JINGRUN CHEN SELECTED PAPERS

陈景润文集

责任编辑：黄明雨
美术编辑：徐　洪
装帧设计：石　川
责任印制：马正毅
　　　　　赵　崎

陈景润文集

CHEN JINGRUN WENJI

江西教育出版社出版发行
（330003　南昌市老贡院8号）
江西科佳图书印刷装订有限责任公司印刷
1998年3月第1版　1998年3月第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/16　印张：29　插页：8　字数：500千
印数：0,001－1,750册
ISBN 7-5392-2815-6/Z·29　定价：88.00元

出 版 说 明

《陈景润文集》是 1996 年 8 月开始编辑的. 它收入了陈景润院士一生各个时期的主要论文，共 25 篇，按发表时间顺序排列. 其中第 20 篇是与潘承洞教授合作的，第 22 、23 、24 篇是与王天泽教授合作的，第 25 篇是与刘健民教授合作的. 《文集》的全部论文这次都经过了仔细的校勘，订正了原文的印刷错误和一些标点符号；个别处的错误因其不影响内容，故未予纠正.

《文集》是由中国科学院数学研究所的王元教授与山东大学的潘承洞教授两位院士主持编辑的. 不幸的是潘承洞院士已于 1997 年 12 月 27 日逝世，未能见到《文集》的正式出版. 在此我们谨表示对他的深切怀念.

江西教育出版社

1998 年 2 月

Publisher's Remarks

The project of compiling the Selected Papers of Professor Jingrun Chen started in August 1996. Main works, 25 in number, of Professor Jingrun Chen, member of the Chinese Academy of Sciences, are arranged in publication time order. Paper No. 20 has Professor Pan Chengdong as its coauthor, and papers No. 22, 23, 24 have Professor Wang Tianze as their coauthor, and paper No. 25 has Professor Liu Jianmin as its coauthor. All papers in this book were carefully checked against the original texts while some non-crucial misprints were neglected.

Professor Wang Yuan of the Institute of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences and Professor Pan Chengdong of Shandong University, two members of the Chinese Academy of Sciences, took charge of the project. We mourn with deep grief for the death of Pan Chengdong in December 27, 1997, unable to view the publication of the book.

Jiangxi Education Press
February 1998

序

早在 1956 年，我们就认识了景润．王元于 1952 年在浙江大学毕业后即到中国科学院数学研究所跟随华罗庚教授学习数论．承洞是 1956 年于北京大学毕业的，在校期间，他参加了闵嗣鹤教授领导的数论专门化，以后又留校做研究生，继续研究数论． 1953 年景润毕业于厦门大学．由于他对塔内问题的贡献受到华罗庚教授的赏识，他被邀请参加 1956 年 8 月在北京召开的“全国数学论文报告会”．我们就是在这时相识的．

我们三人几乎是同时进入对解析数论的研究． 40 年来，我们经常在一起讨论与切磋，对彼此的工作大力支持．我们曾先后对筛法与哥德巴赫猜想作出过改进，为中国的数论研究作出了奉献．

景润的身体自幼就衰弱多病．他长期以来，极端地刻苦努力，生活过于简朴，以致积劳成疾，晚年又患有帕金森氏综合症，住医院达十年之久．在住医院期间，景润仍顽强地进行研究工作，指导研究生，直到生命的终结．

应江西教育出版社之邀，我们共同编辑了这本《陈景润文集》．《文集》收集了景润在各个时期的主要论文，其中还附有我们撰写的景润的“生平与工作简介”．

《文集》的出版得到中国科学院数学研究所的支持；得到景润的家属，特别是由昆女士的支持；得到江西教育出版社的支持．《文集》的编辑过程中，从论文搜集，选择，翻译与校对等繁重任务，潘承彪、陆柱家、张明尧、王天泽、贾朝华诸教授参与了工作．在出版过程中，又得到周榕芳先生、黄明雨先生、史永超先生与王婷女士、邵欣女士的帮助，在此一并致以深深的感谢．

王　元　潘承洞

1996 年 12 月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

Preface

We got to know Jingrun in 1956. Wang Yuan graduated from Zhejiang University in 1952 and went to the Institute of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences at once, and learned number theory from Professor L.K. Hua. Chengdong graduated from Peking University in 1956. As a student, he attended the seminar of number theory led by Professor Min Sihe. After graduation he became a postgraduate and continued to research on number theory. Jingrun graduated from Xiamen University in 1953. He was very much appreciated by Professor L.K.Hua because of his contribution to Tarry problem. He was invited to attend the National Conference on Mathematical Treatises held in Beijing in August 1956. We knew each other at that time.

