是 F 上 n 维向量空间. 设 f 是定义在 V 上而在 F 中取值的函数,即

$$f:\ V \to F,$$
$$\lambda \to f(\lambda).$$

所有这种函数的全体记作 F^V. 设 $f,g\in F^V$,而 $a\in F$,定义

$$(f+g)(\lambda)=f(\lambda)+g(\lambda),$$
$$(fg)(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda),$$

和

$$(af)(\lambda)=af(\lambda).$$

不难证明,F^V 对于上面规定的加法、乘法和纯量乘法来说组成一个 F-代数(即域 F 上的代数),叫做 V 上的函数代数. 按下式来定义 $\underline{1}\in F^V$:

$$\underline{1}(\lambda)=1 \quad \text{对所有 } \lambda\in V,$$

显然$\underline{1}$是 F-代数 F^V 的单位元.

设 $f\in F^V$,如果对任意 $\lambda,\mu\in V$ 和 $a,b\in F$ 都有

$$f(a\lambda+b\mu)=af(\lambda)+bf(\mu),$$

f 就叫做定义在 V 上的线性函数. 易证定义在 V 上的线性函数的全体对于上段定义的加法和纯量乘法来说,组成 F 上的一个向量空间(习题 1.1),记作 V^*,叫做 V 的对偶空间. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基,按以下诸式来定义 V 上的线性函数 $x_1,\cdots,x_n$:

$$x_i(\varepsilon_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n),$$

那么易证 $x_1,\cdots,x_n$ 是 V^* 的一组基(习题 1.1),叫做 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots$ ε_n 在 V^* 中的对偶基. 因此 V^* 也是 F 上的 n 维向量空间,F^V 中形如

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1\cdots i_n}x_1{}^{i_1}\cdots x_n{}^{i_n},\quad a_{i_1\cdots i_n}\in F$$

的有限和式叫做定义在 V 上而在 F 中取值的多项式函数,它们组成的集合是 F^V 的一个 F-子代数,叫做 V 上的多项式函数代数,记作 $F[x_1,\cdots,x_n]$.

如果 $\varepsilon_1',\cdots,\varepsilon_n'$是 V 的另一组基,那么有

$$\varepsilon_j'=\sum_{i=1}^n\varepsilon_i t_{ij},\quad j=1,2,\cdots,n,\quad t_{ij}\in F,$$

而

$$T=(t_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in GL_n(F),$$

这里 $GL_n(F)$是 F 上的 n 级一般线性群,它是由 F 上所有的 $n\times n$ 非奇异矩阵之集对矩阵乘法组成的群(习题 1.2). 设 $x_1',\cdots x_n'$是 $\varepsilon_1',\cdots\varepsilon_n'$在 V^* 中的对偶基,那么不难证明

$$x_i=\sum_{j=1}^n t_{ij}x_j',\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1-1}$$

(习题 1.3). 也有 $F[x_1',\cdots,x_n']\subset F^V$. 由(1-1)式立刻推出 $F[x_1,\cdots,x_n]=F[x_1',\cdots,x_n']$,即 V 上的多项式函数代数与 V 的基的选

取无关,因此也把它记作 $F[V^*]$.

命题 1.1 设 F 是域,$X_1,\cdots,X_n$ 是 F 上的 n 个未定元,$F[X_1,\cdots,X_n]$是 F 上的 n 元多项式代数,那么映射

$$F[X_1,\cdots,X_n]\to F[x_1,\cdots,x_n],$$

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n}X_1{}^{i_1}\cdots X_n{}^{i_n}\mapsto \sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n}x_1{}^{i_1}\cdots x_n{}^{i_n}$$

是代数同态.如果 F 是无限域,那么上面这个映射是同构.

