高中数学复習

(代数部分)

第五分册

(初　稿)

天津师范学院数理系江澤生編

高等教育出版社

高 中 数 学 复 習

(代数部分)

第五分册

(初　稿)

天津师范学院数理系江澤生編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

人民教育印刷厂印刷　新华书店发行

統一書号 13010·598　開本 850×1168 1/32　印張 1 9/16

字數 30,000　印數 9001—22000　定價 (6)¥0.12

1959年3月第1版　1959年5月北京第2次印刷

第五分册目录

第九章　对数

§1. 指数函数　函数 $y=a^x$ 叫做 x 的指数函数，这里底数 a 是一个正的常量，变量 x 是在指数的位置，可以取一切的实数值，我們很容易看到，在指数函数 $y=a^x$ 里，給 x 任何一个实数值，对应的 y 必有一值，而且只有一值。当底数 $a>0$ 的时候，无論自变量 x 为任何实数，对应的 y 值永远是正的。

例如
$$y=2^x.$$

当 $x=0, 1, 2, -1, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 时，对应的 y 值是：1, 2, 4, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 1.41, 0.707。

上面的例說明，当給定变量 x 任何一个实数值时，都可以求出对应的一个 y 值。相反地，当給定 y 一个正数值时，怎样去求它的反函数 x 的值呢？一般来說，当 $a>0$ 且 $a\neq1$，而 $y=N(N>0)$ 的时候，一定有一个唯一的数 b 能够满足等式：

$$a^b=N.$$

如果 1 以外的正数 a 的幂等于 N，那么幂指数 b 叫做以 a 为底的 N 的对数。

例如　$4^2=16$　可以說成以 4 为底 16 的对数是 2。

$10^{-3}=0.001$ 可以說成以 10 为底 0.001 的对数是 -3。

我們通常用符号 log 表示对数，上面的两个例就可以写成：

$$4^2=16, \qquad \text{則} \qquad \log_4 16=2.$$

$$10^{-3}=0.001, \qquad \text{則} \ \log_{10} 0.001=-3.$$

一般地說，我們可以将以 a 为底 N 的对数是 b 写成 $\log_a N=b$

log右下角的数 a 叫做底，N 叫做真数，b 是以 a 为底真数 N

的对数。

根据上述的对数定义，我們知道

$$a^b=N \text{ 和 } \log_a N=b \quad (a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$$

这两个式子所表示的 a, b, 和 N 三个数的关系是一样的。

例

$2^3=8$;	$\log_2 8=3$.
$10^4=10000$;	$\log_{10}10000=4$.
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$;	$\log_{\frac{1}{2}}16=-4$.
$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{16}$;	$\log_{64}\frac{1}{16}=-\frac{2}{3}$.
$a^m=K$;	$\log_a K=m$.

§2. 对数的性質　根据对数的定义，我們从

$$y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$$

可以得出对应的指数函数形式:

$$x=a^y.$$

現在根据这种对应关系，研究对数的一些基本性質:

1) 負数和零沒有对数　因为底数 $a>0$, 所以不論 y 是什么实数时，都得 $a^y>0$。这就是說，不論 y 是什么实数，$x=a^y$ 永远是正数。因此，由等式 $y=\log_a x$ 可以看到眞数 x 必須是正数，所以說只有眞数是正数时，才能求出它对于底数 a 的对数，也就是說負数与零沒有对数。

2) 1的对数永远是0。由于 $a^0=1$, 根据对数的定义就可以得出:

$$\log_a 1=0.$$

这个等式不論 a 为什么数时都合理(当然这里的 a 仍然是大于 0 且不等于 1), 所以說 1 的对数永远是 0。

3) 当底数大于 1 的时候，如果眞数大于 1, 它的对数是正的；如果眞数小于 1, 它的对数是負的。

在指数函数 $x=a^y$ 中 $(a>1)$:

若　$y>0$, 則 $x=a^y>1$。　　例如 $x=10^2=100>1$。

$y=0$, 则 $x=a^y=1$。　例如 $x=10^0=1$。

$y<0$, 则 $x=a^y=\frac{1}{a^{-y}}<1$。例如 $x=10^{-2}=\frac{1}{100}<1$。

根据等式关系，在 $y=\log_a x$ 中可对应地推出：

若 $x>1$, 則 $y>0$。例如 $\log_{10}1000=3$。

$x=1$, 則 $y=0$。例如 $\log_{10}1=0$。

若 $0<x<1$, 則 $y<0$。例如 $\log_{10}0.001=-3$。

4）底的对数等于 1。因为 $a^1=a$, 所以

$$\log_a a=1.$$

5）当底数大于 1 的时候，真数愈大它的对数也愈大。我們知道当底数 $a>1$ 的时候，在 $x=a^y$ 这个函数中，若 y 值增大时，x 的值也增大。例如，$2^5>2^4>2^3\cdots$ 等。用 y_1 和 y_2 表示 y 的两个不同的值，用 x_1 和 x_2 表示 a^y 的两个对应值，就可以得出：

若 $y_2>y_1$, 則 $a^{y_2}>a^{y_1}$ 卽 $x_2>x_1$。反之，若 $x_2>x_1$, 則 $a^{y_2}>a^{y_1}$, 卽 $y_2>y_1$。因此，由等式 $y=\log_a x$ 可以看到，当底大于 1 的时候，真数愈大，它的对数值也愈大。

§3. 积、商、幂、方根的对数

1）正因数的积的对数等于各个因数的对数的和。

設　$N_1=a^m$,　$N_2=a^n$

則　$\log_a N_1=m$,　$\log_a N_2=n$.

由于　$N_1\cdot N_2=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

所以　$\log_a N_1N_2=m+n=\log_a N_1+\log_a N_2$.

因为同底数的幂相乘，不論有多少个因数，都是将指数相加，所以上面的証明可以推广到若干个正因数的积。就是說，

$$\log_a(N_1\cdot N_2\cdot\cdots N_k)=\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_k.$$

2）两个正数的商的对数等于被除数的对数减去除数的对数。

設　$N_1=a^m$,　$N_2=a^n$

則　$\log_a N_1=m$,　$\log_a N_2=n$,

因为 $$\frac{N_1}{N_2}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

所以 $$\log_a\frac{N_1}{N_2}=m-n=\log_a N_1-\log_a N_2.$$

3）正数的幂的对数等于幂的底数的对数乘以幂的指数。

設 $$N_1=a^m,\ \text{则}\ \log_a N_1=m.$$

由于 $$N_1^p=(a^m)^p=a^{mp},$$

所以 $$\log_a N_1^p=pm=p\log_a N_1.$$

4）正数的算术根的对数等于被开方数的对数除以根指数。

事实上，因为 $N>0$ 和 $\sqrt[p]{N}=N^{\frac{1}{p}}$,

所以由 3) 可得:

$$\log_a\sqrt[p]{N}=\log_a N^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{p}\log_a N.$$

§ 4. 取式子的对数 根据上节所講的关于对数的四个性質，我們可以把某几个正数的幂，或者算术根相乘或相除所得的式子的对数，用式子里的各个数的对数来表示。这叫做取式子的对数。

例 1. 設 $$x=\frac{2.5\times 7^3}{0.28},\ \text{求}\ \log_a x.$$

解:
$$\log_a x=\log_a\frac{2.5\times 7^3}{0.28}=$$
$$=\log_a(2.5\times 7^3)-\log_a 0.28=$$
$$=\log_a 2.5+\log_a 7^3-\log_a 0.28=$$
$$=\log_a 2.5+3\log_a 7-\log_a 0.28.$$

2. 設 $$x=\frac{a\sqrt[3]{b}}{c^2\sqrt[3]{d^2}},\ \text{求}\ \log_{10}x.$$

解
$$\log_{10}x=\log_{10}\frac{a\sqrt[3]{b}}{c^2\sqrt[3]{d^2}}=$$
$$=\log_{10}(a\sqrt[3]{b})-\log_{10}(c^2\sqrt[3]{d^2})=$$
$$=\log_{10}a+\log_{10}\sqrt[3]{b}-\log_{10}c^2-\log_{10}\sqrt[3]{d^2}=$$
$$=\log_{10}a+\frac{1}{3}\log_{10}b-2\log_{10}c-\frac{2}{3}\log_{10}d.$$

