〔苏〕A. 费齐索夫 著

姬振豫 译 梁鸿绩 校

# 谈谈几何中的证明

TANTAN JIHE ZHONG DE ZHENGMING

天津人民出版社

# 谈谈几何中的证明

〔苏〕A.И.费齐索夫 著
姬振豫 译 梁鸿绩 校

天津人民出版社

**谈谈几何中的证明**

〔苏〕A·И·费齐索夫 著

姬振豫 译　梁鸿绩 校

*

天津人民出版社出版

（天津市赤峰道124号）

天津新华印刷二厂印刷　天津市新华书店发行

*

787×1092毫米32开本 2印张 41千字

1983年11月第1版　1983年11月第1次印刷

印数：1—37,300

统一书号：7072·1321

定　价　0.21 元

# 代译者的话

如所周知，培养学生的逻辑推理能力，是中学数学课中的重要的教学要求之一．近年来随着教学的不断改革，中学数学各个分支的教材中，都不同程度地加强了逻辑推理的因素，提高了对培养学生的逻辑推理能力的要求．但是从学科的特点来看，通过初中平面几何课的教学，对培养学生的逻辑推理能力，还是有独特的作用的．

从多年的教学经验可知，学生初学平面几何时，常有不得门径之感．尤其是对于验证无疑的命题尚须推理证明，其意义不够明确，对于推理证明的要求，也觉得难以抓住要领，特别是作为推理证明的依据，又有不作推理证明的其它命题（公理），更感不知所之．在经过一个阶段的学习之后，即使解答过一定数量的证明题，对于一般常用的推证通法的形式和要求，也常不够明确，以致在具体的推证过程中出现舛漏还不自知．凡此种种，都已为教师所感受，并成为亟待研究和解决的问题了．

姬振豫同志翻译的《谈谈几何学中的证明》，主要就是针对上述的问题，结合着实例，从理论上作了较具体的阐述．是一本提供给教师、用作解决上述问题的教学参考书．

在这本小册子即将付印之际，有鉴于此，愿作数语如上，

用作向读者对这本小册子的简介.

钟善基

1982年12月于北京师范大学

# 前　言

刚开学时，有一天我偶然听到两个女生的一次闲谈．她们谈的是对课程、老师和同学方面的各自的看法．其中那位较大一点的女孩认为几何课很难学．

她说："真奇怪！老师进了教室，在黑板上画了两个一样的三角形，接着就用一节课的时间证明这两个三角形全等，可我还是搞不清讲的都是什么．"然后，她问另一位较小的女孩："你是怎样搞懂这节课的？"回答是："老师讲的每句话我也并不能完全弄懂记住，我是靠课后复习．"

当天晚上，那个女孩坐在窗前用功地学着几何："为要证明两个三角形全等，我们把三角形$A'B'C'$重叠放在三角形$ABC$上，…把三角形$A'B'C'$重叠放在三角形$ABC$上．…"她这样一遍又一遍地重复着．可惜，我真不知道这个女孩怎样才能学好几何，但我已了解到这门功课对她来说确不是容易的．

后来，又有一位名叫托利亚的学生来看我，他也提到对几何很感莫名其妙！他们的老师给他们讲了一条定理：三角形的一个外角大于和它不相邻的任一内

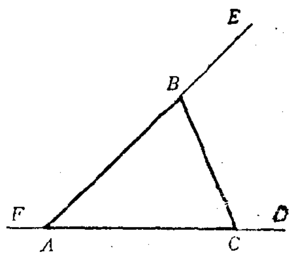


图　1

角，并且还叫他们在家里复习这条定理. 托利亚指着课本上的图问我：“既然图形已十分清楚地表明了三角形的外角是钝角，而和它不相邻的两个内角都是锐角（图 1），那末这冗长而复杂的证明是否还有意义？”托利亚强调：“一个钝角总是大于一个锐角，这显然不用证明.”于是我指给托利亚，这一点决不是自明的，有充足的理由说明这得坚持要证明.

最近，我看到一个男生的一份试卷，这试卷也有一处，错误地忽视了不可少的证明. 这个问题是求一个等腰梯形的高，这个梯形的两底各为 9 $cm$和25$cm$，腰是17$cm$. 他解这个问题是根据圆外切四边形定理（圆外切四边形的对边之和相等），这个梯形有内切圆（$9+25=17+17$），这时，这个等腰梯形的高和它的内切圆的直径相等，而此直径又等于它的两底的几何平均值（这是学生已经学过的知识）.

