科学版

研究生教学丛书

# 现代分析及其应用引论

古志鸣 编



科学出版社
www.sciencep.com

## 内 容 简 介

本书用较短的篇幅介绍了流形上的微积分及其应用.书中的前三章的内容是预备知识,第4章到第9章分别介绍微分流形、流形上的向量场、微分形式与积分、de Rham上同调、映射度及奇异性等基本概念和理论,同时介绍了若干典型的应用.第10章是全书内容的一个综合应用.

本书叙述简明,注重概念与实例,信息量较大,适合作为非数学专业的理工科研究生的数学教材或教学参考书.也可作为物理、力学工作者及工程技术人员自学的入门读物.

**图书在版编目(CIP)数据**

现代分析及其应用引论/古志鸣编.—北京:科学出版社,2004

(科学版研究生教学丛书)

ISBN 7-03-012009-4

Ⅰ.现… Ⅱ.古… Ⅲ.可微分流形-研究生-教材 Ⅳ.O189.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第073513号

策划编辑:杨 波 吕 虹/文案编辑:邱 璐 贾瑞娜/责任校对:包志虹

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年1月第一次印刷 印张:12 1/4

印数:1—3 000 字数:228 000

**定价:22.00元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

# 前　　言

自从大数学家 B. Riemann 提出 $n$ 维流形的概念至今已有 150 年了. 流形概念相对于欧氏空间概念的进步,可以形象地比作“大地是球形的”思想相对于古人认为的“大地是平坦的”思想的进步. 由于其进步意义是众所周知的,所以在 20 世纪的数学领域中,流形成为最重要的研究对象之一,就是完全可以理解的了. 与此同时,流形上的微积分(古典微积分是它的特例)也迅速从数学界传播到物理学、力学及工程技术界,被视为掌握现代科学技术的一门必备的知识. 本书即从应用的角度介绍这一理论中最基本的内容. 我们想要达到的目的是使读者在较短的时间内了解现代数学这一主流分支的大意和基本语言.

由于本书预设的读者对象是非数学专业的人员,所以我们在本书前 3 章中简单地讨论了一些必需的预备知识,第 1 章介绍集合论的基本知识,它实际上是学习任何一门数学都需要的. 第 2 章介绍代数学的预备知识,没有这些代数工具,许多现代数学的理论就很难叙述和系统化. 第 3 章讨论欧氏空间的微分学,它是理解流形概念的前提,其理由是,流形上的每一点的附近都像欧氏空间中的一“小块”.

从第 4 章到第 6 章,我们介绍流形的概念,并讨论流形上的微分学和积分学的基本理论,这些内容是本书的核心部分.

流形与欧氏空间的本质区别是整体性质不同,要理解这一点,非有拓扑学的知识不可. 本书用讲座的方式介绍了最基本的代数拓扑学与微分拓扑学的初步知识,这些便是第 7 章和第 8 章的内容. 第 9 章介绍奇异性理论的入门性内容,对于了解流形上的映射的整体性质而言,奇异性是重要的关节点,它往往起到四两拨千斤的作用.

本书从第 4 章起就经常穿插地讲一些应用内容,而第 10 章则是全书内容的一个综合应用. 我们在这里选择了力学这一主题,其理由大致有两个,一是流形上的分析在力学中的应用发展最早,因而比较全面和典型;二是这个主题也许能适合较多的读者,因为自然科学和工程技术的绝大多数理论都是从力学发展演变来的.

本书是由 6 年前的一份讲义开始,逐渐修改和充实而形成的. 原讲义的听众为非数学专业的理工科研究生,鉴于这一点,本书尽量不用太多的预备知识和训练,我们只需要工科大学本科的微积分和线性代数知识. 为了说清楚基本内容,我们大量地采用例子来解释定义和定理的含义. 我们认为,对于应用者来说,理解定理说的“是什么”,这一点是首先要做到的. 至于定理的证明,我们只选了一些对理解基本思想必不可少的证明方法予以介绍. 对于那些需要较多的预备知识的证明过程

就略而不讲了,也有一些证明则只求说清思路而略去了逻辑上的细节,读者如需了解这些细节,可参阅书中推荐的文献.