§5. 从式子的对数式求原式 我們也可以从某一个式子的对数式求出这个式子。这叫做从式子的对数求原式。

从式子的对数式求原式就是将§3里所講的性質反过来应用。

1）几个正因数的积的对数，等于各个因数的对数的和，反过来就是，几个正因数的对数的和，等于这些因数的积的对数。

$$\log_a N_1+\log_a N_2+\cdots+\log_a N_k=\log_a(N_1N_2\cdots N_k).$$

2）两个正数的商的对数，等于被除数的对数减去除数的对数。反过来就是，两个正数的对数的差，等于这两个正数的商的对数。

$$\log_a N_1-\log_a N_2=\log_a\left(\frac{N_1}{N_2}\right).$$

3）一个正数的幂的对数，等于幂的底数的对数乘以幂的指数。反过来就是，一个正数的对数的 p 倍，等于这个正数的 p 次幂的对数。

$$p\log_a N=\log_a(N^p).$$

4）一个正数的算术根的对数，等于被开方数的对数除以根指数。反过来就是，一个正数的对数的 $\frac{1}{p}$ 倍（p 是大于1的整数），等于这个正数的 p 次算术根的对数。

$$\frac{1}{p}\log_a N=\log_a\sqrt[p]{N}.$$

应用上面所講的性質，就可以从式子的对数求出原式。

例 1. 已知 $\log_{10}x=\log_{10}a+\log_{10}b-3\log_{10}c$，求 x.

解:
$$\log_{10}x=\log_{10}a+\log_{10}b-3\log_{10}c=$$
$$=\log_{10}a+\log_{10}b-\log_{10}c^3=\log_{10}\frac{ab}{c^3}.$$

所以
$$x=\frac{ab}{c^3}.$$

2. 已知 $\log_a x=\frac{1}{2}\log_a(m-n)-\frac{1}{3}\log_a(m+n)$，求証 $x=\frac{\sqrt{m-n}}{\sqrt[3]{m+n}}$.

証
$$\log_a x=\frac{1}{2}\log_a(m-n)-\frac{1}{3}\log_a(m+n)=$$
$$=\log_a\sqrt{m-n}-\log_a\sqrt[3]{m+n}=\log_a\frac{\sqrt{m-n}}{\sqrt[3]{m+n}}.$$

所以
$$x=\frac{\sqrt{m-n}}{\sqrt[3]{m+n}}.$$

習 題

1. 把下列等式写成对数形式;

1) $2^3=8$　　　　2) $3^{-2}=\frac{1}{9}$

3) $4^{\frac{1}{2}}=2$　　　　4) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

5) $11^4=14641$　　　　6) $a^0=1$.

2. 把下列等式写成指数形式:

1) $\log_5 125=3$　　　　2) $\log_3\frac{1}{81}=-4$

3) $\log_8 2=\frac{1}{3}$　　　　4) $\log_{81}\frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$.

3. 求下列各式里的 x;

1) $4^x=\frac{1}{6}$　　　　2) $\log_x 216=3$

3) $\log_x\sqrt{8}=\frac{1}{2}$　　　　4) $\log_2 x=5$

5) $\log_{10}x=-1$　　　　6) $\log_{\sqrt{3}}x=4$

7) $\log_{49}\frac{1}{7}=x$　　　　8) $\log_2 0.125=-3$

9) $2\log_3 x=3\log_2 x-3$　　　　10) $(\log_2 x)^2-\log_2 x=0$.

4. 求下列各式以 10 为底的对数:

1)
$$x=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{4abc}$$

2)
$$x=\frac{5a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}}{m^2\sqrt[3]{n}}$$

3)
$$x=\frac{2}{5}\sqrt[3]{m\sqrt{n}}$$

4)
$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{a-1}\sqrt[3]{a^{-1}b^{-3}}}.$$

5. 已知 x 的对数,求 x.

