数字信号处理

SHUZI XINHAO CHULI XITIXIANGJIE

习题详解

DFT

■张小虹 编著

FFT

DSP

东 南 大 学 出 版 社

DFT

FFT

SHUZI XINHAO CHULI XITIXIANGJIE

DSP

策划编辑/张 煦

责任编辑/张爱华

封面设计/瀚清堂

紧密配合"数字信号处理"课程教学大纲

具有较强针对性，共收录200多道典型习题

解法精当详细，部分习题配有MATLAB程序

适合于电子、通信、信息类专业本科学生

特别推荐此书作为考研、考博的首选专业课参考书

ISBN 7-81089-018-2

9 787810 890182 >

ISBN 7-81089-018-2
TN · 1 定价：26.80元

数字信号处理习题详解

张小虹　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 简 介

本习题详解紧密配合《数字信号处理》课程的教学大纲，对学生学好“数字信号处理”课程，加深理解和消化课程内容有很强的针对性。本书涉及离散时间信号与系统，z 变换与序列的傅里叶变换，离散傅里叶变换，快速傅里叶变换，数字滤波器的流图、结构与状态变量分析，无限脉冲响应(IIR)滤波器的设计方法，有限脉冲响应(FIR)滤波器的设计方法，量化效应与有限字长效应等内容，共有 8 章，200 多道题的详解。

本书既可作为高等学校电子、通信、信息类专业的高年级本科学生入门及考研、考博的参考书，也可作为研究生和教师以及科研和工程部门广大科技人员从事数字信号处理工作的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理习题详解/张小虹编著. —南京：东南大学出版社，2002.7
ISBN 7-81089-018-2

Ⅰ. 数... Ⅱ. 张... Ⅲ. 数字信号-信号处理-高等学校-解题 Ⅳ. TN911.72-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 046952 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销 江苏省地质测绘院印刷厂印刷
开本：787mm×1092mm 1/16 印张：19.5 字数：487 千字
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册 定价：26.80 元

前　言

本习题详解是学习《数字信号处理》的重要辅导读物。书中八章内容是“数字信号处理”课程最基础、最必要的部分。多年的教学实践证明，认真参考本书有助于帮助学生理解、领会教学内容，增强分析问题和解决问题的能力。“数字信号处理”课程，由于概念抽象，课时数较少，学生在学习这部分内容时甚感困难。因此在做习题时不知如何着手，同时由于一些题的数值计算又相当繁琐，使学生的实践受到一定限制，影响了学习积极性和正确概念的建立。

本习题详解针对学生当前学习的实际情况，不仅在解题过程中给出了详细的步骤，部分习题还给出了两种解法，以增强教学效果。本习题详解的另一特点是：一些章节的部分习题增加了利用 MATLAB 程序验证解题结果，或直接用 MATLAB 解题的内容。尤其是在第 6、7 章增加了 MATLAB 设计数字滤波器的程序及运行结果的实例，体现了教改和素质教育的思想。这不仅可以帮助学生直观、形象地理解基本概念，而且对于从事工程设计的技术人员也不失为一本好的设计参考书。书中的附录给出了第 6、7 章设计数字滤波器的部分 MATLAB 子程序，便于学生掌握 MATLAB 程序设计入门。

在编写习题详解的过程中，作者得到了陆士元、孙镇、许胜华、岳振军等老师及张为民同志的帮助。解放军理工大学 1999 级与 2000 级通信专业的研究生也为此书做了一定的工作。东南大学吴镇扬教授认真审阅了全部书稿，并提出了宝贵的修改意见，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在一些错误，恳请广大读者不吝赐教。

作　者

2001 年 9 月完稿于南京

目 录

第 1 章　离散时间信号与系统 ……………………………… (1)
第 2 章　z 变换与序列的傅里叶变换 ………………………… (13)
第 3 章　离散傅里叶变换 ………………………………………… (57)
第 4 章　快速傅里叶变换 ………………………………………… (91)
第 5 章　数字滤波器的流图、结构与状态变量分析 ………… (103)
第 6 章　无限脉冲响应(IIR)滤波器的设计方法 ……………… (132)
第 7 章　有限脉冲响应(FIR)滤波器的设计方法 ……………… (197)
第 8 章　量化效应与有限字长效应 ……………………………… (259)
附　录 …………………………………………………………… (295)
参考书目 ………………………………………………………… (306)

第 1 章

离散时间信号与系统

1. 一个采样周期为 T 的采样器，开关间隙为 τ，若采样器输入信号为 $x_a(t)$，求采样器输出信号 $x_s(t)=x_a(t)p(t)$ 的频谱结构，并证明若原来的 $x_s(t)$ 满足奈奎斯特准则，则 τ 值在 $0<\tau<T/2$ 之间变化，频谱周期重复及奈奎斯特定理都成立。