We three started in the research of analytic number theory almost at the same time. We had often discussed and compared notes together and greatly supported each other for 40 years. We improved sieve method and Goldbach conjecture one after another and made contribution to the mathematical research in China.

Jingrun was delicate in health since he was a child. He worked extremely hard, lived a too simple life and his health broke down from constant overwork . In his later years he suffered from Parkinson's disease and spent ten years in hospital. Jingrun, with an indomitable will, still did his research work and instructed postgraduates in hospital untill the end of his life.

At the invitation of Jiangxi Education Press, we compiled the present "Selected Papers", which contain main treatises of Jingrun in diffrent periods, including a brief account of Jingrun's life and work composed by us.

We got support from the Institute of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences, from the relatives of Jingrun, especially from Madam You Kun, from Jiangxi Education Press in the publication of the "Selected Papers". During the process of composing the "Selected Papers", Professors Pan Chengbiao, Lu Zhujia, Zhang Mingyao, Wang Tianze, Jia Chaohua took part in the arduous task of searching, selecting, translating and proving the "Selected Papers". In the process of the publication, we also got assistance from Mr. Zhou Rongfang, Mr. Huang Mingyu, Mr. Shi Yongchao, Mrs. Wang Tin and Mrs. Shao Xin. We would like to express our heartfelt thanks to all of them.

Wang Yuan, Pan Chengdong

December 1996

目　录

Contents

陈景润
—— 生平与工作简介 ——

王　元　　　　　　　　　　潘承洞
(中国科学院数学研究所)　　(山东大学数学系)

陈景润于 1933 年 5 月 22 日，生于福建省福州市．他的父亲陈元俊是一个邮政局职员，母亲于 1947 年即过世．由于父亲收入低微及家庭人口较多，所以家境相当贫寒．

陈景润在福州读完小学与中学． 1949 年至 1953 年，他就读于厦门大学数学系．大学毕业后，由政府分配至北京市第四中学任教．他对教师这一工作很不适宜而被辞退．厦门大学校长王亚南了解他的处境之后，于 1955 年 2 月将陈景润调回厦门大学工作．

那时，陈景润对数论产生了强烈的兴趣．厦门地处海防前线，时常有空袭警报，需到防空洞躲避．陈景润就把华罗庚的专著《堆垒素数论》撕开，放几页在身上，走到哪里，学到哪里．《堆垒素数论》的第四章 "某些三角和的中值公式 (II)" 是用华罗庚的方法来处理低次多项式所对应的三角和的中值公式．第五章 "维诺格拉朵夫的中值公式及其推广" 则是用维诺格拉朵夫方法来处理高次多项式对应的三角和的中值公式．陈景润发现用《堆垒素数论》第五章的方法可以改进第四章的某些结果．他写了一篇论文 "关于塔内 (G. Tarry) 问题" 寄给了华罗庚．华罗庚将陈景润的论文交给中国科学院数学研究所的一些研究人员审查．陈景润的结果被确认是对的．华罗庚认为陈景润是一个很有才能的年轻人．

1956 年 8 月，中国数学会在北京召开 "全国数学论文报告会"．由华罗庚推荐，陈景润应邀参加大会，并报告了他关于塔内问题的结果，受到与会者的好评．由于华罗庚的赏识与推荐，陈景润于 1957 年 10 月被调到中国科学院数学研究所任实习研究员．

陈景润在中国科学院数学研究所的良好环境中，研究工作进展很快，取得了重要成果．他从研究三角和的估计及其应用入手，对圆内整点问题，除数问题，球内整点问题及华林 (E. Waring) 问题等著名问题的结果，作出了重要的改进．

从 60 年代中开始，陈景润又转入了筛法及其应用的研究，达到了他研究工作的顶峰．他对哥德巴赫 (C. Goldbach) 猜想及殆素数分布的研究成

果有广泛的影响，受到国内外数学家的高度评价. 1978 年与 1982 年，他两度收到在国际数学家大会上作 45 分钟报告的邀请.