证 第一个断言是显然的.要证明第二个断言,只要证明 $x_1,\cdots,x_n$在 F 上代数无关就行了.对 n 作归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,因为一个未定元 X_1 的 m 次多项式顶多有 m 个根,而 F 是无限域,所以 x_1 在 F 上代数无关.设 $n>1$ 而第二个断言对 n-1 成立.假定 $x_1,\cdots,x_n$ 在 F 上代数相关,即它们适合一个非零多项式 $f(X_1,\cdots,X_n)$.可以把 $f(X_1,\cdots,X_n)$写成

$$f(X_1,\cdots,X_n)=f_0(X_1,\cdots,X_{n-1})+f_1(X_1,\cdots,X_{n-1})X_n+\cdots$$
$$+f_m(X_1,\cdots,X_{n-1})X_n^m,$$

其中 $f_i(X_1,\cdots,X_{n-1})(i=0,1,\cdots,m)$都是 $n-1$ 个未定元 $X_1,\cdots,X_{n-1}$的多项式,而 $f_m(X_1,\cdots,X_{n-1})\neq0$,于是

$$_0(x_1,\cdots,x_{n-1})+f_1(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n+\cdots+f_m(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^m=0. \tag{1-2}$$

根据归纳法假设,$f_m(x_1,\cdots,x_{n-1})\neq0$,总能在 V 中选一个向量 $\lambda=a_1\varepsilon_1+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_{n-1}$使 $f_m(x_1(\lambda),\cdots,x_{n-1}(\lambda))=f_m(a_1,\cdots,a_{n-1})\neq0$.那么对任意 $a_n\in F$,(1-2)式左方在 $\lambda+a_n\varepsilon_n$ 上取的值必为 0,即

$$f_0(a_1,\cdots,a_{n-1})+f_1(a_1,\cdots,a_{n-1})a_n+\cdots+f_m(a_1,\cdots,a_{n-1})a_n^m=0,$$

这与 F 是无限域的假设相违. □

因此,如果 F 是无限域,利用命题 1.1,可以把与 V 上一个多项式函数相应的多项式的次数定义为这个多项式函数的次数,而且这个多项式函数的次数的概念与 V 的基的选取无关,因而也有

V 上齐次多项式函数的概念. 用 $F[V^*]_d$ 表示定义在 V 上的 d 次齐次多项式函数所组成的 F-子空间,则

$$F[V^*] = F[V^*]_0 \oplus F[V^*]_1 \oplus \cdots \oplus F[V^*]_d \oplus \cdots,$$

其中$F[V^*]_0=F$,$F[V^*]_1=V^*$,而且对任意正整数 i 和 j,都有

$$F[V^*]_i F[V^*]_j \subset F[V^*]_{i+j}.$$

一般说来,设 A 是 F-代数,而 A 可以分解成 F-子空间 $A_d(d=0,1,\cdots)$的直和

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_i \oplus \cdots,$$

其中 $A_0 = F$, $A_dA_e \subset A_{d+e}\,\forall d, e = 0, 1, \cdots$, 那么就说 A 是分次 F-代数,A_d 叫做 A 的 d 次成分. 因此当 F 是无限域时,$F[V^*]$是分次 F-代数. 设 A 是分次 F-代数,定义 A_d 中元素的次数为 d;设 $f\in A_d$,记 $\deg f=d$. 根据这个定义,任意非负整数都是 0 的次数. 任意 $f\in A$ 可以唯一地表成和 $f=f_0+f_1+\cdots+f_d+\cdots$,其中 $f_i\in A_i(i=0,1,\cdots)$,而只有有限个 $f_d\neq0$. f_d 叫做 f 的 d 次齐次分量.

更广一些,如果 V 是域 F 上的向量空间,而 V 可以分解成 F-子空间 $V_d(d=0,1,\cdots)$的直和

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_d \oplus \cdots,$$

那么就说 V 是 F 上的分次向量空间,V_d 叫做 V 的 d 次成分,V_d 中的向量叫 d 次向量. 任意 $v\in V$ 可以唯一地表成和 $v=v_0+v_1+\cdots+v_d+\cdots$,其中 $v_d\in V_d(d=0,1,\cdots)$,而只有有限个 $v_d\neq0$. v_d 叫 v 的 d 次齐次分量.