其中 $p(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}r(t-nT)\quad r(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t\leqslant\tau\\0 & 其他\end{cases}$

解 采样器可等效为如图 P1.1(1)所示乘法器，其中 $p(t)$ 如图 P1.1(2)所示。

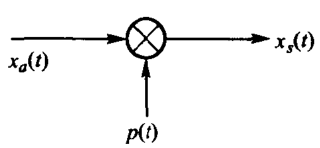

图 P1.1(1)

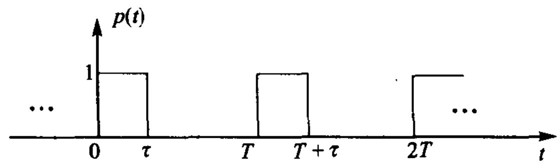

图 P1.1(2)

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n e^{jn\Omega_s t}$$

$$\dot{P}_n=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}e^{-jn\Omega_s t}dt=\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{-jn\Omega_s}(e^{-jn\Omega_s\tau}-1)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\Omega_s\tau}{2}e^{-j\frac{n\Omega_s\tau}{2}}=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{n\Omega_s\tau}{2}\right)e^{-j\frac{n\Omega_s\tau}{2}}$$

注：$Sa(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，以后相同，不再注明。

$$P(j\Omega)=\mathscr{F}[p(t)]=\mathscr{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{P}_n e^{jn\Omega_s t}\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{P}_n\mathscr{F}[e^{jn\Omega_s t}]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{P}_n\delta(\omega-n\Omega_s)$$

$$X_s(j\Omega)=\mathscr{F}[x_a(t)p(t)]=\frac{1}{2\pi}X(j\Omega)*P(j\Omega)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\Omega_s\tau}{2}\right)e^{-j\frac{n\Omega_s\tau}{2}}X_a(j\Omega-jn\Omega_s)$$

$$=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\Omega_s\tau}{2}\right)e^{-j\frac{n\Omega_s\tau}{2}}X_a(j\Omega-jn\Omega_s)$$

$X_s(j\Omega)$ 是 $X_a(j\Omega)$ 的周期重复，周期 $T=1/f_s=2\pi/\Omega_s$，与脉冲宽度 τ 无关。$X_s(j\Omega)$ 的频谱按 Ω_s 的频率重复，其幅度是不均匀的（与理想取样的频谱不同）。$|X_a(j\Omega)|$、

$|X_s(j\Omega)|$ 示意图如图 P1.1(3)所示。

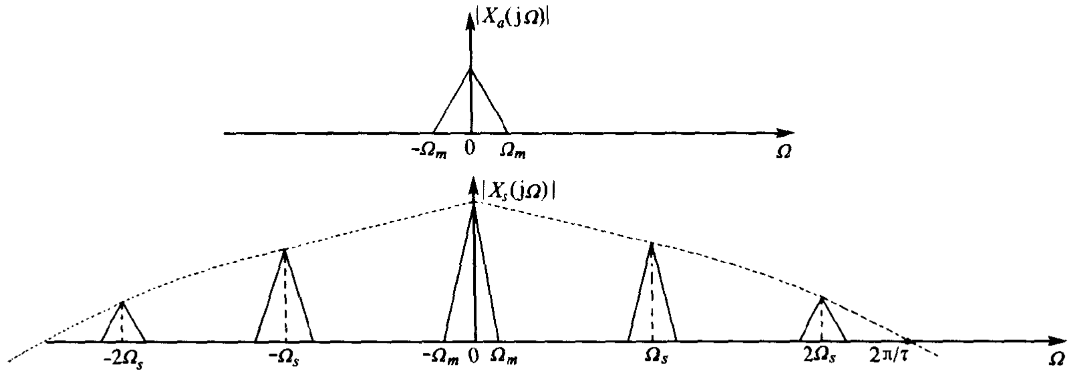

图 P1.1(3)

2. 今对三个正弦信号 $x_{a1}(t)=\cos 2\pi t, x_{a2}(t)=-\cos 6\pi t, x_{a3}(t)=\cos 10\pi t$ 进行理想采样,采样频率为 $\Omega_s=8\pi$,求三个采样输出序列,比较这个结果。画出波形及采样点位置,并解释频谱混叠现象。

解 因为 $\Omega_s=8\pi, \Omega_1=2\pi, \Omega_2=6\pi, \Omega_3=10\pi$

$\Omega_s>2\Omega_1, \Omega_s<2\Omega_2, \Omega_s<2\Omega_3$,所以只有对 $x_{a1}(t)$ 的取样没有频谱混叠。