陈景润一直多病，健康欠佳. 在“文化大革命”的十年中，陈景润受到了错误的批判与不公正的待遇，使他的工作与健康都受到严重的伤害. 1984 年，陈景润不幸得了帕金森氏综合症，即使在这样的情况，他仍不停地进行研究工作，并常与年轻学生讨论数学问题. 1976 年，“文化大革命”结束后，陈景润的工作与生活得到了政府很好的照顾，在他病重住医院的几年中，更得到政府对他的特别照顾. 1996 年 3 月 19 日，陈景润因病情加重，治疗无效而去世.

由于陈景润在数学上的突出贡献，他于 1977 年被提升为中国科学院数学研究所研究员，1980 年当选为中国科学院学部委员. 陈景润得到过国家自然科学一等奖，何梁何利数学奖与中国数学会华罗庚数学奖.

陈景润于 1980 年与由昆女士结婚，生有一个儿子陈由伟.

数学工作

一. 筛法及其应用

1. 表大偶数为素数与殆素数之和.

哥德巴赫猜想是 1742 年，哥德巴赫与欧拉 (L. Euler) 的通信中提出来的关于表整数为素数之和的两个猜想，即

$$\text{每一个偶数} \geq 6 \text{ 都是两个奇素数之和}, \tag{A}$$

$$\text{每一个奇数} \geq 9 \text{ 都是三个奇素数之和}. \tag{B}$$

显然由 (A) 可以推出 (B). 基于圆法及关于素变数三角和的估计，维诺格拉朵夫 (И. М. Виноградов) 于 1937 年天才地证明了，猜想 (B) 对于充分大的奇数成立. 因此剩下要证明的就是猜想 (A) 了. 利用维诺格拉朵夫方法还可以证明，几乎所有的偶数都是两个素数之和. 详言之，命 $E(x)$ 表示不超过 x 的偶数中不能表示为两个素数之和的偶数个数. 则 $E(x) = O(x(\ln x)^{-B})$，其中 B 为任意正常数，且与 O 有关的常数仅依赖于 B.

研究猜想 (A) 的另一个方法是筛法. 筛法肇源于公元前 250 年的“埃拉朵斯染尼氏 (Eratosthenes) 筛法”. 1919 年，布伦 (V. Brun) 对筛法作出了重大改进，并将它用于哥德巴赫猜想. 命 P_a 表示素因子个数不超过 a 的整数. 我们称 P_a 为一个殆素数. 布伦证明了

$$\text{每一个充分大的偶数都是两个素因子个数不超过 9 的殆素数之和，简单记为}(9,9). \tag{1}$$

我们可以类似地定义 (a,b). 不少数学家改进了布伦的方法与他的结果：$(7,7)$ (拉代马海尔 (H. Rademacher), 1924), $(6,6)$(埃斯特曼 (T. Estermann),1932), $(5,5)$ (布赫夕塔布 (A. A. Buchstab) 1938), $(4,4)$(布赫夕塔布，1940) 及 (a,b) ($a+b\le 6$, 孔恩 (P. Kuhn), 1954). 其中布赫夕塔布与孔恩是将某些组合方法加以巧妙地运用，从而使布伦方法的威力大大地提高了. 关于埃拉朵斯染尼氏筛法的另一重要改进是 1947 年赛尔贝格 (A. Selberg) 提出来的. 综合以上的方法，王元证明了 (3,4)(1956) 与 (2,3)(1957).

