



中学数学教材研究与教案选

第 六 册

北京师范大学出版社

中学数学教材研究与教案选

第 六 册

本 社 编

北京师范大学出版社

中学数学教材研究与教案选

第 六 册

本社编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

七二六六工厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 50.5 字数: 200 千

1984年4月第1版 1984年4月第1次印刷

印数: 1—40,000

统一书号: 7243·183 定价: 0.85 元

前 言

多年来，广大数学教师在教学实践中积累了非常丰富的教学经验，将这些经验进行交流与推广，无疑对开展中学数学教学的研究，提高数学教学质量，会有积极的意义。为此，我们在翻阅了解放以来，尤其是近三、四年来有关中学数学教学的大量文章与资料的基础上，约请了全国二十多个省、市、自治区的二百多位教师撰写文章与教案，并经过精选和修改，编辑了《中学数学教材研究与教案选》这套书。本书的作者，绝大部分都具有二、三十年甚至更长时间的教学实践，其中数十名是特级教师。选入书中的文章或教案可以说是他们几十年辛勤劳动的结晶，也在一定程度上反映了全国某些地区中学数学教学的情况。

本书是按照一九八二年公布的《全日制六年制重点中学数学教学大纲（草案）》（征求意见稿）的教学体系，结合现行统编教材编写的。各章配备的教材分析或经验文章一般概括了课本各章节的主要内容及其在初等数学中的地位和作用，提出了教学目的和要求，对重点和难点还配备了适当数量的教案，有的还对教材的结构作了分析，对教学方法提出了一些宝贵的建议。教案多数比较详尽，从中不仅能看到作者课堂教学的全过程，而且还能看出作者的一些意图和想法，少数教案较略，但言简意明，脉络清楚，重点突出。总之，本书就如何通过课堂教学加强学生的基础知识，进行基

本技能的训练以及培养学生的能力等方面各俱特色，可供广大中学数学教师研究和参考。还需指出的是书中的文章与教案一般都对学生提出了较高的要求，读者在选作参考时，应结合自己的教学实践，而不能简单录用。

本书共分六册出版。前三册为初中部分，后三册为高中部分。具体内容安排：第一册是初一代数；第二册包括初二，初三代数；第三册包括初二，初三几何；第四册包括高一，高二代数与三角；第五册包括高一、高二立体几何与解析几何；第六册为高三代数。

参加本书编辑工作的有罗小伟、彭文逵、晨光、周耿等同志，最后由北京师范大学数学系钟善基，曹才翰先生审定。

由于水平有限，又兼仓促完稿。本书在内容的选材，文章与教案的安排以及文字的修饰等方面，还会存在许多问题，恳请同志们批评指正。

编 者

目 录

前言

排列、组合和二项式定理

谈谈排列组合应用题的教学 杨景星 杨景芳 (1)

教案

加法原理和乘法原理..... 张素亮 (25)

排列..... 孙幼云 杨静如 (29)

组合定义和组合数公式..... 马兴民 (36)

组合数的两个性质..... 罗廷金 (40)

二项式定理..... 周应斌 (45)

概率 (教案)

随机事件的概率..... 从 学 (56)

等可能性事件的概率..... 从 学 (61)

条件概率 (一) 石维瑄 (66)

条件概率 (二) 石维瑄 (71)

独立重复试验 (一) 石维瑄 (76)

独立重复试验 (二) 石维瑄 (81)

数列

对于数列、数学归纳法这一章的教学意见.....

..... 吴世煦 (88)

教案

数列及通项公式..... 师立群 (116)

等比数列及其通项公式·····	师立群 (127)
等比数列前 n 项和公式 ·····	师立群 (136)
数学归纳法·····	孟令尧 (143)
函数极限、导数、积分 (教案)	
数列的极限 (一) ·····	杨大淳 (150)
数列的极限 (二) ·····	杨大淳 (155)
函数极限的概念·····	李文荣 (160)
函数连续性概念·····	李文荣 (166)
初等函数及其连续性·····	余炯沛 (172)
无穷小量和无穷大量·····	刘文灿 (177)
极限的四则运算·····	刘文灿 (181)
导数的意义·····	刘志浩 (186)
反函数的导数·····	刘志浩 (193)
复合函数的导数·····	刘锡园 (198)
隐函数的导数·····	刘锡园 (205)
微分中值定理·····	唐家树 (211)
函数的增减性·····	倪楚棠 (220)
原函数·····	赵宝璋 (224)
不定积分·····	张国栋 (231)
基本积分公式和不定积分的运算法则·····	张国栋 (236)
分部积分法·····	戴镇南 (242)
不定积分总结课·····	戴镇南 (247)
定积分概念·····	张 飏 (251)
定积分概念和例题·····	张 飏 (256)
定积分性质·····	张 飏 (259)
微积分基本公式·····	刘身和 (264)