或 $T_s=1/4, T_1=1, T_2=1/3, T_3=1/5$

$T_1/T_s=4, T_2/T_s=4/3, T_3/T_s=4/5$

$$x_{s1}(t)=x_{a1}(t)\delta_T(t)=\cos 2\pi t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n/4)$$

$$=\cos 2\pi\frac{n}{4}=\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$=[\cdots,\underset{\uparrow}{1},0,-1,0,1,0,-1,0,\cdots]$$

$x_{s1}(t)$ 如图 P1.2(1)所示。

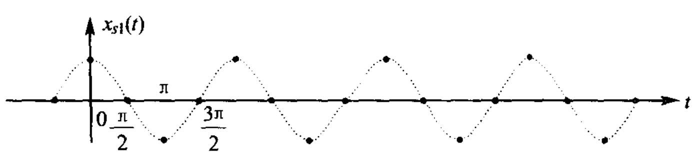

图 P1.2(1)

其中 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$,以后相同,不再注明。

$$x_{s2}(t)=x_{a2}(t)\delta_T(t)=-\cos 6\pi t\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n/4)$$

$$=-\cos 6\pi\frac{n}{4}=-\cos\frac{3n\pi}{2}$$

$$=[\cdots,-\underset{\uparrow}{1},0,-1,0,\cdots]$$

$x_{s2}(t)$ 如图 P1.2(2)所示。

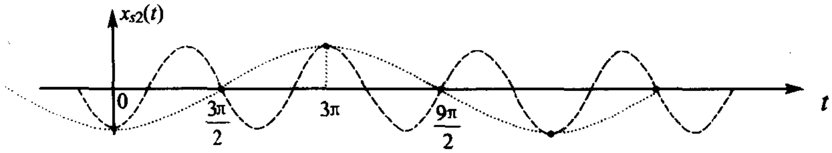

图 P1.2(2)

$$x_{s3}(t) = x_{a3}(t)\delta_T(t) = \cos 10\pi t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n/4)$$

$$= \cos 10\pi \frac{n}{4} = \cos \frac{5n\pi}{2}$$

$$= [\cdots, \underset{\uparrow}{1}, 0, -1, 0, 1, 0, \cdots]$$

$x_{s3}(t)$ 如图 P1.2(3)所示。

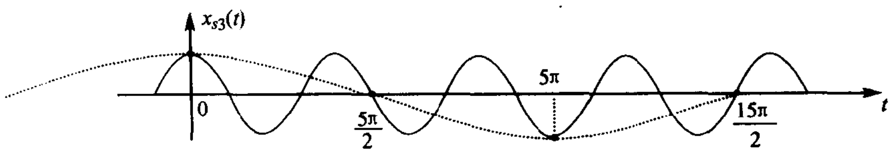

图 P1.2(3)

3. 一个理想采样系统，采样频率为 $\Omega_s = 8\pi$，采样后经理想低通 $G(j\Omega)$ 还原。今有两输入信号分别为 $x_{a1}(t) = \cos 2\pi t$，$x_{a2}(t) = \cos 5\pi t$，问输出信号 $y_{a1}(t)$，$y_{a2}(t)$ 有没有失真？是什么失真？

$$G(j\Omega) = \begin{cases} 1/4 & |\Omega| < 4\pi \\ 0 & |\Omega| \geqslant 4\pi \end{cases}$$

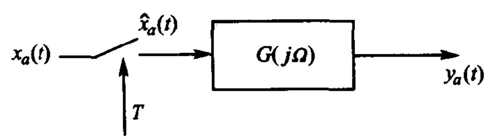

图 P1.3

解 $\Omega_s = 8\pi$，$x_{a1}(t) = \cos 2\pi t$，$\Omega_1 = 2\pi$；$x_{a2}(t) = \cos 5\pi t$，$\Omega_2 = 5\pi$，$\Omega_s > 2\Omega_1$，$\Omega_s < 2\Omega_2$，所以只有对 $x_{a1}(t)$ 的取样没有频谱混叠。$y_{a1}(t) = \frac{1}{4}\cos 2\pi t$ 无失真。