1)
$$\log_a x=\log_a b+\log_a c+1.$$

2)
$$\log_a x=\frac{1}{2}(\log_a m+\log_a n)-1.$$

3)
$$\log_{10}x=3\log_{10}(a+b)-2\log_{10}(a-b).$$

4)
$$\log_{10}x=-\log_{10}(a+b)+\frac{2}{5}\left[2\log_{10}a-\frac{1}{3}\log_{10}b\right].$$

§6. 对数的种类 在 $y=\log_a x$ 式中，底数 a 是大于 0 而不等于 1 的任意实数。但是我們通常用的有两种对数，一种是常用对数，一种是自然对数。在实际計算当中，我們通常使用常用对数(也叫做十进系对数)，就是以 10 为底的对数，为了簡便，通常都将底 10 略去不写并且将"log"写成"lg"。就是說，将 $\log_{10} N$ 写成 $\lg N$ 以后在計算过程中，如果沒有說明对数的底，并且記成 $\lg N$ 的形式，都是指常用对数。除了常用对数以外，还有一种以常数 $e=$ $=2.71828\cdots$ 为底的对数，叫做自然对数(或叫納氏对数)。为了簡便，通常都将底 e 略去不写，并且将"log"写成"ln"就是說将 $\log_e N$ 記成 $\ln N$。在一般的計算中經常使用常用对数($\lg N$)。可是在高等数学中几乎只用自然对数($\ln N$)。象数学分析里的一部分公式。就采取了自然对数。这是因为对于那些公式，使用自然对数比使用别的系統的对数簡便。

§7. 10 的整指数幂的对数 常用对数($\lg N$)除了具有§2所講过的底大于 1 的对数所有的性質外，并具有一个便于計算的特殊性質。就是：

$$\lg 10^n = n \lg 10 = n,$$

所以不論 n 是正整数或負整数，10^n 的对数必是整数。今分別研究于下：

1) 10 的正整指数幂(1 后面带有若干个零的整数)的对数，等于真数里零的个数。

因为 10 的正整指数幂 $10^n=\underbrace{100\cdots0}_{n\text{个零}}$,

所以 $$\lg \underbrace{100\cdots0}_{n\text{个零}} = \lg 10^n = n.$$

2) 10 的負整指数幂(1 前面带有若干个零的純小数)的对数，是小数里零的个数(包括整数个位上的一个零)的反号数。

因为 10 的負整指数幂 $10^{-n}=\frac{1}{10^n}=\underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个零}}$,

所以 $$\lg \underbrace{0.00\cdots01}_{n\text{个零}}=\lg 10^{-n}=-n.$$

§8. 一般数的对数 10 的整指数幂以外的正有理数的对数都是无理数。

我們为了說明問題只举一个实例研究。例如，我們証明 lg 582 就是一个无理数。首先我們証明 lg 582 不可能是整数。

由于 $$100<582<1000,$$

所以 $$\lg 100<\lg 582<\lg 1000.$$

（因为底数 10 大于 1，所以真数愈大，对数值也愈大）

$$2<\lg 582<3.$$

可見 lg 582 不是整数，其次，証明 lg 582 也不可能是分数。因为如果 lg 582 是分数，那么 582 就应該是 10的 $\frac{a}{b}$ 次幂（b 是大于 1 的整数，a 是正整数）。由此可以得到 $10^{\frac{a}{b}}=582$，$10^a=582^b$。但是 10^a 是 1 后面带有若干个零的整数，可是 582^b 不是这样的数，所以上面的等式不能成立，因此，lg 582 不是分数，由此可知 lg 582 不是有理数，而是无理数。

为了明确一般的数的对数究竟是怎样的，我們先观察下表：

因为	$10^0=1$	所以	$\lg 1=0$
	$10^1=10$		$\lg 10=1$
	$10^2=100$		$\lg 100=2$
	$10^3=1000$		$\lg 1000=3$
	…………		…………
	$10^{-1}=0.1$		$\lg 0.1=-1$
	$10^{-2}=0.01$		$\lg 0.01=-2$
	$10^{-3}=0.001$		$\lg 0.001=-3$
	…………		…………