利用微积分基本公式计算简单的定积分 ...	刘身和 (270)
定积分的计算	刘身和 (274)
平面图形的面积	何裕新 (279)
旋转体的体积	何裕新 (289)

排列、组合和二项式定理

谈谈排列组合应用题的教学

一、对“排列，组合”教材的基本认识。

排列和组合是宇宙间的自然现象。自然界中由于事物与事物之间以及事物本身内部各部分之间在构成方面或在位置顺序配合上的差异而产生了形形色色的图象、形态、事件。错综复杂，千变万化，我们无时无刻不受它的影响。这些现象就是自然界中的排列组合。至于数学上的排列组合则是从数的观念出发，在理论上研究它的性质，探讨它的规律，以便利用它来为生产建设和日常生活服务。

排列、组合在数学中占有重要地位，因为它不仅应用到数学本身，而且在其他学科中也有它的应用，就是在生产上和生活中用到它的地方也很多。在数学上，二项式定理、行列式、置换、拓扑都与它有密切关系，并且它是学习概率论的基础。在其他学科方面，如统计学、运筹学、生物的选种都与它直接有关。至于在日常的工作、生活上，只要一涉及安排调配的问题，就离不了它，如一条铁路线上应准备的车票的种类，球赛场次的安排都必须具备一定的排列组合知识。

中学数学里只讲一些简单的排列组合的基本理论。目的

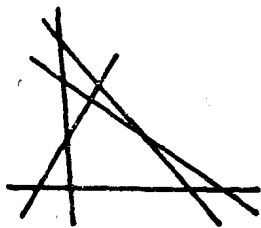
是为了讲二项式定理，也为学习概率论做准备。同时也可以解决生产、生活中的一些常见问题以及前面学过的数学知识中遗留的个别问题（如求凸 n 边形对角线的条数）。

二、排列组合的特点及其在教学上的难点。

排列组合这一课题在中学数学教学中是个难点，这是因为：

1. 学习排列组合用到的数学知识不多，一般情况下只要掌握正有理数的运算就够了。但在概念的理解上以及处理问题的方法上都与过去所学的大不相同，可谓内容独特，方法新颖，对学生来说是全新的东西，开始学习时会感到不习惯。

2. 有些问题的计算结果往往得到一个很大的数目，简直无法核实。比如 $a, b, c,$
……, k 等十个不同元素每次全取的不重复排列有10!种，即3628800种，不可能一一写出，又平面上的五条直线（没有平行的，也没有三条交于一点的）能组成几个三角形呢？



计算的结果是10个(如图)，即使像这样简单的图形，要从图上不重复不遗漏的算出来，也要按照一定的顺序。如果这样的直线有10条，就可以组成120个三角形，那在图形上就根本无法直接看出来了。

3. 除了最简单的应用题外，不能硬套公式，也没有一定的方法可以遵循，需要有一定的抽象思维能力和较强的逻辑推理能力，这些又非一朝一夕可以形成的。况且一个问题

只要条件稍一改变，解法就可能全不相同，有时甚至改变了问题的性质。学生对此难以适应。

为此，教师在分析问题时务必做到深透详尽，严谨完整，并以此作为对学生的要求。至于从简单到复杂，从具体到抽象，从特殊到一般的教学原则，对于教学排列组合尤其重要。当然，紧密联系学生的生活实际，例题、练习题尽量从学生所熟知的事物中编选，让学生在已有感性认识的基础上进行抽象思维，也能减少学生学习上的困难。

三、教学上几个基本问题的探讨。

下面的几个具体问题，在教学过程中必须妥善地加以解决，学生才能学好用好。

1. 排列与组合的区别问题。

排列与组合在理论上的区别是简单的。排列是要讲顺序的，组合则不讲顺序。但一碰到具体问题，就不容易判别是否应区分顺序。这就需要根据问题的条件、要求，结合实践经验、生活常识作出判断。最好多提一些问题让学生独立地进行判断，并且能够把道理讲清楚。

例 1 全班 50 位同学两两握手一次，共握多少次？假如他们两两互赠照片一张，共须照片多少张？

学生要能够说明，前者如，甲与乙握手的同时即乙与甲握手，这是一回事，因与顺序无关，故为组合问题。后者如，甲赠给乙照片一张和乙赠给甲照片一张是两回事，因与顺序有关，故为排列问题。