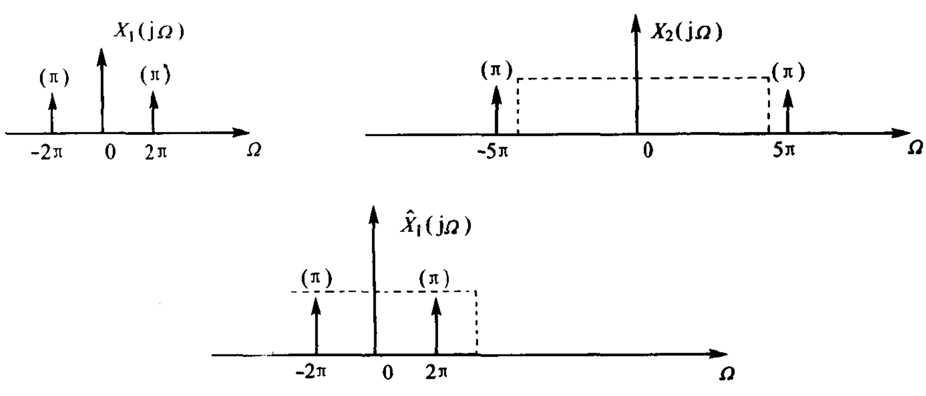

图 P1.3(1)

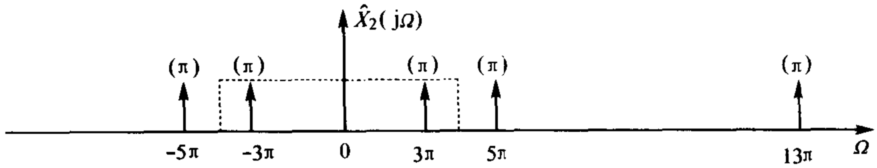

图 P1.3(2)

$y_{a2}(t)=\dfrac{1}{4}\cos 3\pi t$ 有失真，是混叠失真。

4. 判断下面的序列是否周期序列，若是，确定其周期。

(1) $x(n)=\cos\left(\dfrac{2}{7}\pi n-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $x(n)=\cos\left(\dfrac{3}{7}\pi n-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{8}n-\pi\right)}$

解 (1) $\omega_0=\dfrac{2}{7}\pi,\dfrac{2\pi}{\omega_0}=7$，是周期序列，周期为 $N=7$

解 (2) $\omega_0=\dfrac{3}{7}\pi,\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{14}{3}$，是周期序列，周期为 $N=14$

解 (3) $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{8}n-\pi\right)}=\cos\left(\dfrac{1}{8}n-\pi\right)+\mathrm{j}\sin\left(\dfrac{1}{8}n-\pi\right)$

$\omega_0=\dfrac{1}{8},\dfrac{2\pi}{\omega_0}=16\pi$ —— 无理数，不是周期序列。

5. 连续信号 $x_a(t)=\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$，式中 $f_0=20\mathrm{Hz},\varphi=\pi/2$

(1) 求出 $x_a(t)$ 的周期。

(2) 用采样间隔 $T=0.02\mathrm{s}$ 对 $x_a(t)$ 进行采样，写出采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的表示式。

(3) 画出 $\hat{x}_a(t)$ 对应的序列 $x_a(n)$，并求出 $x_a(n)$ 的周期。

解 (1) $x_a(t)=\cos(2\pi f_0 t+\varphi)=-\sin(2\pi f_0 t)$

$T_0=1/f_0=0.05\mathrm{s}$

解 (2) $\hat{x}_a(t)\Big|_{t=nT}=-\sin(2\pi f_0 t)\Big|_{t=nT}=-\sin(2\pi\times 20\times 0.02n)$

$=-\sin(0.8\pi n)$

解 (3) $\omega_0=0.8\pi,\dfrac{2\pi}{\omega_0}=\dfrac{5}{2}$，周期为 $N=5$。$x_a(n)$ 如图 P1.5 所示。

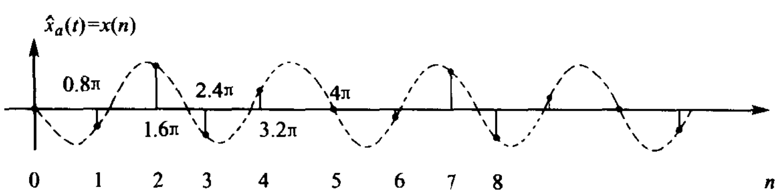

图 P1.5

6. 以下序列是系统的单位脉冲响应 $h(n)$，试指出系统的因果稳定性。

(1) $\delta(n)$　(2) $\delta(n-n_0)$　(3) $u(n)$　(4) $u(3-n)$

(5) $2^n u(n)$　(6) $2^n u(-n)$　(7) $2^n R_N(n)$　(8) $0.5^n u(n)$

(9) $0.5^n u(-n)$　(10) $\frac{1}{n}u(n)$　(11) $\frac{1}{n^2}u(n)$　(12) $\frac{1}{n!}u(n)$

解　(1) $\delta(n)$因果稳定。

解　(2) $\delta(n-n_0)$，$n_0 \geqslant 0$，为因果稳定；$n_0 < 0$，为非因果稳定。

解　(3) $u(n)$，因为$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| \to \infty$；且$n<0, u(n)=0$，所以为因果非稳定。