上述解法表面上简明合理，但是教师却指出，这里引用圆外切四边形定理是错误的. 这使这个学生困惑不解：“难道圆外切四边形对边之和相等是不对的吗？梯形的两底之和等于它的两腰之和，从而它就有内切圆也不对吗？究竟错在哪儿呢？”

此类实例不胜枚举，学生往往不理解为什么一些似乎十分明显，用不着证明的事实却还要证明. 而且证明还常常是非常难懂，非常麻烦的. 有时还出现这种情况，一个看上去是清楚而合理的证明，经过仔细推敲后却原来是错误的.

这本小册子的使命是帮助学生明白以下几点：

1. 什么是证明？

2．证明的目的是什么？

3．证明应采取什么形式？

4．在几何里，什么样的命题可以不要证明？

## §1．什么是证明

1．我们试问：什么是证明？假定你打算使人相信地球是球形的，你可以告诉他们：当一位观测者离开地面上升时，视野就更宽广；可以做环球旅行；在月蚀的时候，地球落在月球上是一个圆形的阴影等等．

这样用来使人相信的各个结论称做证明的论据．是什么来决定一个论据的力量和可信性呢？让我们讨论一下上面列举的论据中的最后一个．我们强调地球是圆的，因为它的阴影是圆的。这个说法是基于下述事实，通过经验人们知道一切球形物体的阴影都是圆的．反之也一样，如果对物体的任意位置都得到圆形阴影，这阴影就是一个球形物体投射的．因此，按这情形，我们首先是利用关于周围物质世界各物体的性质的日常经验，然后粗略地采用下述形式描述一个论断，“不论在什么位置投射，其阴影都是圆形的，这样的一切物体都是球形的．”“在月蚀的时候，不管怎样变换所处的相对位置，地球在月球上总是投射一个圆形的阴影。”因此断言：“地球是球形的．”

再举一个物理学里的例子．

上个世纪的六十年代，英国物理学家马克斯韦尔得到一个结论：电磁振荡穿过空间的传播速度和光速是相同的，由

此他推测光也是一种电磁振荡的形式．为要证实这个推测，就不能只限于传播速度．应当搞清楚光和电磁振荡的性质都一致，还应当提供证明两种现象的性质相同的必要论据。这样的论据是从极化试验的结果，以及能明显地说明光和电磁振荡具有相同的自然属性的其他一些事实得到的．

我们再举一个算术中的例子．取一些奇数，并把这些奇数都平方起来，然后再从每个平方减去1，这样就得到

$7^2-1=48$；$11^2-1=120$；$5^2-1=24$；$9^2-1=80$；

$15^2-1=224$．

等等．看一看按这种方法得到的各个数，我们发现，它们具有一个共同的特征，即每个数都能被8整除，再试几个别的奇数，也都有同样的结果，于是我们有理由提出下列假设："每个奇数的平方减1是8的整数倍．"

因为我们涉及的是任意奇数，所以为了证明这一假设，还应当对每个奇数都提出论据．考虑到这一点，我们回想一下，每个奇数都具有$2n-1$的形式，其中$n$是一个任意的自然数．任一个奇数的平方减1可写成$(2n-1)^2-1$的形式，去括号得

$$
\begin{aligned}
(2n-1)^2-1&=4n^2-4n+1-1\\
&=4n^2-4n\\
&=4n(n-1).
\end{aligned}
$$

得出来的这个式子，对每个自然数$n$都能被8整除．

实际上，$4n(n-1)$中的因数4表明它可被4整除，而$n-1$和$n$是两个相邻的自然数，其中必有一个是偶数，从而这个表示式也必含有因数2，因此，数$4n(n-1)$总是8的整

数倍，这就是所要证明的.

这些例子可以帮助我们了解能够获得关于周围世界的事物与现象以及支配它们的规律的知识的主要途径. 第一种方法是对事物和现象进行多次的观察和试验，并在这个基础上形成支配它们的规律. 上面列举的例子表明，观察使得人们可能把物体的形状和它的阴影之间的关系建立起来. 多次的试验和观察证实了关于光的电磁性质的假设. 在最后的一个例子中，关于对奇数的平方进行的实验帮助我们找到了奇数的平方减 1 的性质. 这种通过对特殊情况的多次观察来形成一般结论的方法叫做归纳法（来源于拉丁字inductio，即特殊情形导致我们推想一般关系的存在）.