例 2 一个小组有 10 个同学，假期中每两人互通电话一次，并各通信一次，共通了几次电话？通了几封信？

学生要能够说明，前者如，甲与乙通话的同时即乙与甲

通话，这是一回事，因与顺序无关，故为组合问题。后者如，甲给乙一封信和乙给甲一封信是两回事，因与顺序有关，故为排列问题。

例3 由数字1,2,3,4,5,6,7可以组成多少个没有重复数字的三位数？又平面上有 A, B, C, D, E, F, G 七个点，没有任何三点在一直线上，以这些点作为三角形顶点，可以连成几个三角形？

学生要能够说明，前者如，123, 132, 213, 231, 312, 321是不同的三位数，因与顺序有关，故为排列问题。后者如， $\triangle ABC, \triangle ACB, \triangle BAC, \triangle BCA, \triangle CAB, \triangle CBA$ 实为同一个三角形，因与（顶点的）顺序无关，故为组合问题。

只有当学生在确定一个问题为排列或组合问题的同时，能够像上面的例子那样正确地叙述与顺序有无关系的理由，才说明他们已经真正地而不是形式地掌握定义，当然就能够用来判断具体问题了。

2. 和与积的问题。

为了使学生在处理较为复杂的应用题时，对于在什么情况下使用加法或乘法能够作出正确的选择，必须彻底解决和与积的问题。课本指出：

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法。（加法原理）

做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种

方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

种不同的方法。（乘法原理）

这里特别要强调指出“办法”与“步骤”的区别。作为“一个办法”就是能够单独依靠它来完成这件事。作为“一个步骤”就无法单独依靠它而必须所有步骤依次相继做完方能完成这件事。

例 1 从 7 个男学生和 8 个女学生中选出 4 人组成一个小组，如果男学生和女学生各 2 人，有几种不同选法？

选出 2 个男学生的方法数为 C_7^2 ，选出 2 个女学生的方法数为 C_8^2 ，由于选出 2 个男学生后必须再选出 2 个女学生方能组成一个四人小组，因此它们是完成这件事的两个必不可少的步骤，故应求其积而得

$$C_7^2 \cdot C_8^2$$

种不同选法。

例 2 有一分，二分，五分，一角，二角，五角，一元的邮票各一枚，可以组成多少种不同邮资？

从七枚邮票中每次取一枚可得 C_7^1 种不同邮资，每次取二枚可得 C_7^2 种不同邮资，……，每次取六枚可得 C_7^6 种不同邮资，七枚全取可得 C_7^7 种邮资。由于每取一次都能组成一种邮资而完成这件事，并且所得邮资均不相同，故应求其和而得

$$C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^6 + C_7^7$$

种不同邮资。

至于一些较复杂的事件，完成它有几类办法，每类办法

有时又要分为几个步骤，那么乘法和加法就要结合起来运用。

例 3 从 7 个男学生和 8 个女学生中选出 4 人组成一个小组，如果至少要有男、女学生各一人，有几种不同选法？

选出 4 人小组有三类办法：男 1 女 3；男 2 女 2；男 3 女 1。

对于第一类办法，应从 7 个男学生中选一人，其方法数为 C_7^1 ，还应从 8 个女学生中选 3 人，其方法数为 C_8^3 ，这是第一类办法中两个必不可少的步骤，所以第一类办法有 $C_7^1 \cdot C_8^3$ 种方法。同样可得第二、第三类办法分别有 $C_7^2 \cdot C_8^2$ 和 $C_7^3 \cdot C_8^1$ 种方法，因此共有

$$C_7^1 \cdot C_8^3 + C_7^2 \cdot C_8^2 + C_7^3 \cdot C_8^1$$

种不同选法。

3. 和与差的问题——直接解法和间接解法。

如上的例 2、例 3 都是先求出完成事件的各类不同办法的方法数，然后求其和，而得到完成事件的所有不同方法数。但有时我们还可以在求符合题意（即所要求的事件成立）的所有方法数的同时，连同某些不符合题意的方法数也一并求出，那就必须从中减去不符合题意的方法数，这就是求差的问题。

例 1 （即上节例 2）

我们可以把从七枚邮票中每次取一枚、二枚、……、七枚的做法看做分七段依次完成的，即对一分邮票可以取可以不取，有两种方法，处理一分邮票后对二分邮票仍然是可以取可以不取，也有两种方法，同样，取其他邮票时也各有两种方法，于是可得 2^7 种不同方法，但其中当七枚邮票都不