解　(4) $u(3-n)$，因为$\sum\limits_{n=-\infty}^{3} |u(3-n)| \to \infty$；且$n<0$，$u(3-n)\neq 0$，所以为非因果非稳定。

解　(5) $2^n u(n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |2^n| \to \infty$；且$n<0, u(n)=0$，所以为因果非稳定。

解　(6) $2^n u(-n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |2^{-n}| = 1+1/2+\cdots=2$，且$n<0, u(-n)\neq 0$，所以为非因果稳定。

解　(7) $2^n R_N(n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{N-1} |2^n| = 1+2+4+\cdots+2^{N-1}=2^N-1<\infty$；且$n<0, R_N(n)=0$，所以为因果稳定。

解　(8) $0.5^n u(n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |2^{-n}| = 1+1/2+\cdots=2$；且$n<0, u(n)=0$，所以为因果稳定。

解　(9) $0.5^n u(-n)$，因为$\sum\limits_{n=-\infty}^{0} (1/2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \to \infty$；且$n<0, u(-n)\neq 0$，所以为非因果非稳定。

解　(10) $\frac{1}{n}u(n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right| = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\to\infty$；且$n<0, u(n)=0$，所以为因果非稳定。

解　(11) $\frac{1}{n^2}u(n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right| = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots<1$；且$n<0, u(n)=0$，所以为因果稳定。

解　(12) $\frac{1}{n!}u(n)$，因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n!}\right| = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\cdots<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$ $=2+1=3$；且$n<0, u(n)=0$，所以为因果稳定。

7. 对于下列每一个系统试指出它是否为：(a)稳定；(b)因果；(c)线性；(d)非移变系统。

(1) $T[x(n)] = g(n)x(n)$　(2) $T[x(n)] = \sum\limits_{k=n_0}^{n} x(k)$

(3) $T[x(n)] = \sum\limits_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$　(4) $T[x(n)] = x(n-n_0)$

(5) $T[x(n)] = e^{x(n)}$　(6) $T[x(n)] = ax(n)+b$

(7) $T[x(n)] = x^2(n)$　(8) $T[x(n)] = x(n^2)$

解　(1) $T[x(n)] = g(n)x(n)$　稳定(当$g(n)$有界时)；因果；线性；移变系统。

解　(2) $T[x(n)] = \sum\limits_{k=n_0}^{n} x(k)$　非稳定($n\to\infty$)；非因果($n_0<0$)；线性；非移变系统。

解　(3) $T[x(n)] = \sum\limits_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)$　稳定；非因果($n_0<0$)；线性；非移变系统。

解 (4) $T[x(n)] = x(n-n_0)$ 稳定；非因果（$n_0 < 0$）；线性；非移变系统。

解 (5) $T[x(n)] = e^{x(n)}$ 稳定；因果；非线性；非移变系统。

解 (6) $T[x(n)] = ax(n)+b$ 稳定；因果；非线性；非移变系统。

解 (7) $T[x(n)] = x^2(n)$ 稳定；因果；非线性；非移变系统。

解 (8) $T[x(n)] = x(n^2)$ 稳定；因果；线性；移变系统。

8. 已知 $x(n)$、$h(n)$ 如下，用卷积法求 $y(n)$。

$$(1)\ x(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases};\quad h(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases}$$

$$(2)\ x(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases};\quad h(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases}$$

$$(3)\ x(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases};\quad h(n) = \begin{cases} -1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases}$$

解 (1) $y(0) = 1\times 2 = 2$；$y(1) = 1\times 1 = 1$；其余为零。

$$y(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$y(n)$ 如图 P1.8(1) 所示。

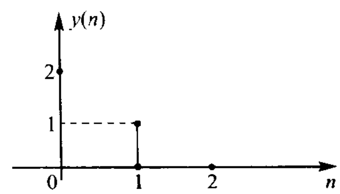

图 P1.8(1)

解 (2) $x(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases};\quad h(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases}$

$y(1) = 1\times 2 = 2$；$y(2) = 1\times 1 = 1$；其余为零。

$$y(n) = \begin{cases} 2 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n\neq 2\text{ 和 }1 \end{cases}$$

$y(n)$ 如图 P1.8(2) 所示。

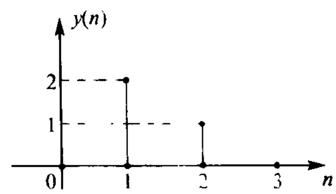

图 P1.8(2)

解 (3) $x(n) = \begin{cases} 2 & n=0 \\ -1 & n=1 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases};\ h(n) = \begin{cases} -1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & n\text{ 为其他} \end{cases}$