作者感谢南京航空航天大学研究生院和教务处的大力支持,感谢吕虹编审与杨波编辑付出的辛勤劳动.

限于作者的学术水平,书中难免有不当之处,请读者指正.

编　　者

2003 年

# 符 号 表

$\mathbf{N}$:全体正整数

$\mathbf{Z}$:全体整数

$\mathbf{Q}$:全体有理数

$\mathbf{R}$:全体实数

$\mathbf{C}$:全体复数

$\mathbf{Z}_q$:整数模 $q$ 同余类环

$\mathbf{K}^n$:集合$\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathbf{K},i=1,2,\cdots,n\}$,其中 $\mathbf{K}$ 代表 $\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$.

$Mn(\mathbf{K})$:元素为 $\mathbf{K}$ 中数的全体 $n$ 阶矩阵,$\mathbf{K}$ 同上.

$GL(n,\mathbf{K})$:$Mn(\mathbf{K})$中的全体可逆矩阵.

$O(n)$:$GL(n,\mathbf{R})$中全体正交矩阵.

$SO(n)$:$O(n)$中行列式为 1 的全体正交矩阵.

$V^*$:向量空间 $V$ 的对偶空间.

$S^n$:$n$ 维单位球面$\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$.

$T_x(M)$:微分流形 $M$ 上点 $x$ 处的切空间.

$\Omega^r(M)$:微分流形 $M$ 上全体 $r$ 次光滑微分形式.

$H_D^q(M)$:$M$ 的第 $q$ 个 de Rham 上同调群.

$H_q(M;G)$:$M$ 的以 $G$ 为系数群的第 $q$ 个同调群.

$\varepsilon_n$:$\mathbf{R}^n$ 的原点处的全体 $C^\infty$类函数芽.

# 目　录

# 第 1 章　映射与等价关系

## §1.1　映　　射

近代数学发展的历史表明,集合论的语言对于整个数学来说都是合适的,所以我们在第 1 章中复习集合论中的一些内容,它们是本书后继内容所必需的.我们假定关于集合的一些初等知识,比如子集与包含的概念,交运算、并运算、补运算以及它们的运算规律等都是已知的.

**定义 1.1**　设 $X,Y$ 是非空集合,$f$ 是一个法则,即对 $X$ 中每个元素 $x$,有 $Y$ 中惟一元素 $y$ 与之对应,则称 $f$ 定义了从 $X$ 到 $Y$ 的一个**映射**.记为 $f:X\to Y$,并把元素之间的对应关系写成

$$x\mapsto y \quad 或 \quad f(x)=y.$$

特别当上述的集合 $Y$ 是数集的时候,也称 $f$ 是定义在 $X$ 上的**函数**.

我们常用表示对应法则的字母 $f$ 来表示整个映射,符号 $f(x)$ 只用来代表元素 $x$ 的像.

**例 1.1**　设 $X,Y$ 为集合,$y_0$ 为 $Y$ 中一个选定的元素,对 $X$ 中每个元素 $x$,总指定 $x$ 对应 $y_0$,这种映射叫**常值映射**.

**例 1.2**　设 $X$ 为集合,对 $X$ 中每个元素 $x$,指定 $x$ 对应 $x$,这样得到的从 $X$ 到自身的映射叫 $X$ 的**恒等映射**,记之为 $1_X$.

**例 1.3**　设 $A$ 为集 $X$ 的子集,定义

$$i:A\to X$$

为 $i(a)=a$,对任何 $a\in A$.这叫做 $A$ 到 $X$ 的**含入映射**.

**例 1.4**　设 $f:X\to Y$ 为映射,$A\subset X$,定义映射

$$A\to Y$$

为 $a\mapsto f(a)$,对任何 $a\in A$,称之为 $f$ 在 $A$ 上的**限制**(映射),记之为 $f|_A$.又称 $f$ 为 $f|_A$ 在 $X$ 上的一个**扩张**(映射),或**延拓**.