§1.2 有限群的不变式 Hilbert-Nother 有限生成定理

仍设 V 是域 F 上的 n 维向量空间. V 上所有可逆线性变换之集对映射的合成组成一群,叫做 V 上的一般线性群,记作 $GL(V)$ (习题 1.2). 设 G 是 $GL(V)$的有限子群,对任意 $\sigma\in G$ 和 $f\in F[V^*]$,定义

$$\sigma\cdot f(\lambda) = f(\sigma^{-1}\lambda) \quad \forall\, \lambda \in V,$$

则 $\sigma\cdot f\in F[V^*]$. 实际上还可以证明,当 $f\in F[V^*]_d$ 时,$\sigma\cdot f\in F[V^*]_d$. 当 $d=0$ 时,这是显然的. 当 $d=1$ 时,$F[V^*]_1=V^*$. 设 $f\in V^*$,那么对任意 $\lambda,\mu\in V$ 和 $a\in F$,

$$\begin{aligned}\sigma\cdot f(\lambda+\mu)&=f(\sigma^{-1}(\lambda+\mu))=f(\sigma^{-1}\lambda+\sigma^{-1}\mu)\\&=f(\sigma^{-1}\lambda)+f(\sigma^{-1}\mu)=(\sigma\cdot f)(\lambda)+(\sigma\cdot f)(\mu),\\ \sigma\cdot f(a\lambda)&=f(\sigma^{-1}(a\lambda))=af(\sigma^{-1}\lambda)\\&=a(\sigma\cdot f(\lambda))=((a\sigma)\cdot f)(\lambda),\end{aligned}$$

因此 $\sigma\cdot f\in V^*$. 再考察 $d>1$ 的情形. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基,$x_1,\cdots,x_n$ 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基,只要对于单项式 $cx_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$,其中 $c\in F,c\neq0$ 而 $m_1+\cdots+m_n=d$ 来证明 $\sigma\cdot(cx_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n})\in F[V^*]_d$ 就行了. 对任意 $\lambda\in V$,计算

$$\begin{aligned}\sigma\cdot(cx_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n})(\lambda)&=cx_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}(\sigma^{-1}\lambda)\\&=c\,(x_1(\sigma^{-1}\lambda))^{m_1}\cdots(x_n\,(\sigma^{-1}\lambda))^{m_n}\\&=c\,(\sigma\cdot x_1(\lambda))^{m_1}\cdots\,(\sigma\cdot x_n(\lambda))^{m_n}\\&=c\,(\sigma\cdot x_1)^{m_1}\cdots\,(\sigma\cdot x_n)^{m_n}(\lambda),\end{aligned}$$

因此 $\sigma\cdot(cx_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n})=c\,(\sigma\cdot x_1)^{m_1}\cdots(\sigma\cdot x_n)^{m_n}$. 根据 $d=1$ 的情形,$\sigma\cdot x\in V^*$,又因为 $F[V^*]$是分次 F-代数,所以 $c\,(\sigma\cdot x_1)^{m_1}\cdots(\sigma\cdot x_n)^{m_n}\in F\,[V^*]_d$.

这样就定义了一个映射

$$\begin{aligned}G\times F[V^*]&\to F[V^*],\\(\sigma,f)&\mapsto\sigma\cdot f,\end{aligned}\tag{1-3}$$

而且它具有以下两条性质:

(i)　$(\sigma\sigma')\cdot f=\sigma\cdot(\sigma'\cdot f),\forall\ \sigma,\sigma'\in G,f\in F[V^*]$.

(ii)　$1\cdot f=f$,对于 G 的单位元 1 和任意 $f\in F[V^*]$.