$y(0) = -1\times 2 = -2$；$y(1) = 2\times 2 + (-1)\times(-1) = 5$；

$y(2) = 1\times 2 + 2\times(-1) = 0$；$y(3) = (-1)\times 1 = -1$；

其余为零。

$$y(n)=\begin{cases}-2 & n=0\\ 5 & n=1\\ 0 & n=2\\ -1 & n=3\end{cases}$$

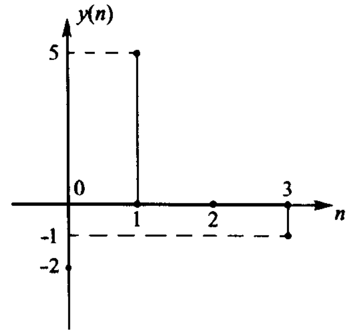

图 P1.8(3)

$y(n)$如图 P1.8(3)所示。

9. 已知 $x(n)$、$h(n)$,用卷积法求 $y(n)$。

其中 $h(n)=\begin{cases}\alpha^n & 0\leqslant 0<N\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0} & n_0\leqslant n\\ 0 & n<n_0\end{cases}$$

解 (1) $n<n_0, y(n)=0$

解 (2) $n_0\leqslant n\leqslant n_0+N-1$

$$y(n)=\sum_{k=n_0}^{n}x(k)h(n-k)=\sum_{k=n_0}^{n}\alpha^{n-k}\beta^{k-n_0}=\alpha^n\beta^{-n_0}\sum_{k=n_0}^{n}(\alpha^{-1}\beta)^k$$

$$=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{(\beta/\alpha)^{n_0}-(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-(\beta/\alpha)}=\frac{\alpha^{n-n_0+1}-\beta^{n-n_0+1}}{\alpha-\beta}$$

若 $\alpha=\beta, y(n)=(n-n_0+1)\alpha^{n-n_0}$

解 (3) $n\geqslant n_0+N-1$

$$y(n)=\sum_{k=n-N+1}^{n}x(k)h(n-k)=\sum_{k=n-N+1}^{n}\alpha^{n-k}\beta^{k-n_0}=\alpha^n\beta^{-n_0}\sum_{k=n-N+1}^{n}(\alpha^{-1}\beta)^k$$

$$=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{(\beta/\alpha)^{n-N+1}-(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-\beta/\alpha}=\beta^{n-n_0-N+1}\frac{\alpha^N-\beta^N}{\alpha-\beta}$$

若 $\alpha=\beta, y(n)=N\alpha^{n-n_0}$

10. 一个线性非移变系统的单位取样响应除区间 $N_0\leqslant n\leqslant N_1$ 之外皆为零;又已知输入 $x(n)$ 除区间 $N_2\leqslant n\leqslant N_3$ 之外皆为零。结果输出除了某一区间 $N_4\leqslant n\leqslant N_5$ 之外皆为零。试以 N_0、N_1、N_2、N_3 表示 N_4、N_5 。

解 $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$

因为 $x(m)$ 的非零值区为 $N_0\leqslant m\leqslant N_1$;

$h(n-m)$的非零值区为 $N_2\leqslant n-m\leqslant N_3$;

两式相加:$N_0+N_2\leqslant n\leqslant N_1+N_3$ 。

所以 $N_4=N_0+N_2$; $N_5=N_1+N_3$

11. 已知一个线性非移变系统的单位取样响应 $h(n)$,用卷积法求阶跃响应。

其中 $h(n)=a^{-n}u(-n)\qquad 0<a<1$

解 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a^{-m}u(-m)u(n-m)$

(1) $n \leqslant 0$ $\quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} a^{-m} = \sum_{m=-n}^{\infty} a^{m} = \sum_{m=0}^{\infty} a^{m} + \sum_{m=-1}^{-n} a^{m}$

$$= \frac{1}{1-a} - \frac{1-a^{-n}}{1-a} = \frac{a^{-n}}{1-a}$$

或：$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{m-n} = a^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} a^{m} = \frac{a^{-n}}{1-a}$

(2) $n > 0$ $\quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{0} a^{-m} = \sum_{m=0}^{\infty} a^{m} = \frac{1}{1-a}$

或：$y(n) = \sum_{m=n}^{\infty} a^{m-n} = a^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} a^{m} = a^{-n} \frac{a^{n}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$

12. 已知下列线性时不变系统单位脉冲响应 $h(n)$ 及输入 $x(n)$，求输出序列 $y(n)$，并将 $y(n)$ 作图示之。

(1) $h(n) = R_4(n) = x(n)$ $\quad$ (2) $h(n) = 2^n R_4(n)$，$x(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$