**注**　已知 $f$,求 $f|_A$ 是容易的,而且答案是惟一的.但是反问题却比较复杂,同时又往往很重要.精确地说,反问题可叙述如下:设 $g:A\to Y$ 是已知的映射,$A\subset X$,问是否存在适合某种条件的映射 $f:X\to Y$,使得 $f|_A$ 就是 $g$.

例如,设 $x_1,x_2,y_1,y_2$ 是 4 个已知的实数,$x_1\neq x_2$,定义

$$g:\{x_1,x_2\}\to \mathbf{R}$$

为

$$g(x_1) = y_1, \quad g(x_2) = y_2.$$

则存在惟一的一次函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得 $f$ 是 $g$ 的扩张.这实际上就是两个不同的点确定惟一的一条直线这一原理的另一表述.注意,这里要求 $f$ 是一次函数,故它是惟一的,若不加这个条件,$g$ 的扩张不惟一.

又如定义 $g:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$ 为 $g(x)=\dfrac{1}{x}$,要把 $g$ 扩张到 $\mathbf{R}$ 上是很容易的,但如果要求 $g$ 在 $\mathbf{R}$ 上的扩张是连续函数,则此问题无解.

再如,考虑常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3,\\ y(x_0) = y_0.\end{cases}$$

我们可以这样来理解这个问题,设 $g:\{x_0\}\to\mathbf{R}$ 为

$$g(x_0) = y_0,$$

问是否存在 $x_0$ 的邻域 $N$ 及可微的函数 $f:N\to\mathbf{R}$,使得 $f'(x)=x^3$,且 $f$ 是 $g$ 的扩张,显然这个问题有惟一解.

**定义 1.2**　设 $f:X\to Y$ 为映射,若对 $Y$ 中每个元素 $y$,必有 $X$ 中的元素 $x$,使得 $f(x)=y$,则称 $f$ 为**满映射**(简称为满射).

**注**　若 $f:X\to Y$ 为满射,则对任何 $b\in Y$,方程

$$f(x) = b$$

在 $X$ 中有解.

**定义 1.3**　设 $f:X\to Y$ 为映射,若对 $X$ 中任何两个不同元素 $x_1$ 与 $x_2$,必有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 $f$ 为**单映射**(简称为单射).

**注**　若 $f:X\to Y$ 为单射,$b\in Y$,使得方程 $f(x)=b$ 在 $X$ 中有解,则此方程只有一个解.

**定义 1.4**　若一个映射既是满射,又是单射,则称之为**双射**.

**例 1.5**　设 $k$ 为非 0 实数,则 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=kx$ 为双射.

**例 1.6**　设 $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数,则 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$,$g(x)=\mathrm{e}^x$ 是双射.

两个映射的相等是一个重要概念,它有几种不完全相同的定义,分别适用于不同的场合,下面的定义是最严格的一个,今后若无特别申明,提到映射相等时都是指这种含义.

**定义 1.5**　设 $f:X\to Y$,$g:V\to W$ 是映射.若 $X=V$,$Y=W$,而且对每个 $x\in X$,总有 $f(x)=g(x)$,则称 $f$ 与 $g$ **相等**,记之为 $f=g$.

**注**　按定义 1.5,当 $A$ 为 $X$ 的真子集时,例 1.2 中的 $1_X$ 与例 1.3 中的 $i$ 不相等,例 1.4 中的 $f$ 与 $f|_A$ 不相等.另外,例 1.1 中的常值映射与下面的映射不相等(当 $Y$ 中不止一个元素时)

$$X \to \{y_0\}, \quad x \mapsto y_0, \quad \text{对任何 } x \in X.$$

**定义 1.6** 设 $f: X \to Y$ 是映射，$A$ 为 $X$ 的子集，$B$ 为 $Y$ 的子集，令

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\},$$
$$f^{-1}(B) = \{x \mid x \in X, f(x) \in B\}.$$

特别当 $B$ 只有一个元素 $y$ 时，简记为 $f^{-1}(B) = f^{-1}(y)$.

