复变函数方法

FUBIAN HANSHU FANGFA

王传荣　　编著

厦门大学出版社

本书承福建省自然科学著作出版基金资助出版

复变函数方法

王传荣　编著

厦门大学出版社

本书承福建省自然科学著作出版基金资助出版

复变函数方法

王传荣　编著

*

厦门大学出版社出版发行
（地址：厦门大学　邮编：361005）
福建省公安蓝盾印刷厂
（地址：福州市东浦路121号　邮编：350013）

*

开本 850×1168　1/32　8.5 印张　208 千字
1999 年 5 月第 1 版　1999 年 5 月第 1 次印刷
印数：1－1000 册
ISBN 7-5615-1490-5/O・94
定价：15.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

内 容 提 要

本书系统地介绍科技工程中常用的复变函数方法，特别是在各个应用领域发展起来的复变函数新方法。内容包括：平面场的复表示及其应用，Cauchy 型积分，解析函数边值问题，奇异积分方程，Wiener-Hopf 方法，Z 变换、保角映射的变分原理与近似方法等。此外还配备一章预备知识，为读者阅读全书提供方便，每章后面均配置相当数量习题，各个章节附有一些“注记”，帮助读者加深理解或介绍有关发展动向及文献。

本书可作为理工科或应用数学专业本科学生、研究生教材和参考书，也可供科学工作者、工程技术人员和高等学校有关专业教师阅读和参考。

前　言

复变函数的理论和方法在经历了19世纪的辉煌发展之后，20世纪在理论上继续有许多重大进展，同时在物理学和工程技术的诸多领域迅速和广泛地扩展其应用，成为重要的数学工具。因此，A.G.Eringen主编的《现代连续统物理丛书》中译本十七分册，其中就有两个分册是讲述复变函数方法的，即第五分册《解析函数论》和第十二分册《复变函数技术》。

讲述复变函数的经典理论及应用的教材颇多，但讲述复变函数在20世纪发展起来的新的方法和应用的教材则不太多。本书的目的便是介绍若干这些新的方法。从详细的目录易于了解本书的基本内容的安排。把多值函数及其积分，幅角原理及其应用，平面场的复描述，解析函数的边值问题，Cauchy核奇异积分方程，Z变换，Wiener－Hopf方法，保角映射的变分原理和近似方法这样一些应用上的重要内容较系统地介绍给读者，构成本书的主题。其中也介绍我国学者的若干近期工作。

作者从1985年以来在福州大学为理工科的若干专业的研究生讲授《复变函数方法》这门课程，本书便是在这门课程的讲义基础上修改充实而成的。

本书假定读者已经了解大学理工科《工程数学—复变函数》课程的基本内容，例如见[6]。为了便于读者复习

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

与查用，本书一开头写了《复变函数基本知识概述》一节。第一章《预备知识》还介绍了利用幅角连续变动法确定多值函数的单值分支、平面向量的运算及场量的复描述等，以期为读者阅读本书和使用复变函数这一工具提供方便。考虑到本书主要是希望为在力学、数学物理、自动控制和工程技术方面应用复变函数方法的读者提供一个有力工具，书中将侧重介绍有关概念、思想和方法，而省略了若干命题的冗长的数学证明，但指出相应的参考文献，希望能给读者提供方便又不失数学的严谨。

本书的写作和出版，自始至终得到钟同德教授和路见可教授的热情关怀和支持。我借此机会对他们多年来给予我的指导和教诲表示深深的谢意。我还要感谢福建省自然科学著作出版基金、福建省自然科学基金、福州大学研究生处、洪山科技园区为本书的出版所提供的十分宝贵的支持和资助。厦门大学出版社吴天祥副编审对本书的出版给予热情的帮助并做了大量工作，福州大学历年来修习这门课程的研究生也为本书的完善提供了许多宝贵的意见，施养杭和周捍章帮助绘制插图，在此一并致谢。

王 传 荣

1997 年 10 月于福州

目　录

第一章　预备知识

第三章 解析函数的边值问题

第四章 奇异积分方程

第五章 Wiener—Hopf 方法

第六章　保角映射的变分原理与近似方法

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　预备知识

§1　复变函数基本知识概述

我们假定读者已经熟悉“工程数学—复变函数”课程的基本内容(例如见[6]). 在这一节我们概述其中的主要内容.