取时，不能组成一种邮资，应该扣掉而得

$$2^7 - 1$$

种不同邮资。

例 2 （即上节例 3）

从 15 个学生中选 4 人组成一个小组有 C_{15}^4 种不同选法，扣去其中 4 人全是男学生的 C_7^4 种选法以及全是女学生的 C_8^4 种选法，就可以得到符合题意的即至少有男、女学生各一人的

$$C_{15}^4 - C_7^4 - C_8^4$$

种不同选法。

为了突出用“和”、“差”这两种不同解法的实质，我们把前一种解法叫做直接解法（直接求出符合题意的所有不同方法数）。后一种解法叫做间接解法（从符合题意和某些不合题意的方法数的总和中扣去不符合题意的方法数，从而间接求得符合题意的所有不同方法数）。

例 3 用 0, 1, 2, …, 9 等十个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数？

直接解法：先从 1, 2, 3, …, 9 中选取一个排在百位上，再从所剩的九个数字（包括 0 在内）中选取两个分别排在十位和个位上，这样就得到

$$P_9^1 \cdot P_9^2$$

个没有重复数字的三位数。

间接解法：先从这十个数字中选取 3 个排成一横行，有 P_{10}^3 种排法，其中 0 排在首位（即百位）上的有 P_9^2 种排法，它们不是三位数，其余的都是三位数，因此可组成

$$P_{10}^3 - P_9^2$$

个没有重复数字的三位数。

有些题目应用间接解法反而要比直接解法简捷得多。

例 4 要从五位医生十位护士中选四人组成一个巡回医疗队，其中至少有医生一人，有几种选法？

直接解法：这个医疗队可以有一位医生三位护士，可以有二位医生二位护士，可以有三位医生一位护士，还可以有四位医生，因此共有

$$C_5^1 \cdot C_{10}^3 + C_5^2 \cdot C_{10}^2 + C_5^3 \cdot C_{10}^1 + C_5^4$$

种不同选法。

间接解法：从这十五位医护人员中选取 4 人组成一个巡回医疗队有 C_{15}^4 种选法，其中 4 人全是护士的有 C_{10}^4 种选法，这不符合题意，其他的选法至少有一位医生，因此共有

$$C_{15}^4 - C_{10}^4$$

种不同选法。

我们把完成事件的各个组成部分叫做分事件，例如本例的直接解法就是由“从五位医生中选一位”，“从十位护士中选三位”，“从五位医生中选二位”，……，“从五位医生中选四位”等七个分事件组成的，它们分别有 C_5^1 ， C_{10}^3 ， C_5^2 ，……， C_5^4 种不同方法。间接解法只由两个分事件组成，它们分别有 C_{15}^4 ， C_{10}^4 种不同方法。显然，后法比前法要简捷得多。由此可见，某种解法的分事件越少，列式、计算就越简单，这种解法就越方便。这可以作为我们选择解法的依据。

至于何时采用直接解法，何时采用间接解法，要具体问题具体分析。

例 5 五人并排照相，甲、乙两人必须排在一起，有几

种不同排法？

直接解法：先把甲、乙两人当做一个整体与其他三人排成一排，共有 P_4^1 种方法，在这里的每一种排法中，甲、乙两人还可以自行排列而有 P_2^1 种方法，因此共有

$$P_4^1 \cdot P_2^1$$

种不同排法。

间接解法：下图中 1, 2, 3, 4, 5 表示位次

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

五人排成一排有 P_5^1 种方法，其中甲、乙不相邻的只有把他俩分别排在 1, 3; 1, 4; 1, 5; 2, 4; 2, 5 或 3, 5 等六种位置，在这六种情况下，甲、乙可以自行排列而有 P_2^1 种方法，其余 3 人排在所剩的位置上有 P_3^1 种方法，因此，甲、乙不相邻的排法有 $6P_2^1 \cdot P_3^1$ 种，则甲、乙排在一起的有

$$P_5^1 - 6P_2^1 \cdot P_3^1$$

种不同排法。

象这个问题，用间接解法不仅列式、计算比较繁琐，而且要详尽无遗地找出所有分事件也不太容易，显然以用直接解法为宜。

4. 重复与遗漏的问题

学生常犯错误之一是在解题过程中的重复遗漏现象，为此教师必须抓住一切机会，有意识地结合实例讲解，以促使学生注意，并强调要养成对事物细心分析周密思考的良好习惯。

例 1 平面上有 n 个点，其中除了 m ($m \leq n$) 个点在一直线上外，再没有任何三点在一直线上，连结这些点可得几