运用布伦筛法，素数分布理论及林尼克 (Yu. V. Linnik) 的大筛法，瑞尼 (A. Rényi) 于 1948 年证明了 $(1,c)$, 即

$$\text{每一个大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过 } c \text{ 的殆素数之和，其中 } c \text{ 是一个常数}. \tag{2}$$

命 $\pi(x;k,l)$ 表示适合 $p\equiv l(\operatorname{mod}k)$, $p\le x$ 的素数个数. 瑞尼关于 (2) 的证明中隐含了下面关于 $\pi(x;k,l)$ 的中值公式：存在 $\delta>0$ 使

$$\sum_{k\le x^{\delta}}\max_{(l,k)=1}\left|\pi(x;k,l)-\frac{\operatorname{li}x}{\varphi(k)}\right|=O\left(\frac{x}{(\ln x)^{c_1}}\right). \tag{3}$$

其中 $\varphi(k)$ 表示欧拉函数，$\operatorname{li}x=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}$ 及 c_1 为常数 ≥ 5. 1961 年与 1962 年，巴尔巴恩 (M. B. Barban) 与潘承洞分别独立地证明 (3) 式对于 $\delta=\frac{1}{6}-\varepsilon$ 及 $\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$ 成立，其中 ε 为任意正数，而与 O 有关的常数依赖于 ε. 潘承洞并由 $\delta=\frac{1}{3}-\varepsilon$ 导出 (1,5). 1962 年与 1963 年，潘承洞与巴尔巴恩又独立地证明 (3) 式对于 $\delta=\frac{3}{8}-\varepsilon$ 成立并推出 (1,4). 注意有时 (3) 式中的 $\pi(x;k,l)$ 需换成一个加权和. 1965 年，阿·维诺格拉朵夫 (A. I. Vinogradov) 与庞比尼 (E. Bombieri) 独立地得出 $\delta=\frac{1}{2}-\varepsilon$. 庞比尼的结果得出的 k 的范围还更大一些，即 $x^{\frac{1}{2}}/(\ln x)^{c_2}$, 其中 c_2 是依赖于 c_1 的正常数，由此导出了 (1,3). 庞比尼－阿·维诺格拉朵夫公式的重要性在于有时可以用它来代替广义黎曼 (G. F. B. Riemann) 猜想.

1966 年，陈景润天才地引进了一个转换原理，从而证明了 (1,2), 即

$$\text{每个大偶数都是一个素数与一个素因子个数不超过 2 的殆素数之和}. \tag{4}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

命 p, p_1, p_2, p_3 表示素数，$A=\{a_v\}$ 为一个有限整数集合，及 $F(A;q,q')$ 表示 A 中适合下面条件的元素个数：$a_v \equiv 0(\bmod q)$, $a_v \not\equiv 0(\bmod p)$, $(p<q', p\nmid q)$, 特别记 $F(A;q')=F(A;1,q')$.

命 n 为一个偶数，$A=\{n-p, p<n\}$,

$$N=F(A;n^{\frac{1}{10}})-\frac{1}{2}\sum_{n^{\frac{1}{10}}\le p<n^{\frac{1}{3}}}F(A;p,p^{\frac{1}{10}}),\quad \Omega=\frac{1}{2}\sum_{\substack{p<n\\(p_{1,2})}}\sum_{\substack{n-p=p_1p_2p_3\\p_3\le n/p_1p_2}}1$$

及 $M=N-\Omega+O(n^{9/10})$, 此处 $(p_{1,2})$ 表示条件 $n^{\frac{1}{10}}\le p_1<n^{\frac{1}{3}}\le p_2\le\left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}$. 藉助于庞比尼－阿·维诺格拉朵夫中值公式及各种筛法可以得出 N 的一个正下界估计，由此即得出 (1,3). 陈景润引进 Ω, 并给一个上界估计，从而使 M 有一个正下界. 这样就证明了 (1,2). (见 [18,19]).

2. 表偶数为两素数之和的表法数估计.