1.1　解析函数

记 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，其中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均为实值函数.

(1) 复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 处的导数

$$f'(z_0) \overset{\text{Def}}{=} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

若 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则 $f(z)$ 在 $z_0=x+\mathrm{i}y$ 处可导 $\rightleftharpoons$ $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x,y) 可微且满足 Cauchy—Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(2) $f(z)$ 在 z_0 解析 $\rightleftharpoons$ 存在 z_0 的邻域 $N(z_0,r)$ 使得 $f(z)$ 在其中可导.

$f(z)$ 在区域 D 内解析 $\rightleftharpoons$ $f(z)$ 在区域 D 内处处解析 $\rightleftharpoons$ $f(z)$ 在区域 D 内处处可导.

(3) 函数在区域 D 内解析的充分必要条件.

$f(z)$ 在区域 D 内解析 $\rightleftharpoons$ $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内可微且满足 Cauchy—Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$f(z)$在单连通域 D 内解析$\rightleftharpoons f(z)$在单连通域 D 内连续且对区域 D 内任一条逐段光滑闭曲线 C 有

$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$ （Cauchy 积分定理与 Morera 定理）.

$f(z)$在区域 D 内解析$\rightleftharpoons$对任意的 $z_0\in D$，$f(z)$在 z_0 的某邻域 $N(z_0,r)$内可展开为一致收敛的幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \quad z\in N(z_0,r),$$

其中 $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$.

注记 由 Cauchy－Riemann 方程可推知：解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部和虚部均为调和函数，我们称 $v(x,y)$是 $u(x,y)$的共轭调和函数. 因此，解析函数理论与调和函数理论具有极为密切的关系. Cauchy－Riemann 方程也使得解析函数理论与偏微分方程理论相联系.

Cauchy－Riemann 方程还可以作下述推广（见[37]§2）：任意选取两个方向$\vec{s}$和$\vec{n}$，由$\vec{s}$按逆时针方向转到$\vec{n}$成一个直角，则 Cauchy－Riemann 方程可写成

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}.$$

1.2 复变函数的级数理论

(1) 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 收敛$\rightleftharpoons\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 同时收敛.

(2) Abel 引理，若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=z_0(\neq 0)$收敛，则当 $|z|<|z_0|$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 绝对收敛；若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 z_0 处发散，则当

$|z|>|z_0|$时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 发散.

(3) 幂级数的收敛圆和收敛半径. 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，存在一个以 z_0 为中心的圆（称为收敛圆），在圆内级数处处收敛，在圆外级数处处发散. 收敛圆的半径 R 称为收敛半径.

Cauchy—Hadamard 公式. 设给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda,$$

则幂级数的收敛半径 $R=1/\lambda$，（若 $\lambda=0$，则认定 $R=+\infty$，若 $\lambda=\infty$，则认定 $R=0$）.

(4) 幂级数的分析性质. 在收敛圆内幂级数的和函数是解析函数，可以逐项求导和逐项积分.

(5) Taylor 级数. 设 $f(z)$在区域 D 内解析，∂D 表示 D 的边界，$z_0\in D$，$R=d(z_0,\partial D)$，（意指 z_0 与 D 的边界的距离）. 则当$|z-z_0|<R$ 时，$f(z)$有唯一的幂级数展开式—Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

(6) Laurent 级数，设 $f(z)$在圆环域 $0\leqslant R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$可唯一地展开为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_o)^n,\quad (R_1<|z-z_0|<R_2),\qquad (*)$$

其中
$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_o)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

这里，Γ 是位于圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的绕 z_0 的任一条正向简单闭曲线.

特别地，若 $R_1=0$，则称(*)式为 $f(z)$在点 z_0 的 Laurent 展开式，这时称

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

为 $f(z)$在 z_0 的 Laurent 展开式的正则部分，称

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

为 $f(z)$在 z_0 的 Laurent 展开式的主要部分.

(7) 孤立奇点及其分类.