(ii)是显然的. 只要验证(i)即可. 对任意 $\lambda\in V$,$(\sigma\sigma')\cdot f(\lambda)=f((\sigma\sigma')^{-1}\lambda)=f(\sigma'^{-1}\sigma^{-1}\lambda)=(\sigma'\cdot f)(\sigma^{-1}\lambda)=(\sigma\cdot(\sigma'\cdot f))(\lambda)$. 所以(i)成立. 故映射(1-3)叫做群 G 在 $F[V^*]$上的一个作用.

设 $f\in F[V^*]$,如果对任意 $\sigma\in G$ 都有 $\sigma\cdot f=f$,f 就叫 G 的

一个不变式，简称 G-不变式.

例 1.1 设 $V=F^2$ 是域 F 上的 2 维列向量空间，而

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

是作用在 V 上的 4 阶循环群. 令 $\varepsilon_1={}^t(1,0)$ 和 $\varepsilon_2={}^t(0,1)$ 是 V 的一组基，x_1,x_2 是 V^* 中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 的对偶基. 那么 $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2x_2^2$, $x_1^3x_2-x_1x_2^3$ 都是G-不变式. □

把 $F[V^*]$中 G-不变式的全体记作 $F[V^*]^G$，即

$$F[V^*]^G=\{f\in F[V^*]\mid\sigma\cdot f=f\text{ 对所有 }\sigma\in G\text{ 都成立}\}.$$

设 $f_1,f_2\in F[V^*]$，那么对任意 $\lambda\in V$ 都有

$$\begin{aligned}(\sigma\cdot(f_1f_2))(\lambda)&=(f_1f_2)(\sigma^{-1}\lambda)=f_1(\sigma^{-1}\lambda)f_2(\sigma^{-1}\lambda)\\&=(\sigma\cdot f_1)(\lambda)(\sigma\cdot f_2)(\lambda),\end{aligned}$$

因此

$$\sigma\cdot(f_1f_2)=(\sigma\cdot f_1)(\sigma\cdot f_2).$$

由此推出$F[V^*]^G$ 是 $F[V^*]$的子代数. 显然，$F\subset F[V^*]^G$. 当 F 是无限域时，把 d 次齐次 G-不变式之集记作$F[V^*]_d^G$，那么

$$F[V^*]_d^G=F[V^*]^G\cap F[V^*]_d.$$

显然也有

$$F[V^*]^G=F[V^*]_0^G\oplus F[V^*]_1^G\oplus\cdots\oplus F[V^*]_d^G\oplus\cdots,$$

其中$F[V^*]_0^G=F$，而

$$F[V^*]_i^G\cdot F[V^*]_j^G\subset F[V^*]_{i+j}^G,$$

因此$F[V^*]^G$ 也是分次 F-代数.

这一节主要介绍 Hilbert, Noether 关于$F[V^*]^G$ 的有限生成定理，首先介绍交换代数的一些知识.

设 R 是有单位元的交换环，再设$\{m_\alpha\mid\alpha\in\Omega\}$是 R 中元素的一个非空集合，其中 Ω 是足码集，R 中可表成形如 $\sum\limits_\alpha r_\alpha m_\alpha(r_\alpha\in R)$

的有限和的元素所组成的集合是 R 的理想，叫做由 $\{m_\alpha|\alpha\in\Omega\}$ 在 R 中生成的理想，记作 $(m_\alpha;\alpha\in\Omega)$. 反过来，设 I 是 R 的理想，如果 I 有一个子集 $\{m_\alpha|\alpha\in\Omega\}$，而它在 R 中生成的理想就是 I，即 $I=(m_\alpha;\alpha\in\Omega)$，就说 I 是由 $\{m_\alpha|\alpha\in\Omega\}$ 生成的理想，当 Ω 是有限集时，就说 I 是有限生成的理想. 设 $\Omega=\{1,\cdots,n\}$，那么也记 $I=(m_1,\cdots m_n)$.