通常将 $f(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 分别称为 $A$ 的像集和 $B$ 的原像集，它们有以下基本性质：设 $f: X \to Y$ 为映射，若

(1) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $X$ 的一族子集，则

$$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda),$$
$$f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).$$

(2) $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $Y$ 的一族子集，则

$$f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda),$$
$$f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).$$

(3) $A \subset X, B \subset Y$，则

$$A \subset f^{-1}(f(A)),$$
$$B \cap f(X) = f(f^{-1}(B)).$$

**注**

(i) 以上记号 $f(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 只是集合的符号，尤其是后者，不要与下面将要提到的逆映射相混淆.

(ii) $f: X \to Y$ 是满射 $\Leftrightarrow f(X) = Y$.

(iii) $f: X \to Y$ 是单射 $\Leftrightarrow$ 对 $f(X)$ 中任何元素 $y$，$f^{-1}(y)$ 只有一个元素.

**例 1.7** 如例 1.1 中的常值映射，有

$$f^{-1}(y_0) = X, \quad f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(Y - \{y_0\}) = \varnothing.$$

## §1.2 映射的复合

**定义 1.7** 设 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ 均为映射，若对于 $X$ 中每个元素 $x$，令 $Z$ 中元素 $g(f(x))$ 与之对应，则得到从 $X$ 到 $Z$ 的映射，称之为 $f$ 与 $g$ 的**复合**. 记为 $g \circ f: X \to Z$，即

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{对任何 } x \in X.$$

**例 1.8** 设 $f: X \to Y$ 为映射，则 $f \circ 1_X = f$，$1_Y \circ f = f$，又若 $i: A \to X$ 为含入映射，则 $f \circ i = f|_A$.

**命题 1.1** 设 $f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$ 均为映射，则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(证略)

**注**

(i) 上述命题可看成复合这种运算的结合律.

(ii) 一般来说,复合运算是不能交换次序的,请读者举例说明.

**定理 1.1**　设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$.若

(i) $f,g$ 均单,则 $g\circ f$ 单.

(ii) $f,g$ 均满,则 $g\circ f$ 满.

(iii) $g\circ f$ 单,则 $f$ 单.

(iv) $g\circ f$ 满,则 $g$ 满.

**证明**　只证(i)与(iii).

(i) 对 $x_1,x_2\in X$,若 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$,则

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

因为 $g$ 单,所以 $f(x_1)=f(x_2)$,又因为 $f$ 单,所以 $x_1=x_2$.

(iii) 对 $x_1,x_2\in X$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

因为 $g\circ f$ 单,所以 $x_1=x_2$.

## §1.3　可逆映射

**定义 1.8**　设 $f:X\to Y$ 为映射,若存在映射 $g:Y\to X$,使得

$$g\circ f = 1_X,\quad f\circ g = 1_Y,$$

则称 $f$ **可逆**,此时称 $g$ 为 $f$ 的**逆映射**.

**命题 1.2**　若 $f:X\to Y$ 可逆,则其逆映射只有一个.

**证明**　设 $g_1,g_2:Y\to X$ 都是 $f$ 的逆映射,则

$$g_1 = g_1\circ 1_Y = g_1\circ(f\circ g_2) = (g_1\circ f)\circ g_2 = 1_X\circ g_2 = g_2.$$

**注**　若 $f$ 可逆,则记它的逆映射为 $f^{-1}$.

**例 1.9**　例 1.5 中的 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 可逆,$f^{-1}(x)=\frac{1}{k}x, x\in\mathbf{R}$.

例 1.6 中的 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ 可逆,$g^{-1}(x)=\ln x, x\in\mathbf{R}^+$.

**定理 1.2**　$f:X\to Y$ 可逆$\Leftrightarrow f$ 是双射.

**证明**　设 $f$ 可逆.先证 $f$ 是满射.任取 $y\in Y$,令

$$x = f^{-1}(y),$$

则 $f(x)=f(f^{-1}(y))=y$,即 $f$ 满.

再证 $f$ 是单射.设 $x_1,x_2\in X$,且 $f(x_1)=f(x_2)$,则

$$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)),$$

即 $x_1=x_2$,可见 $f$ 是单射.

又设 $f$ 是双射.先定义 $g:Y\to X$ 如下:对任何 $y\in Y$,因 $f$ 满,故必有 $x\in X$,使 $f(x)=y$,又因 $f$ 单,故这样的 $x$ 惟一存在,所以如果定义 $g(y)=x$,则 $g$ 确实是映射.容易证明 $g$ 就是 $f$ 的逆映射.