(3) $h(n) = \frac{1}{2} u(n)$，$x(n) = R_5(n)$

解 (1) $h(n) = R_4(n) = x(n)$，$y(n) = x(n) * h(n)$

1	1	1	1			
1	1	1	1			
1	1	1	1			
	1	1	1	1		
		1	1	1	1	
			1	1	1	1
1	2	3	4	3	2	1

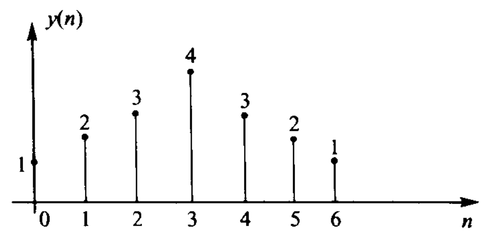

图 P1.12(1)

$$y(n) = \begin{cases} 1 & n = 0,6 \\ 2 & n = 1,5 \\ 3 & n = 2,4 \\ 4 & n = 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$y(n)$ 如图 P1.12(1) 所示。

解 (2) $h(n) = 2^n R_4(n)$，

$x(n) = \delta(n) - \delta(n-2)$，

1	2	4	8		
1	0	−1			
1	2	4	8		
		−1	−2	−4	−8
1	2	3	6	−4	−8

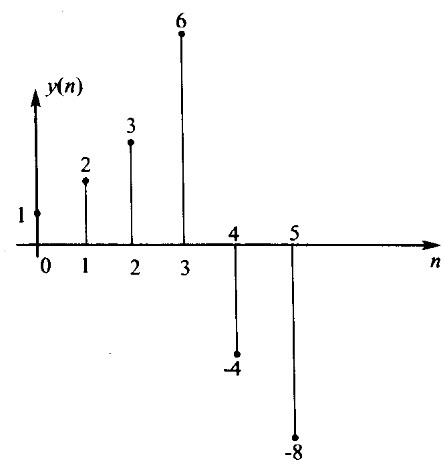

图 P1.12(2)

$$y(n)=[\underset{\uparrow}{1}\quad 2\quad 3\quad 6\quad -4\quad -8]$$

$y(n)$如图 P1.12(2)所示

解 (3) 方法 1 $h(n)=\frac{1}{2}u(n), x(n)=R_5(n), y(n)=x(n)*h(n)^{-4}$。

$0\leqslant n\leqslant 4$：

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}2^{m}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(2^{n+1}-1)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$n>4$：

$$y(n)=\sum_{m=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{m=0}^{4}2^{m}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(1+2+4+8+16)$$

$$=31\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$y(n)=\begin{cases}2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 31\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} & n>4\\ 0 & n<0\end{cases}$$

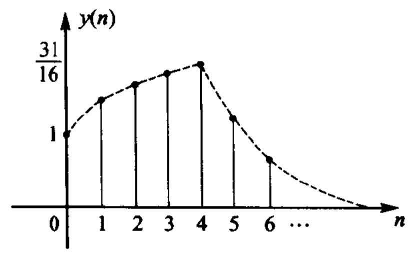

图 P1.12(3)

方法 2

$$y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)*[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u(n-2)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}u(n-3)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}u(n-4)$$

$$=\delta(n)+\frac{3}{2}\delta(n-1)+\frac{7}{4}\delta(n-2)+\frac{15}{8}\delta(n-3)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}(1+2+4+8+16)\cdot u(n-4)$$

$$=\delta(n)+\frac{3}{2}\delta(n-1)+\frac{7}{4}\delta(n-2)+\frac{15}{8}\delta(n-3)+31\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n-4)$$

$y(n)$如图 P1.12(3)所示。

13. 列出图 P1.13 所示系统的差分方程，初始条件为 $y(0)=1$、$y(n)=0$，$n<0$。求以下输入序列的输出 $y(n)$，并图示之。

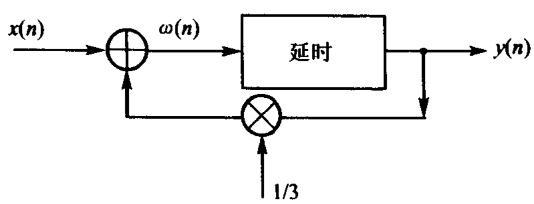

图 P1.13

(1) $x(n)=\delta(n)$ (2) $x(n)=u(n)$

(3) $x(n) = R_5(n) = u(n) - u(n-5)$

解 $\omega(n) = x(n) + \frac{1}{3}y(n), y(n) = \omega(n-1)$,

所以 $y(n) = x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1)$

(1) $x(n) = \delta(n), y(0) = 1$。

解 $y(1) = x(0) + \frac{1}{3}y(0) = \frac{4}{3}$

$y(2) = x(1) + \frac{1}{3}y(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}$