另一种证明方法是，当已知某些一般规律时，把这一般规律应用到具体情况中，这种证明方法叫做演绎法（来源于拉丁字deductio）. 这就是为什么在最后的例子里，我们把算术的一般法则应用于特殊问题，以证明一切奇数都具有的某种性质的存在. 这个例子说明，归纳法和演绎法是不能分离的. 归纳法和演绎法的同时使用是科学思维的特点.

容易看出，在任何一个证明的过程中，我们使用的都是这两种方法. 在理论研究中为了证明某个命题，往往需要借助于经验，借助于观察，借助于事实或已证实其成立的命题. 在这样获得的结果的基础上，得出要证明的命题正确与否的结论.

2. 我们回过头来仍旧讨论几何学. 几何学是研究物质世界的空间形式的。“空间形式”这一术语是指物体在空间的形状、大小和相对位置. 显然，人类在社会实践活动中由于实

际需要，如设计机器、盖房子、修路、开运河等等，都必须度量长度、面积和体积．这就是说，实际上几何知识最初是根据大量的观测和实验用归纳法得到的．然而，当几何知识积累多了，很多结果显然可以从其他结果用推理的方法即演绎法得出来，不必都做特殊的试验．

因此，大量的观察和充足的试验使我们确信："经过任意两点有一条且仅有一条直线．"这一事实使我们不用任何进一步的实验就可断言："两条不同直线的交点不能多于一个．"这个新结果是由很简单的推理得到的．实际上，如果我们假定两条不同直线有两个交点，那就得有两条不同直线过这两个交点．这与前面确立的结果相矛盾．

在实践活动中，人们确立了大量的反映物质世界空间形式的几何性质．仔细研究一下这些性质，就会发现其中某些结果可以作为其他一些的经过逻辑推理而得出的结论．这就导致一种想法：从全部的几何结果中，选出最简单最一般并且不用证明就能接受的一些来．使得从这些结果就能演绎出其余的几何性质和关系．古希腊的几何学家对这个想法产生很大的兴趣．他们开始从很少几条基本命题出发，通过演绎，得出已知的许多几何结果并使其系统化．大约在公元前300年，亚历山大城的欧几里得制定了当时的最完整的几何学大纲．在他的大纲中包括不给证明而承认的部分命题，即所谓的公理（希腊语$\alpha\xi\iota o\zeta$．意指"突出"、"可信的"）．其他的命题叫做定理（来源于希腊字$\theta\varepsilon o\rho\varepsilon o$．意思是判断或衡量），其正确性要经过证明来检验．

欧几里得几何学流传了很多世纪，甚至今天在学校的几

何教学中，有许多方面都还沿用欧几里得的体系．因此，在几何学中有少量几条由归纳法得到，并且不加证明而承认的基本假设，即公理，其余大量的几何结果则是用演绎推理从这些公理推演出来的．由于这个缘故，我们说几何学主要是一门演绎的科学．

现代有很多几何学家却在努力研究为建立几何体系所必需并尽可能使其数量为最少的全部公理．这一工作上个世纪就已经开始了，虽然大体上已经完成，但甚至到目前还不能认为是完善的。

总括这节的讨论，我们现在能够回答这一问题了：什么是几何学中的证明？正如我们已经看到的，证明是一种思维形式，它是通过公理及前面已证实的定理来判断被证命题的真实性的推理过程．

在此，还有一个问题有待解决：用演绎推理方法得出的命题是否正确可靠呢？

一个推演出来的结论的正确性产生于下述事实：在推导中我们是把某些一般规律应用于特殊情形，对于普遍地、永远地正确的某些结论在特殊情形下将仍然正确是十分明显的．

例如，若我们说每个三角形的内角和是180°，以及 $ABC$ 是一个三角形，则毫无疑问，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$．