如果环 R 的每个理想都是有限生成的，R 就叫做 Noether 环. 因为域 F 只有两个理想，F 本身和零理想 (0)，而 $F=(1)$ 和 (0) 都由一个元素生成，所以域 F 是 Nother 环. 整数环 $\mathbf{Z}$ 和域 F 上一个未定元 X 的多项式环 $F[X]$ 是主理想整环，因此它们也都是 Noether 环，更进一步有

定理 1.2(Hilbert 基定理)　设 R 是 Noether 环，那么 R 上一个未定元 X 的多项式环 $R[X]$ 也是 Noether 环.

证　设 I 是 $R[X]$ 的任一理想，要证明 I 是有限生成的. 用 I_0 表由 I 中多项式的首项系数组成的 R 的理想. 因 R 是 Noether 环，I_0 由有限个元素生成，设这有限个元素是 $a_1,\cdots,a_m$. 选 I 中多项式 $f_1,\cdots,f_m$，它们分别以 $a_1,\cdots,a_m$ 为首项系数. 再设 $d=\max\{\deg f_1,\cdots,\deg f_m\}$. 设 $f\in I$，如果 $\deg f\geqslant d$，因为 f 的首项系数属于 I_0，所以从 f 减去 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 的一个 R-线性组合(即系数属于 R 的线性组合)之后，可以降低 f 的次数，这样最后就得到一个次数 $<d$ 的多项式.

对任一 $i(0\leqslant i\leqslant d-1)$，用 I_i 表 I 中 i 次多项式的首项系数所组成的 R 的理想. 因为 R 是 Noether 环，I_i 由有限个元素生成，设这有限个元素是 $a_{i_1},\cdots,a_{im_i}$. 选 I 中 i 次多项式 $f_{i1},\cdots,f_{im_i}$，它们分别以 $a_{i1},\cdots,a_{im_i}$ 为首项系数，显然有

$$I=(f_1,\cdots,f_m,f_{d-1,1},\cdots,f_{d-1,m_{d-1}},\cdots,f_{01},\cdots,f_{0m_0}).\qquad\square$$

系理 1.3　设 F 是域，$X_1,\cdots,X_n$ 是 F 上 n 个未定元，那么

$F[X_1,\cdots,X_n]$是 Noether 环.

设 A 是 F-代数，如果 A 中有有限个元素 $a_1,\cdots,a_n$，使得 A 中任一元素都可以表成 $a_1,\cdots,a_n$ 的多项式

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} c_{i_1\cdots i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n},$$

其中和是有限和而系数 $c_{i_1\cdots i_n}\in F$，那么 A 就叫做有限生成的 F-代数，并记 $A=F[a_1,\cdots,a_n]$. 注意并不要求 $a_1,\cdots,a_n$ 在 F 上代数无关，因此 $F[a_1,\cdots,a_n]$是 F 上 n 个未定元的多项式环的同态像. 显然有

命题 1.4 Noether 环的同态像也是 Noether 环. □

因此有

系理 1.5 设 F 是域而 A 是有限生成的 F-代数，那么 A 是 Noether 环. □

现在叙述并证明关于有限群不变式的有限生成定理.

定理 1.6(Hilbert-Noether) $F[V^*]^G$ 是有限生成的 F-代数.

证(Hilbert, 1890) 假定 F 的特征为 0. 令

$$F[V^*]_+^G = F[V^*]_1^G \oplus F[V^*]_2^G \oplus\cdots\oplus F[V^*]_d^G \oplus\cdots,$$

并把 $F[V^*]_+^G$ 在 $F[V^*]$中生成的理想记作 I. 根据命题 1.1，$F[V^*]$与 n 个未定元的多项式环同构，所以根据 Hilbert 基定理，I 由有限个元素 $f_1,\cdots,f_m$ 生成，并不妨设它们都是 G 的次数$\geqslant 1$ 的齐次不变式.

在 $F[V^*]$上引进平均算子

$$z=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma,$$

这里$|G|$表示群 G 的阶. 显然 z 是 $F[V^*]$上的线性算子. 对于 $f\in F[V^*]$，令 $\tilde{f}=z\cdot f$，那么 $\tilde{f}\in F[V^*]^G$；对于 $f\in F[V^*]$，