命 n 为偶数及 $D(n)=\sum\limits_{p_1+p_2=n}1$ 表示将 n 表为两素数之和的表法个数. 将赛尔贝格筛法用于集合 $A=\{a_v=v(n-v), 1\le v<n\}$, 则可以得到

$$D(n)\le 16\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1+o(1)),$$

此处

$$\sigma(n)=\prod_{p|n}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

若将赛尔贝格筛法用于集合 $A=\{a_p=n-p, p<n\}$ 并用到庞比尼－阿·维诺格拉朵夫中值公式，则可以得到 $D(n)\le 8\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1+o(1))$. 但欲改进系数 8, 则是很困难的事. 1978 年，陈景润将系数 8 改进为 7.8342. 换言之，他证明了 (见 [25])

$$D(n)\le 7.8342\sigma(n)\frac{n}{(\ln n)^2}(1+o(1)).\tag{5}$$

3. 殆素数的分布问题.

素数论中有一个著名猜想：

当 $x\ge 1$ 时，在区间 $[x, x+2x^{\frac{1}{2}}]$ 中恒有一个素数. (C)

首先是布伦在 1919 年，用他的筛法证明了，当 x 充分大时，在区间 $[x, x+x^{\frac{1}{2}}]$ 中存在一个殆素数 P_{11}, 即猜想 (C) 对 P_{11} 成立. 布伦的结果被不

少数学家加以改进. 例如王元在 1957 年证明了存在 $P_3 \in [x, x + x^{\frac{20}{49}}](x > x_0)$. 我们有兴趣于这样的问题，即对于用殆素数 P_2 代替素数时，猜想 (C) 是否成立？王元于 1957 年证明了，当 x 充分大时，有 P_2 满足 $P_2 \in [x, x + x^{\frac{10}{17}}]$. 1969 年，黎切尔特 (H. E. Richert) 将上面的结果进一步改进为 $P_2 \in [x, x + x^{\frac{6}{11}}]$, $(x > x_0)$. 1975 年，陈景润对于 P_2 证明了猜想 (C), 即当 x 充分大时有 P_2 使

$$P_2 \in [x, x + x^{\frac{1}{2}}]. \tag{6}$$

陈景润在证明 (6) 时用到了加权筛法，其中余项估计用到了三角和的估计. 1979 年，陈景润又用组合方法将 (6) 式中的 $x^{1/2}$ 改进为 $x^{0.477}$. 陈景润的方法成为以后不少重要工作的出发点. (见 [21.27]).

二. 其他工作

4. 华林问题

所谓华林问题是英国数学家华林于 1770 年提出来的关于表正整数为正整数的等方幂和的问题，即

对于整数 $k \geq 2$, 恒存在一个仅依赖于 k 的整数 $s = s(k)$, 使每一个正整数都可以表示为 s 个非负整数的 k 次方幂之和. (D)

这一历史难题是 1908 年由希尔伯特 (D.Hilbert) 证明的. 命使上面结论成立的最小的 s 为 $g(k)$. 问 $g(k)$ 等于什么？或其上界估计？已有的重要结果为 $g(2) = 4$(欧拉，拉格朗日 (J. L. Lagrange) 1770), $g(3) = 9$ 很早即被菲弗立希 (A. Wieferich) 证明. 狄克逊 (L. E. Dickson) 与皮勒 (S. S. Pillai) 独立地证明了当 $k > 6$ 及

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] + 3\right\} \tag{7}$$

时有

$$g(k) = 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2,$$

此处 $[x]$ 表示 x 的整数部分. 皮勒又证明了 $g(6) = 73$. 于是剩下要处理的只是 $k = 4, 5$ 及使 (7) 式不成立的 k. 陈景润于 1964 年完全解决了 $k = 5$ 时的情形，即

$$g(5) = 37. \tag{8}$$

用陈景润的方法还可以导出 $g(4) \le 20$. (见 [3,11,20]). 直至 1986 年，巴拉苏仆勒曼尼 (R. Balasubramanian), 德苏耶 (J. M. Deshouillers) 与坠斯 (F. Dress) 才证明了 $g(4) = 19$. (见 [BDD86]).