$y(3) = \frac{1}{3}y(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{4}{3}; \cdots$

$y(n) = \delta(n) + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1)$

(2) $x(n) = u(n), y(0) = 1$。

解法 1：通解 $y_h(n) = A\left(\frac{1}{3}\right)^n$;

特解 $y_p(n) = B$，代入方程 $B - \frac{1}{3}B = 1$，解出 $B = \frac{3}{2}$

所以 $y(n) = \frac{3}{2} + A\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$y(0) = \frac{3}{2} + A = 1$，解出 $A = -\frac{1}{2}$

$y(n) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad n \geqslant 0$。

解法 2：由原方程可知，零状态响应时 $h(-1) = 0$。

$y_{zi}(n) = C\left(\frac{1}{3}\right)^n; y_{zi}(0) = C = 1, y_{zi}(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$。

$h(0) = x(-1) + \frac{1}{3}h(-1) = 0$

$h(1) = x(0) + \frac{1}{3}h(0) = 1$

$h(2) = \frac{1}{3}h(1) = \frac{1}{3}$

$h(3) = \frac{1}{3}h(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2; \cdots$

$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$

$$y_{zs}(n) = h(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} u(m-1)u(n-m)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)=\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u(n)$$

(3) $x(n)=R_5(n)=u(n)-u(n-5),y(0)=1$。

$$y_{zi}(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

$$y_{zs}(n)=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u(n)+\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}\right]u(n-5)$$

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)=\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right]u(n)+\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-5}\right]u(n-5)$$

14. 列出图 P1.14 所示系统的差分方程，并在初始条件 $y(n)=0,n<0$ 下，求输入序列 $x(n)=u(n)$ 的输出 $y(n)$，并图示之。

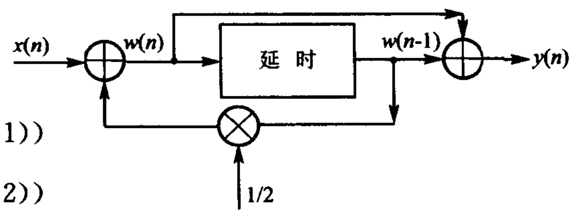

图 P1.14

解

$$\begin{cases}x(n)+\frac{1}{2}w(n-1)=w(n) & (\text{P1.14(1)})\\ w(n)+w(n-1)=y(n) & (\text{P1.14(2)})\end{cases}$$

$$\Rightarrow w(n-1)=\frac{1}{3}y(n-1)+\frac{2}{3}x(n-1)$$

代入(P1.14(2))或(P1.14(1))得：

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+0.5y(n-1)$$

通解　$y_h(n)=A(0.5)^n$；

特解　$y_p(n)=B$，代入方程

$$B-\frac{1}{2}B=2,$$

解出 $B=4$，则 $y(n)=4+A(0.5)^n$，

求初始条件 $y(0)=x(0)+x(-1)+0.5y(-1)=1$

代入 $y(0)=4+A(0.5)^0=1$，解出 $A=-3$

$$y(n)=\begin{cases}4-3(0.5)^n & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

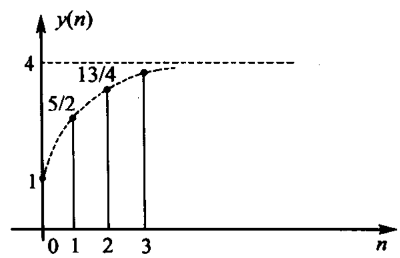

图 P1.14(1)

结果如图 P1.14(1)所示。

15. 列出图 P1.15 所示系统的差分方程，并在初始条件 $y(n)=0,\ n\geqslant 0$ 下，求输入序列 $x(n)=\delta(n)$ 时的输出 $y(n)$，并图示之。(提示：输出 $y(n)$是左边序列)

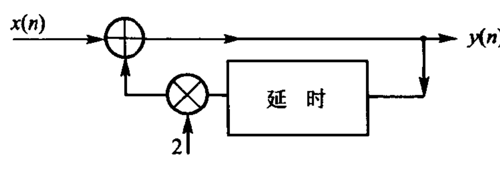

图 P1.15

解　$y(n)=x(n)+2y(n-1)$。

$$y(n-1)=0.5[y(n)-x(n)]$$

$$n=0,\ y(-1)=0.5[y(0)-x(0)]$$
$$=-0.5;$$

$$n=-1,y(-2)=0.5[y(-1)-x(-1)]$$
$$=-(0.5)^2;$$