通过上表，很明显地可以看出：

1 同 10 之間任意数的对数 $=0+$ 正小数。

10 同 100 之間任意数的对数 $=1+$ 正小数。

100 同 1000 之間任意数的对数 $=2+$ 正小数。

依此类推，可見凡一位的数（或者整数部分是一位的数），它的对数必是正的純小数；两位的数（或者整数部分是两位的数），它的对数必是 1 加上一个正小数；三位的数（或者整数部分是三位的数）；它的对数必是 2 加上一个正小数；n 位的数（或者整数部分是 n 位的数），它的对数必是 $(n-1)$ 加上一个正小数。

同样通过上表也可以看出：

1 同 0.1 之間任意数的对数 $=\bar{1}+$ 正小数

0.1 同 0.01 之間任意数的对数 $=\bar{2}+$ 正小数

0.01 同 0.001 之間任意数的对数 $=\bar{3}+$ 正小数

依此类推，可見凡純小数的对数必是負数加上一个正小数；小数点以后如果沒有 0，它的对数是 -1（写成 $\bar{1}$）加上一个正小数；如果有一个 0，它的对数是 $\bar{2}$ 加上一个正小数，如果有 n 个 0，它的对数是 $\overline{n+1}$ 加上一个正小数。

§9. 首数和尾数 由上节可知如果一个数不是 10 的整次方，它的对数必是一个整数加上一个正小数。整数部分叫做对数的首数，正小数部分叫做对数的尾数。对数的首数可以是正整数或負整数，可是对数的尾数一定是一个正的純小数。

例如，$\lg 20=\lg 10+\lg 2=1+0.3010=1.3010$（$\lg 2=0.3010$ 是根据对数表查出来的，这将在 §10 中講到）。

所以 20 的对数的首数是 1，尾数是 0.3010。

又如 $\lg 0.02=\lg 0.01+\lg 2=-2+0.3010=\bar{2}.3010$

所以 0.02 的对数的首数是 -2，尾数是 0.3010。这里 $\bar{2}.3010$ 表示首数是負的，尾数是正的。它可以写做 $8.3010-10$ 或者 $0.3010-2$。但絕对不許写成 -2.3010。这是必須要注意的。

我們現在指出常用对数的一个重要性質：

如果两个数的有效数字相同，那末它們的对数的尾数相同。

举例来說明道理。0.121 和 1210 的有效数字都是 121，它們都可以表成一个大于 1 而小于 10 的数(1.21)和 10 的整指数幂的乘积：

$$0.121 = 1.21 \times 10^{-1}, \quad 1210 = 1.21 \times 10^{3},$$

所以

$$\lg 0.121 = \lg 1.21 + \lg 10^{-1} = \bar{1} + \lg 1.21,$$

$$\lg 1210 = \lg 1.21 + \lg 10^{3} = 3 + \lg 1.21.$$

但是依 § 8, lg 1.21 应在 0 与 1 之間，卽它是一个正小数。因此，由上面二式可知 lg 0.121, lg 1210 的尾数都是 lg 1.21。

定首数的方法。由 § 8 可以得出定对数的首数的两个規律：

1) 大于 1 的数，它的对数的首数是正数，并且等于眞数的整数部分的位数減去 1。

例

$$\lg 75 = 1 + (\text{正的純小数})$$
$$\lg 472 = 2 + (\text{正的純小数})$$
$$\lg 14600.225 = 4 + (\text{正的純小数})$$
$$\lg 50000000 = 7 + (\text{正的純小数})$$

……………………………………

2) 小于 1 的正数，它的对数的首数是負数，并且首数的絕对值等于眞数里第一个有效数字前面的零的个数(包括整数个位上的一个零)。

例：

$$\lg 0.752 = -1 + (\text{正的純小数}) = \bar{1} + \text{尾数}$$
$$\lg 0.0043 = -3 + (\text{正的純小数}) = \bar{3} + \text{尾数}$$
$$\lg \overbrace{0.00\cdots0}^{m\text{个}0}25 = -m + (\text{正的純小数}) = \bar{m} + \text{尾数}$$

……………………………………

§ 10. 四位对数表和它的使用法　一个数的对数的首数，我們很容易根据上节所講的性質将它求出来，至于它的尾数就要在对数尾数表(簡称对数表)里去找，現在最簡便适用的对数表是布拉