5. 格子点问题

命 $r(n)$ 表示将正整数 n 分解成两个整数平方之和的分法个数及 $r(0) = 1$. 则

$$A(x) = \sum_{0 \le n \le x} r(n)$$

就等于落在圆 $u^2 + v^2 \le x$ 中的整点 (u, v) 的个数. 命 $d(n)$ 表示正整数 n 的因子个数. 则

$$D(x) = \sum_{1 \le n \le x} d(n)$$

就是在双曲扇形 $uv \le x, u \ge 1, v \ge 1$ 中的整点 (u, v) 的个数. 所谓圆内整点问题与除数问题分别为求最小的 θ 与 φ 使对于任何 $\varepsilon > 0$ 皆有 $A(x) = \pi x + O(x^{\theta+\varepsilon})$ 与 $D(x) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + O(x^{\varphi+\varepsilon})$ 成立，此处 γ 为欧拉常数而与 O 有关的常数仅依赖于 ε. 数论中有一个著名的猜想:

$$\theta = \varphi = \frac{1}{4}. \tag{E}$$

还有一个著名问题为求黎曼 ζ- 函数在临界线上的阶，即 $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ 的估计. 由于近代处理这些问题的方法都是类似三角和的估计，所以仅叙述圆内整点问题的进展.

首先是高斯 (C. F. Gauss) 证明了 $\theta = \frac{1}{2}$.1903 年, 伏龙诺耶 (G. Voronoi) 给予重要改进，他证明了 $\varphi = \frac{1}{3}$, 1906 年夕尔宾斯基 (W. Sierpinski) 证明了 $\theta = \frac{1}{3}$. 1923 年，范 · 代 · 柯尔坡特 (J. G. Van der Corput) 引进了某种三角和的估计，将 θ 改进为 $\theta = \frac{37}{112}$. 迄至 1942 年，最佳结果 $\theta = \frac{13}{40}$ 是华罗庚得到的. 1963 年，陈景润将华罗庚的结果改进为 $\theta = \frac{12}{37}$, 即

$$A(x) = \pi x + O(x^{\frac{12}{37}+\varepsilon}). \tag{9}$$

(见 [8]).

现在最好的估计是依万尼斯 (H. Iwaniec) 与莫卓溪 (J. Mozzochi) 得到的 $\theta = \frac{7}{22}$. (见 [IM88]).

类似于圆内整点问题与除数问题有所谓球内整点问题与虚二次域的类数平均问题. 详言之，命 $B(x)$ 表示球 $u^2 + v^2 + w^2 \le x$ 内的整点 (u, v, w)

的个数. 求最小的 θ_1 使对于任何 $\varepsilon>0$ 皆有 $B(x)=\frac{4}{3}\pi x^{3/2}+O(x^{\theta_1+\varepsilon})$. 这就是球内整点问题. 命 d 为整数 >0 及 $h(-d)$ 表示虚二次域 $Q(\sqrt{-d})$ 的类数. 类数平均问题就是求最小的 φ_1 使对于任何 $\varepsilon>0$,

$$H(x)=\sum_{1\le d\le x}h(-d)=\frac{4\pi}{21\zeta(3)}x^{3/2}-\frac{2}{\pi^2}x+O(x^{\varphi_1+\varepsilon}).$$

1963 年，陈景润与维诺格拉朵夫独立地证明了

$$\theta_1=\varphi_1=2/3. \tag{10}$$

与圆内整点问题相类似， θ_1 与 φ_1 也有相应的改进.

6. 算术级数中的最小素数问题

命 k,l 为满足 $(k,l)=1$ 的正整数, 问在算术级数 $kn+l$, $n=0,1,2,\ldots$ 中是否有无穷多个素数. 这个问题是狄利克雷 (G. L. Dirichlet) 于 1837 年解决的. 命 $P(k,l)$ 表示上面算术级数中的最小素数. 1934 年, 邱拉 (S. Chowla) 曾猜想，对于任何 $\varepsilon>0$ 皆有

$$P(k,l)=O(k^{1+\varepsilon}). \tag{F}$$

此处与 “O” 有关的常数依赖于 ε. 首先是林尼克于 1944 年证明了，存在常数 c 使

$$P(k,l)=O(k^c) \tag{11}$$

潘承洞于 1957 年最先定出 $c\le 5448$. 其后不少数学家改进了潘承洞的结果，其中陈景润与他的学生曾证明过 c 可以取如下之值：

$$777,168,17,15,13.5,11.5, \tag{12}$$

(见 [17, 22, 26, 38, 40, 48]).