若 $f(z)$在 z_0 不解析，但在 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$的一个孤立奇点. 依 $f(z)$在 $0<|z-z_0|<\delta$ 的 Laurent 展开式包含负幂的情况可把孤立奇点分为可去奇点、极点和本性奇点，具体如下表：

孤立奇点类型	点 z_0 处 Laurent 展开式	极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 性状
可去奇点	$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ (不含负幂)	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0(\neq\infty)$
m 阶极点	$f(z)=\sum\limits_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ $c_{-m}\neq 0$,(仅含有限项负幂)	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$
本性奇点	$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ (含无限项负幂)	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在

若 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$内 解析，则说无穷远点是 $f(z)$的孤立奇点，作反演变换 $\zeta=\frac{1}{z}$，依 $\zeta=0$ 是 $\varphi(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$的可去奇点，$m$ 阶极点或本性奇点而分别说无穷远点是 $f(z)$的可去奇点，m 阶极点或本性奇点，建议读者仿照上面作出相应的表格.

1.3 复变函数的积分理论

(1) 复积分. 设 C 为复平面上有向可求长曲线，始点为 a，终

点为 β，在 C 上依次插入一分点组 $\alpha=z_0,z_1,\cdots,z_{n-1},z_n=\beta$，记 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$，$\delta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\widehat{z_{k-1}z_k}$的长度$\}$任取 $\zeta_k\in\widehat{z_{k-1}z_k}$，若存在极限

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k\overset{\text{记}}{=}\int_c f(z)\mathrm{d}z$$

且与分点取法及 ζ_k 取法无关，则称之为 $f(z)$沿曲线 C 的积分.

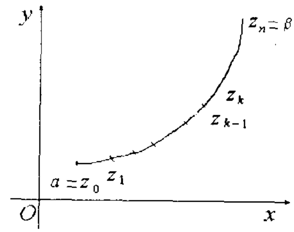

图 1.1

若记 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，则复积分可化为两 个实形式的曲线积分：

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_c u(x,y)\mathrm{d}x-v(x,y)\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_c v(x,y)\mathrm{d}x+u(x,y)\mathrm{d}y.$$

设 L 是曲线 C 的长度，$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$，则成立长大不等式

$$\left|\int_c f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\int_C|f(z)||\mathrm{d}z|\leqslant ML.$$

(2) 留数. 设 $f(z)$在 $0<|z-z_0|<\delta$ 解析，$f(z)$在 z_0 的留数

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)]\overset{\text{Def}}{=}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_c f(z)\mathrm{d}z,$$

其中 C 是 $0<|z-z_0|<\delta$ 内围绕 z_0 的任一简单闭曲线，取正向.

若 $f(z)$在 z_0 的 Laurent 展开式为 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)]=c_{-1}.$$

(3) 极点留数计算法. 若 z_0 为 $f(z)$的 m 阶极点，则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

特别地，若

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},\quad P(z_0)\neq 0,\quad Q(z_0)=0,\quad Q'(z_0)\neq 0,$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)]=\operatorname*{Res}_{z=z_0}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

(4) **留数定理** 设 $f(z)$ 在域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外解析，在 $\overline{D}$ 上除这些孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外连续，$C=\partial D$ 分段光滑，取正向，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}[f(z)].$$

这个命题把复积分的计算转化为留数的计算，它在复积分及某些实积分的计算中具有巨大用途.

(5) Cauchy 积分定理和 Cauchy 积分公式可以作为留数定理的一种特殊情形. 设逐段光滑封闭曲线 L 把复平面分割成两个区域 D^+ 和 D^-，$\infty\in D^-$. 若 $f(z)$ 在 D^+ 解析，在 $\overline{D^+}$ 连续，则 $\int_L f(z)\mathrm{d}z=0$，(Cauchy 定理)；

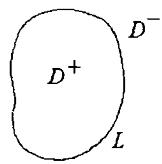

图 1.2

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}f(z), & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^-.\end{cases}\quad\text{(Cauchy 公式)}$$

以上积分曲线 L 均取相对于 D^+ 的正向.

(6) **无穷远点的留数与扩充复平面上的留数定理.** 设 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，又设 $f(z)$ 在无穷远点的邻域 $r<|z|<\infty$ 的 Laurent 展开式为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n,$$

则

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty}[f(z)]\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L^-}f(z)\mathrm{d}z=-c_{-1},$$

其中 L^- 是 $R<|z|<\infty$ 内围绕无穷远点的简单闭曲线，取顺时针方向.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com