基斯的四位数学用表①。这个表的第一表給出了从 1 到 9999 全部整数的对数尾数的近似值，其誤差不超过 0.0001 的一半、因为根据上节講的，整数或小数的对数的首数可以用心算直接求出，对数的尾数由已知数的有效数字及其排列順序来决定，与小数点的位置无关，所以利用这个表可以求出任何一个四位数的对数。現在我們来說明利用这个表找一个数的对数尾数的方法。

1）根据上节所講的性質，凡只是小数点位置不同的数，它們的对数尾数都必定相同，因此，在找一个数的对数尾数的时候，对于眞数里最左一个有效数字以前的零和最右一个有效数字以后的零都可以不必去管它，而只将它看成是若干位的整数。例如要找出 0.00536 的对数尾数，就找 536 的对数尾数。又如要找 5360000 的对数尾数，也就是找 536 的对数尾数。

2）若整数是三位数，例如，我們求 654 的对数，我們就先在表中上端冠以 N 字一行内找到前两个数字 65，然后再从 N 字的那一列内找到数字 4。由数字 4 的那一行与由数字 65 的那一列的交叉处得到对数的尾数 8156（即 0.8156），因此，可求得 $\lg 6.54 = 0.8156$；$\lg 654 = 2.8156$；$\lg 0.00654 = \bar{3}.8156$。

3）若整数为两位数或一位数时，我們在这个数的后边添上一个零或两个零便可以看作是三位数。即可用同一方法找到它的对数尾数。例如，要求 68 的对数，我們在上端冠以 0 字的那一行找到它的对数尾数为 0.8325，因而 $\lg 68 = 1.8325$。同样可以求得 $\lg 0.68 = \bar{1}.8325$。

4）若整数为四位数，例如，我們要求 6754 的对数，先找出前三位 675 的对数尾数为 0.8293，再在修正值部分（附在表的右側）上端冠以 4 的那一行内找到与前两个数字 67 同列的对应修正值 3．将 3 加入 8293 中得到对数的尾数为 0.8296。因此 $\lg 6759 =$

---

① 布拉基斯：四位数学表（中譯本）人民教育出版社出版，1958。

$=3.8236$。

5）若整数为五位或更多的位数时，我們可以将等五位数四舍五入使成为一个四位数，再按照四位数去找出原数的对数尾数。例如

$$\lg\ 687681=\lg\ 687700=5.8374;$$
$$\lg 0.040752=\lg 0.04075=\bar{2}.6101;$$
$$\lg\ 1.0072=\lg\ 1.007=0.0030.$$

根据上节里所講的求对数首数的方法，以及本节所講的从表里找出对数尾数的方法，我們就能够求出任何一个数的对数来。例如，求下列各数的对数：

36.5; 804.7; 0.26; 0.00453; 7.2634; 9456.86,

先求出各个数的对数首数，将它們排列如下：

$$\lg\ 36.5=1.\cdots;\qquad \lg\ 804.7=2.\cdots,$$
$$\lg\ 0.26=\bar{1}.\cdots;\qquad \lg 0.00453=\bar{3}.\cdots,$$
$$\lg 7.2634=0.\cdots;\qquad \lg 9456.86=3.\cdots,$$

再从表里找出它們的对数尾数，将它写在首数后面：

$$\lg\ 36.5=1.5623;\quad \lg\ 804.7=2.9057;$$
$$\lg\ 0.26=\bar{1}.4150;\quad \lg 0.00453=\bar{3}.6561;$$
$$\lg 7.2634=0.8611;\quad \lg 9456.86=3.9757.$$

§11. 反对数表 已知某数的对数而要求出这个数时，可以使用反对数表（或叫眞数表），即布拉基斯四位数学用表第二表。这个表的排列与对数表的排列相反。眞数与尾数互换了位置。利用这个表我們能够由对数的尾数查出与这个尾数相对应的那个眞数的有效数字，再按照首数确定这个眞数的小数点位置。反对数表的构造与用法和对数表沒有什么不同。假如 $\lg x=\bar{1}.5245$，那么可用下述方法求出 x：暫且不管首数，从表中上端冠有 m 字的那一行中找到尾数的前两个数字 52，然后再从 m 字那一列找到尾数的第三个数字 4，由数字 4 那一行与数字 52 那一列交叉处得到眞数的有效