目前最佳估计 $c\le 5.5$ 是希斯 - 仆朗 (D. R. Heath-Brown) 得到的. (见 [HB92]).

7. 哥德巴赫数问题

凡可以表示为两个素数之和的偶数称为哥德巴赫数. §1 定义过的 $E(x)$ 就是不超过 x 的非哥德巴赫偶数的个数. 1975 年，蒙哥马利 (H. L. Montgomery) 与沃恩 (R. C. Vaughan) 将 $E(x)$ 的估计改进为：存在 $\delta>0$ 使

$E(x)=O(x^{1-\delta})$, 此处与 "O" 有关的常数依赖于 δ. (见 [MV75]) 1979 年, 陈景润与潘承洞首次定出

$$\delta > 0.01. \tag{13}$$

其后陈景润又将 δ 的估计改进为 $\delta > 0.05$. (见 [29,30,44]).

8. 三角和的估计

命 q 为整数 ≥ 2 及 $f(x)=a_k x^k+\cdots+a_1 x$ 为整系数 k 次多项式且满足 $(a_{k_1},\ldots,a_1,q)=1$. 引入完整三角和

$$S(f(x),q)=\sum_{x=1}^{q} e(f(x)/q),$$

其中 $e(y)=e^{2\pi iy}$. 当 $f(x)=ax^2$ 时, $S(ax^2,q)$ 就是有名的高斯和. 高斯给出了估计式

$$|S(ax^2,q)| \leq 2\sqrt{q}. \tag{14}$$

对于一般的完整三角和估计这一著名问题是华罗庚于 1940 年证明的. 实际上, 由韦依 (A.Weil) 的结果可以得出:

$$|S(f(x),q)| \leq c(k)q^{1-\frac{1}{k}}. \tag{15}$$

其中 $c(k)$ 为依赖于 k 的常数. (15) 右端的阶 $1-\frac{1}{k}$ 是臻于至善的. 1977 年, 陈景润给出了 $c(k)$ 的估计:

$$c(k)=\begin{cases} \exp(4k), & \text{当 } k\geq 10, \\ \exp(kA(k)), & \text{当 } 3\leq k\leq 9, \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\exp(x)=e^x$ 及 $A(3)=6.1, A(4)=5.5, A(5)=5, A(6)=4.7, A(7)=4.4, A(8)=4.2, A(9)=4.05$ 等. (见 [23]).

后记. 关于陈景润的生平与工作, 过去曾有过一些著作. 例如 [HR74, W80, PP81, W84, W88, WYP88, Z91], 在撰写本文时, 作者参考了这些著作.

注. 带数码的参考文献见本书后 "陈景润论著目录".

参考文献

[HR74] Halberstam H, Richert H E. Sieve Methods. Acad. Press, 1974

[W80] 王元. 解析数论在中国. 自然杂志 (日本), 1980, **8**: 57~60

[PP81] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981

[W84] Wang Y.(Editor) Goldbach Conjecture. World Sci. Pub. Comp., 1984

[W88] 王元. 陈景润. 见: 中国大百科全书, 数学卷. 北京: 中国大百科全书出版社, 1988, 80

[WYP88] Wang Y, Yang C C, Pan C B.(Editors) Number Theory and Its Applications in China. Cont. Math.; Amer. Math. Sci.; 1988, **77**

[Z91] 张明尧. 陈景润. 见: 中国现代科学家传记. 北京: 科学出版社, 1991

[BDD86] Balasubramanian R, Deshouiller J M, Dress F. Problème de Waring pour les bicarres II. *C. R. Acad. Sci. Paris, I Math.*, 1986, **303**: 161~163

[IM88] Iwaniec H, Mazzochi C J. On the divisor and circle problems. *J. Num. Theory*, 1988, **29**: 60~93

[HB92] Heath-Brown D R. Zero free regions for Dirichlet L- functions, and the least prime in an arithmetic progression. *PLMS*, 1992, **64**: 265~338

[MV75] Montgomery H L, Vaughan R C. The exceptional set in Goldbach's problem. *Acta Arith.*, 1975, **27**: 353~370

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com