**例 1.10** $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f_1(x)=\sin x$,不可逆.

$$f_2:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1], f_2(x)=\sin x,\text{可逆}.$$

**定理 1.3** 设 $f:X\to Y, g:Y\to Z$ 均可逆,则

(i) $f^{-1}$ 可逆,且 $(f^{-1})^{-1}=f$.

(ii) $g\circ f$ 可逆,且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 与集合 $B$ 之间有一个双射,那么显然 $B$ 中有 $n$ 个元素.可以把这一想法推广如下.

**定义 1.9** 设 $A$ 与 $B$ 为集合,若存在从 $A$ 到 $B$ 的双射,就称 $A$ 与 $B$ **等势**,或说 $A$ 与 $B$ 有相同的**基数**.

**定义 1.10** 设 $n\in\mathbf{N}$,称与集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 等势的集为**有限集**,并说其基数为 $n$,不是有限集的集合叫做**无限集**,称与 $\mathbf{N}$ 等势的无限集为**可数无限集**,其他无限集叫**不可数无限集**.

**例 1.11** 由例 1.6 知,$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^+$ 等势.由映射

$$\mathbf{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\quad x\mapsto\arctan x$$

知 $\mathbf{R}$ 与开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 等势,从而 $\mathbf{R}$ 与任何开区间 $(a,b)$ 等势.

**例 1.12** $\mathbf{Q}$ 是可数无限集,$\mathbf{R}$ 是不可数无限集(证略).

## §1.4 笛卡儿积

**定义 1.11** 设 $A,B$ 为集合,称集合

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

为 $A$ 与 $B$ 的**笛卡儿**(Cartesian)**积**.

**例 1.13**

(i) $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,简记之为 $\mathbf{R}^2$.

(ii) 记 $\mathbf{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}, \mathbf{Z}_3=\{\tilde{0},\tilde{1},\tilde{2}\}$,则

$$\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_3=\{(\bar{0},\tilde{0}),(\bar{0},\tilde{1}),(\bar{0},\tilde{2}),(\bar{1},\tilde{0}),(\bar{1},\tilde{1}),(\bar{1},\tilde{2})\}.$$

(iii) 设 $S^1$ 为单位圆周,$I$ 为闭区间 $[0,1]$,则 $S^1\times I$ 是以 $S^1$ 为准线,$I$ 为母线的圆柱面.

**注**

(i) 存在双射 $A\times B\to B\times A$,故我们在不造成混淆的情况下对两者不加区别.

(ii) 笛卡儿积的概念可推广到

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\},$$

并且显然有

$$(A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n.$$

例如,$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n\text{个}\mathbf{R}}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}\}$.

(iii) 设 $A,B$ 为集合,定义映射

$$P_1:A\times B\to A,\quad P_1(a,b)=a;$$

$$P_2:A\times B\to B,\quad P_2(a,b)=b.$$

分别称为**向第 1、第 2 个因子的投影**.

(iv) 设有映射 $f:A\to X,g:B\to Y$,则定义映射

$$f\times g:A\times B\to X\times Y,\quad (f\times g)(a,b)=(f(a),g(b)),$$

称之为 $f$ **与** $g$ **的笛卡儿积**.

**定义 1.12** 设 $f:X\to Y$ 为映射,称 $X\times Y$ 的子集

$$\{(x,f(x))\mid x\in X\}$$

为 $f$ 的**图像**,记作 $\mathrm{gra}(f)$.

读者都知道,定义在实数集上的函数有所谓的"图像表示法",我们可以把这种思想用于定义"隐函数". 设 $F:X\times Y\to Z$ 是映射,$\theta$ 为 $Z$ 中一个定元. 若有映射 $f:A\to Y,A\subset X$,使得 $F^{-1}(\theta)$包含 $f$ 的图像,即对任何 $x\in A$,成立

$$F(x,f(x))=\theta,$$

就说 $f$ 是方程 $F(x,y)=\theta$ 确定的,这种用方程确定的映射,在历史上叫做"**隐函数**",我们有时也这样称呼它们. 显然,任何映射 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 都可以看成方程 $y-f(x)=0$ 确定的隐函数,这里的 $F:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$,$F(x,y)=y-f(x)$.