数字 3342. 对于尾数的第四个数字 5，我們在右側修正値部分找到了对应着 5 的修正值为 4。将修正值 4 加到已找出的数字 3342 上，得 3346。因为对数的首数为 $\bar{1}$，所以在第一个有效数字前面个位部分有一个零。因此 $x=0.3346$。再举一些例子：

如果 $\lg x=2.2863$， 则 $x=1933$；

如果 $\lg x=1.2863$， 則 $x=19.33$；

如果 $\lg x=0.2287$， 則 $x=1.693$；

如果 $\lg x=\bar{1}.7635$， 則 $x=0.5801$；

如果 $\lg x=\bar{3}.0436$， 則 $x=0.001106$；

如果 $\lg x=15.18$， 則 $x=1.514\times 10^{15}$；

如果 $\lg x=\overline{10}.5029$， 則 $x=3.184\times 10^{-10}$.

如果已知的对数尾数是五位或者五位以上的小数，我們也可以用四舍五入的方法，取四位小数来求对应的真数。例如已知的对数是 2.84362，我們就求和 2.8436 相对应的真数得 697.6；又如已知的对数是 $\bar{1}.008957$，我們就求和 $\bar{1}.0090$ 相对应的真数，得 0.1021。

習 題

1. 查表求下列各数的对数：

1) 125	2) 18	3) 10000000000
4) 25.6	5) 0.015	6) 0.0000000882
7) 3.008	8) 5490	9) 0.000006284
10) 0.9032	11) 0.06483	12) 0.00047926
13) 0.49276	14) 0.0152396	15) 2815260000000

2. 設 $\lg x$ 等于下列各数，查表求 x：

1) 1.7482	2) 0.4362	3) $\bar{1}.6415$
4) 25.6	5) $\bar{4}.7267$	6) $\bar{3}.2064$
7) 3.008	8) 0.5	9) 6.4980
10) 7.0995	11) 2.6149	12) 8.887
13) −4.6368	14) −0.98	15) −6.432

3. 利用对数的性質，查表求下列的值：

1) $\lg 27^{10}$　　2) $\lg(0.05)^3$　　3) $\lg\sqrt[5]{2135}$.

§12. 对数的运算　在应用对数作計算之前，須先熟習对数的四則算术运算；特别是含有負首数的对数运算，使用对数的技巧主要在这一方面。現在就各种运算分别加以研究。

I. 加法

例
$$2.1742+\bar{1}.5736=1.7478.$$
$$\bar{3}.4832+\bar{1}.6758=\bar{3}.1590.$$

加法要把各个对数的首数部分和尾数部分分别相加，然后将尾数相加所得的整数部分加到首数的代数和上。

II. 减法

例
$$2.4845-3.1796=\bar{1}.3049\,.$$
$$1.3516-\bar{2}.6432=2.7084\,.$$
$$\bar{3}.2534-\bar{5}.6718=1.5816\,.$$

例 1 中，从被减数的尾数 0.4845 减去减数的尾数 0.1796，結果为 0.3049；然后从被减数的首数 2 减去减数的首数 3，結果为 -1；最后把减得两个結果連起来写成 $\bar{1}.3049$。

例 2 的尾数相减时，第一个尾数要从首数借 1，也就是从 1.3516 减去 0.6432 得到 0.7084。首数相减是 $0-(-2)=2$。

例 3 和例 2 一样，被减数的尾数也要从首数借 1，就是从 1.2534 减去 0.6718 得到 0.5816。这时被减数的首数成为 $-3-1=$ $=-4$，而首数相减得到 $-4-(-5)=1$。結果为 1.5816。

III. 乘法　带有負首数的对数用正整数来乘时，首先要用正整数分别来乘对数的首数与尾数，然后相加。如果带有負首数的对数用小数来乘，那就需要首先将这个对数变回到全是負数的形状。例如将 $\bar{3}.6418$ 变成 -2.3582，然后相乘。最后将結果再化回首数加尾数的形式：$(-2.3582=-2-1+0-0.3582)=\bar{3}.6418$。

例
$$\bar{2}.1853\times 4=\bar{8}.7412$$
$$\bar{1}.8916\times 5=\bar{1}.4580$$