如果你仔细地学习了几何学，你会容易地发现那正是我们在所有情形下推理的方法．

## §2. 为什么证明是必要的？

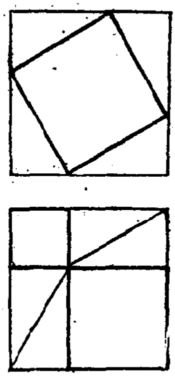
1. 现在我们设法回答这个问题：为什么证明是必要的？

关于证明，必须是根据逻辑学（逻辑学是研究正确思维的规律的一门科学）的一条基本规律，即充足理由律来寻求．这条规律包含着一个要求：由我们作出的每个论点都应当是有根据的，即应当伴随有充分足的论据，能够确保我们的论点的正确性，证实它与实际情况相符合．这样的论据可以是用来足以验证此论点的观测和实验的说明材料，或者是在正确推理下作出的鉴别方法．后一类型的论据在数学中是最常见的．

几何命题的证明，目的在于根据已知事实或已证明的结果用逻辑演绎的方法来建立它的正确性。

但是，还会有一个问题出现：在命题本身是十分明显时，我们还要费力去证明吗？

中世纪的印度数学家对很多几何命题都不给予证明，而用示意图来弥补其缺欠，并在图上写上一个“看！”字，例如，在印度数学家布哈斯卡（Bhaskar）艾奇阿耶的著作 Lilawaty 一书中出现的勾股定理是下图（图 2）的形式．读者从这两个图可以看出，以直角三角形的直角边为边的两个正方形的面积之和等于以斜边为边



（图 2）

的正方形的面积.

既然如此，我们还能说是没有证明吗？当然没有！读者没有仔细思考，仅仅看一下图形，这大概不会得出任何结论。这里实际假定读者不仅看图形，而且也在思索．读者应当明确，在你面前是两个面积相等的正方形．第一个正方形是由四个全等的直角三角形和一个以斜边为边的正方形组成，第二个正方形是由四个全等的直角三角形和分别以两直角边为边的两个正方形组成．剩下的是还要明确，若从等量（两个大正方形的面积）减去等量（四个直角三角形的面积）得出相等的面积．在第一种情况下是以斜边为边的一个正方形的面积，在第二种情况下是以直角边为边的两个正方形面积的和．

不过，仍然还有问题：不是在几何里没有那样明显毫不需要任何证明的定理吗？

这里要特别注意，一门严谨的科学是不能随意地依靠这种“明显”，因为“明显”这个概念是非常模糊和不稳定的：一个人承认为明显，另外的人就可以有非常多的怀疑．我们应当回想一下在“目击的证据”上的分歧以及在这样证据的基础上有时是非常难于得出正确性的．我们举一个有趣的几何例子，这是一个看上去是明显事实但都是骗人的情形．取一张纸条粘成环形，在环上画一条连续的闭合线，然后沿这条线剪开．这个问题是：纸条的两头已粘在一起了，这会剪成什么样子呢？大概你很可能毫不犹豫地回答：纸条剪成了分离的两部分，但是这个回答可能是错误的．让我们做下述的一个实验．拿一纸条把一头扭转半圈后把两头粘在一起作

成一个环，这样得出的就是通常说的莫比乌斯（$M\ddot{o}bius$）带（图3），（莫比乌斯是德国数学家，他研究过这类曲面）现在沿环的中线剪开，这时带子就不会剪成分离的两部分，而仍然是一个环．这类情况使我们必须放弃信赖“明显”，得重新考虑所讨论的问题．

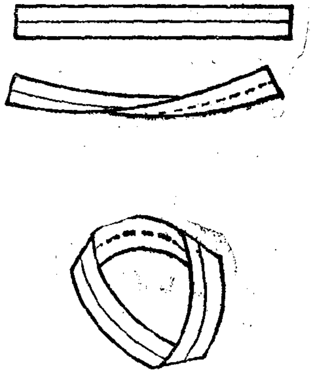


图 3

2．下面我们更细微地讨论这个问题，我们先以上述女生所说的情况为例．这个女孩是为她看到教师画两个一样的三角形，然后叫到老师证两个三角形全等这个看来很明显的事实所迷惑．这个题目实际上是转了一个十分艰难的大圈子：教师并不是画了两个全等的三角形，而是先画了一个三角形$ABC$（图4），并说第二个三角形$A'B'C'$是按照使$A'B'=AB$，$B'C'=BC$及$\angle B'=\angle B$画成的；而且并不知道是不是$\angle A$和$\angle A'$，$\angle C$和$\angle C'$以及边$A'C'$和$AC$都相等（因为她没有设置$\angle A'$和$\angle C'$分别等于$\angle A$和$\angle C$，也没有设置边$A'C'$等于边$AC$）．