## §1.5 等 价 关 系

本节将把向量的相等,三角形的全等,相似等概念中的共性抽象出来.

**定义 1.13** 设 $A,B$ 是集合,$A$ 与 $B$ 的一个**关系** $R$ 是指 $A\times B$ 的一个子集. 如果$(a,b)\in R$,常写成 $aRb$.

例如,在 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中,子集 $E=\{(x,y)\mid x=y\}$ 描述的关系是实数的"相等"关系.

又如 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的子集 $N=\{(x,y)\mid x<y\}$ 描写的关系是实数之间的"小于"

关系.

映射 $f: X \to Y$ 的图像 gra($f$)是 $X \times Y$ 的子集,所以也可以把映射 $f$ 看成是 $X$ 与 $Y$ 的一个关系.

**定义 1.14** 设 $A$ 是集合,$A$ 上的一个**等价关系**$\sim$是指 $A \times A$ 的一个子集,并适合

(i) $a \in A \Rightarrow a \sim a$; (自反性)

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$; (对称性)

(iii) $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$. (传递性)

通常把 $a \sim b$ 读作"$a$ 等价于 $b$".

**注** 在全体三角形组成的集合中,我们学过两种等价关系,即全等和相似.

**定义 1.15** 设 $A$ 是集合,$\sim$是 $A$ 上的一个等价关系,若 $a \in A$,则称 $A$ 的子集$\{x \in A \mid x \sim a\}$为 $A$ 中关于$\sim$的一个**等价类**,该子集中任何一个元素都叫做该等价类的**代表元**.若某等价类中有代表元 $a$,则常把这个等价类记作$[a]_{\sim}$,即

$$[a]_{\sim} = \{x \in A \mid x \sim a\}.$$

**例 1.14** 取定正整数 $q$,在 $\mathbf{Z}$ 中可以定义等价关系

$$m \sim n \Leftrightarrow m - n \text{ 被 } q \text{ 整除}$$

(请读者验证这个"$\sim$"确实是等价关系),取 $q=2$,即在 $\mathbf{Z}$ 中有等价关系

$$m \sim n \Leftrightarrow m - n \text{ 为偶数},$$

由此立得

$$m \sim n \Leftrightarrow m \text{ 与 } n \text{ 有相同的奇偶性},$$

而且有

$$[0]_{\sim} = \text{全体偶数}, \qquad [1]_{\sim} = \text{全体奇数}.$$

显然,$\mathbf{Z}$ 关于这个等价关系只有这两个不同的等价类,并且

$$[0]_{\sim} \cup [1]_{\sim} = \mathbf{Z} \qquad [0]_{\sim} \cap [1]_{\sim} = \varnothing.$$

最后一个性质不是偶然现象,即有如下定理.

**定理 1.4** 设$\sim$是集 $A$ 上的一个等价关系,则

(i) $A$ 关于$\sim$的任何两个不相同的等价类不相交.

(ii) $A$ 关于$\sim$的全体互不相同的等价类之并为 $A$.

**证明** (i) 设$[a]_{\sim}$与$[a']_{\sim}$是 $A$ 关于$\sim$的两个等价类.若 $b \in [a]_{\sim} \cap [a']_{\sim}$,则 $a \sim b$,且 $a' \sim b$.由对称性和传递性,知 $a \sim a'$,故$[a]_{\sim}$与$[a']_{\sim}$应是同一个等价类.

(ii) 由自反性即知.

**注** 上述定理是说 $A$ 关于$\sim$的全体互不相同的等价类恰好把 $A$ 分割成互不相交的子集的并集,这导致下面一个概念.

**定义 1.16** 设 $X$ 为集合,$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$是 $X$ 的某些子集,而且

(i) 对任何 $\lambda\neq\mu\in\Lambda$，有 $X_\lambda\cap X_\mu=\varnothing$.

(ii) $X=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$.

则称 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $X$ 的一个**分划**.

**注**　上述定理又可以说成：$A$ 关于等价关系 $\sim$ 的全体互不相同的等价类组成 $A$ 的一个分划. 反过来，我们还有

**定理 1.5**　设 $A$ 是一个集合，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $A$ 的一个分划. 则

(i) 若定义 $a\sim b\Leftrightarrow a$ 与 $b$ 属于同一个 $A_\lambda$，对 $a,b\in A$，则 $\sim$ 是 $A$ 上的一个等价关系.

(ii) $A$ 关于(i)中的 $\sim$ 的全体互不相同的等价类恰是分划 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.（证略）

**注**　显然，在定理 1.6 的条件下，若以 $A$ 关于 $\sim$ 的全体互不相同的等价类做分划，按定理 1.7(i)的办法定义出的等价关系就是原来的等价关系. 所以一个集合上的全体分划与全体等价关系之间有一个双射.

**定义 1.17**　设 $A$ 上有等价关系 $\sim$，把 $A$ 关于 $\sim$ 的全体互不相同的等价类组成的集合(即每个等价类作为一个元素)称为 $A$ 关于 $\sim$ 的**商集合**，记作 $A/\sim$.

**例 1.15**　设 $T$ 为正的常数，在实数集 $\mathbf{R}$ 中定义等价关系：

$$x\sim y\Leftrightarrow x-y=nT,\ n\in\mathbf{Z}.$$

则商集合 $\mathbf{R}/\sim$ 与单位圆周 $S^1$ 之间有双射(请读者验证).

**例 1.16**　在例 1.14 中，$\mathbf{Z}/\sim$ 常以 $\mathbf{Z}_q$ 表示，其中一个元素叫做整数模 $q$ 的一个同余类. 如果用 $\overline{m}$ 表示整数 $m$ 所代表的模 $q$ 同余类，则可写成

$$\mathbf{Z}_q=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{q-1}\}.$$

**注**　直观地讲，如果把 $A$ 中的元素看成“点”(如例 1.15)，则 $A/\sim$ 中的元素就是把 $A$ 中互相等价的点“捏”在一起得到的新的“点”.

# 第2章　代数预备知识

从纯形式的角度看,一个集合不过是其全部元素的总体,除了它的基数之外,并无其他性质可言.但是,在数学中最有价值的集合往往有极其丰富的内涵.比如全体实数 $\mathbf{R}$,其中有大家熟知的加法和乘法这些代数运算,有序(即可以比较任何两个实数的大小),还有距离(即绝对值 $|x-y|$, $x,y\in\mathbf{R}$),等等.数学上常常把上述几种性质说成 $\mathbf{R}$ 有代数结构、序结构和距离结构.本章将讨论一些基本的代数结构.

要给一个集合 $A$ 建立一种代数结构,就是在 $A$ 上定义几种代数运算. $A$ 上的一种二元代数运算(简称为二元运算)是满足某些性质的映射

$$\alpha: A\times A\to A,$$

即对任何 $x,y\in A$,有 $A$ 中惟一元素 $\alpha(x,y)$ 与之对应.

**例 2.1**

(i) $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)中的加法、减法与乘法均为 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)上的二元运算.

(ii) 在 $\mathbf{R}^n$ 上,映射

$$((x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n))\mapsto(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

是二元运算.

(iii) 在 $\mathbf{R}^3$ 上,映射

$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))\mapsto\left(\begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3 & x_1\\ y_3 & y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

是二元运算.

(iv) 可在 $\mathbf{Z}_q$ 上定义一个二元运算——加法

$$\bar{m}+\bar{n}=\overline{m+n},\qquad 对任何\ \bar{m},\bar{n}\in\mathbf{Z}_q.$$

为使这个定义合理,必须验证它与代表元的选取无关,即若 $\overline{m'}=\bar{m}$, $\overline{n'}=\bar{n}$,应有 $\overline{m'+n'}=\overline{m+n}$.事实上,因为

$$m'-m=kq,\quad n'-n=lq,\quad k,l\in\mathbf{Z},$$

所以

$$m'=m+kq,\quad n'=n+lq.$$

两式相加得

$$m'+n'=(m+n)+(k+l)q,$$

即知