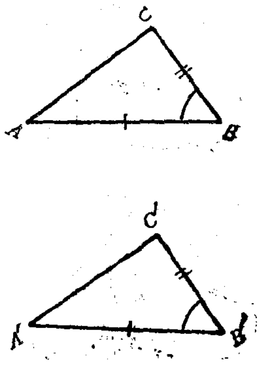


图 4

因此，推导两个三角形全等，即从$A'B'=AB$，$B'C'=BC$和$\angle B'=\angle B$三个条件推导它们全部元素都相等就是我们的责任了，而且这还需要某种根据，也就是需要证明．

容易证明，如果两个三角形的三对对应元表分别相等，它们并不一定全等．我们把前面定理的条件改一下：让一个三角形的两条边等于另一个三角形相应的两条边．使一对对应角也相等．但这角并不是给定的两边的夹角，而是其中一条边的对角，比如说，是$B'C'$及$BC$边的对角．我们就$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$写出这样的条件：$A'B'=AB$，$B'C'=BC$以及$\angle A'=\angle A$．对这两个三角形能说点什么呢？类似两个三角形全等的前一个例子，我们也能期望这两个三角形全等．但是，图5使我们确信在这里画的两个三角形$ABC$和$A'B'C'$决不是全等的，虽然它们满足条件$A'B'=AB$，$B'C'=BC$且$\angle A'=\angle A$.

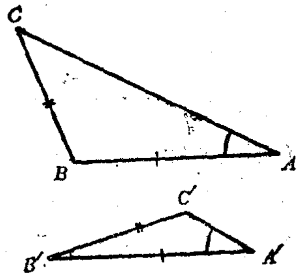


图 5

这类的例子促使我们在考虑问题时应非常小心，并充分清楚地表明：只有正确的证明才能保证所论命题的正确性。

3．现在讨论第二个定理，即迷惑着托利亚的三角形外角定理．实际上，在这正式的课本里的图形，是外角为钝角而且和它不相邻的两内角都是锐角的三角形，那是不用任何测量就能容易判定的。然而，从这一点就能得出，定理不需要证明吗？当然不是．说实在的，定理不仅适用于书里画的三角形，或者纸上、黑板上画的等等，而还要对任何的三角形都适用，

比如我们设想，点$A$沿一直线$CA$移动远离$C$点，则将得出一个形如图6所表示的三角形$ABC$，其中在$B$点的内角也

是钝角、如让$A$点移动离开$C$点十米左右，则用学校里用的量角器将不能量出内角

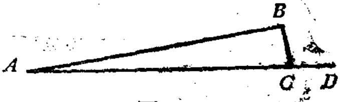


图 6

和外角之间的差别．再让点$A$移动远离$C$点一段距离，比如说，等于地球到太阳的距离，我们可以完全肯定地说，不存在任何度量角的仪器能检验出这两个角之间的差别．于是可以得出结论，就这个定理来说，我们决不能说它是“明显”的．但是，这条定理的严格证明是不依赖于图形中展示的三角形的特殊形状的，因而也就不依赖于它的边的相对长度，这表明关于三角形外角定理的证明是无例外地对一切三角形都是有效的。所以，即使在内角与外角之间的差别小到使用仪器难以检测的情形下，我们仍然确信它存在．这是因为我们已经证明，就一切情况而言，三角形的外角总是大于和它不相邻的任一内角．

就此而论，在几何定理的证明中，观察图形对寻求证法有一定的作用．应当记住，在定理的证明中，图形仅仅是一个辅助手段，仅是一个具体例子，仅是能证明这一定理的全部几何图形中的一个特殊情形．由于这个缘故，能从特别的偶然的实例中识别出在图形中展示的图形的一般的和永恒的性质，那是非常重要的．

例如在正式课本中伴随于三角形外角定理的图形，展现着一个钝外角和锐内角不过是巧合．显然在这样偶然情况上建立那种为一切三角形所共有的性质的证明是不能容许的。

在很大程度上决定几何证明的必要性的主要特征，是使它能用来建立空间图形的一般性质．如果推理过程是正确的