多层剛架逐次互联計算法

П.П. 沙 金 著

建筑工程出版社

多层刚架逐次互联計算法

陳府祥 黄明珂 譯

建筑工程出版社出版

·1958·

內容提要　本書是苏联著名学者沙金博士的一本創著。書中所提出的逐次互联法是一个有实用价值的計算多層刚架的新方法，其主要优点是在分析有側移的刚架时，側移与角变可以联合計算，因而使計算工作量大为减少。根据該法的原理，我們可以得出一个高楼风应力分析的簡便方法。

本書可供从事工业及民用建筑設計的設計人員参考。

原本說明

書　　名	РАСЧЕТ МНОГОЯРУСНЫХ РАМ СПОСОБОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СОПРЯЖЕНИЯ
作　　者	Н. Н. ШАГИН
出 版 者	Госстройиздат
出版地点及年份	Ленинград — 1954 — Москва

多層刚架逐次互联計算法

陳府祥　黄晛珂　譯

*

建筑工程出版社出版（北京市阜成門外大街）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第052号）

建筑工程出版社印刷廠印刷・新華書店發行

書号 663　67千字　850×1168　1/32　印張 2 7/8

1958年4月第1版　1958年4月第1次印刷

印数：1－3,150册　定价（10）0.55元

目　录

序　言

多层房屋建筑，特别是高层房屋建筑在苏联的蓬勃发展，在設計工程师面前提出了一个迫切的問題，即多层平面刚架实用計算法的問題。这种形式的刚架，其超靜定程度之大，可使正則联立方程式中的未知数达数百个之多。为了实际解决复杂刚架的計算問題，刚架計算的許多理論研究，一般均采用簡化联立方程式的方法，同时利用各种不同的假定，这些假定歪曲了实际的內力分配图形，因而使精确的計算方法变成了并不具有适当的精确度标准的近似方法。因此，創造一种計算复杂平面刚架的足够精确、簡单、方便而又实用的方法的問題仍然急待解决。在这方面，現有的文献的情况，C.A.罗吉茨基教授在他的“刚架計算”[1]一書中已作了十分詳尽的叙述。他充分有根据地指出，尽管現在已有丰富的理論和許多各种不同的解析和图解的方法，然而，“复杂的超靜定系統的計算(应用所謂的精确的計算方法)仍然进展极小”。

用精确方法計算复杂刚架系統的根本困难在于必須解联立方程式。

大家都知道，当解 n 个綫性联立方程式时，算术的演算次数，随着未知数的个数的增加而增多，但不与 n 成正比。因此，对于 n 个联立方程式的未知数，必須計算的系数的个数为 $\frac{n(n+1)}{2}$。由此可见，当未知数的个数比較起来不很多时(超过12～15个未知数)，按高斯方法求解仍很困难。

有两种方法可以避免用精确方法計算复杂系統时所发生的极大困难。第一种方法就是用各种减少方程式的共存性的方法以簡化联立方程式，这种方法在理論上已获得极大的发展。联立方程式的簡化常可用新的計算方法(必須确定新的参变数)或假定(这

种假定会造成精确度不明的近似結果)来达到。

前面所提到的C.A.罗吉茨基的著作中，联立方程式的簡化是靠着引用新的移写系数(不能进行核算)和編制平衡結点补充表来获得的。

在A.И.西加里[3]教授关于計算高层刚架的著作中，联立方程式的簡化是靠着一般近似法都具有的一些假定来获得的。用精确法求解这种問題时，将使方程式复杂化，幷且計算量也大为增加。

B.A.巴尔金[4]和C.A.罗吉茨基[5]所闡述的計算水平載荷下多层刚架的逐次漸近法，实际上只对层数不很多的結构有用。因为在它所需組成的附加联立方程式中，未知数的个数与刚架的层数相等。

实际上，风荷載下多层刚架的近似計算法，如"門架法"、"悬臂法"、"力矩零点法"和亚貝登克（K.Абданк）法等，均为大家所熟知。

在这些方法中，都假定力矩零点分布在柱高和横梁跨度的中間，而仅在亚貝登克法中才根据杆件的弹性嵌固情况来近似地决定柱中的力矩零点。其中每一个方法都有它本身的特点。例如，"悬臂法"是假定多层刚架的工作如同基础嵌固，幷且在体系的結点上受有水平力荷載的悬臂梁一样。

"門架法"是假定多跨多层刚架可分成許多单个的門架，每一个門架所承受的水平力等于刚架实际的結点荷載除以竪向的节間数目❶。

"力矩零点法"是假定柱端为刚性嵌固。把整个刚架的总切力分成作用在每根相应柱子（按柱子刚度的比例分配）上的各个切力❷后，柱端力矩按杆件簡图确定，杆件的下端为刚性嵌固，而上端为滑块(在絕对刚性的平行面間无摩擦地滑动)。然后把所得到

---

❶ 即剛架各層的內柱所承受的水平力為邊柱之二倍——譯者注。

❷ 可參閱К.В.薩赫諾夫斯基著"鋼筋混凝土結構學"，第339頁，龍門聯合書局、1954，或Б.Н.日莫契金著"結構靜力學"，第262頁，龍門聯合書局、1953——譯者注。

的力矩按横梁綫性刚度的比例分配給横梁。

因此，上述近似方法仅适用于預先选择刚架构件截面的情况。B.A. 巴尔金〔4〕所完成的比較計算証明：在上层及中层，它所造成的力矩的誤差在2倍以内。而在最重要的下层，其誤差达70%。况且，这种数据是B.A. 巴尔金对五层刚架所算得的。显然，对于高层結构，这种誤差还要增加。

亚貝登克的近似法可得出較精确的結果，特别是当力矩图的零点选择正确时。但它并不具有标准的精确度。在这个方法中，柱端弹性嵌固的計算是近似的。同时，决定力矩时系假定横梁中的力矩零点在跨度的中間。这样的假定在很大程度上貶低了該法的实际价值。在談到一般近似方法的上述缺点时，还应当补充說明：在計算过程中，它們并不是求刚架結点綫位移的簡单而又有足够精确的方法。

第二种实际解决所提問題的更为有效的方法就是完全取消联立方程式的計算，但同时，应使結果仍然十分精确。本書闡述了复杂多层刚架的实际計算方法。这种方法是以基本系統中单元的逐次互联的原理为基础的，可以認为是結点逐次平衡法的发展。1929年苏联工程师H.M.別尔拉茨基〔9〕发表了結点逐次平衡法的象征形式，以后，在苏联学者Ш.M. 高尔曼教授和П.ф. 巴甫柯維奇教授〔11〕，特别是C.A.罗吉茨基教授〔1〕等人的著作中，更获得了巨大的发展。他們对于这种計算刚架的方法提出了方便而又有系統的处理办法。

所述方法的繼續发展导向力矩—力的行列式精确方法的研究。該法已在著者所发表的論文〔2〕中闡明。著者曾应用这个方法来計算許多复杂的超靜定系統。当用于高层刚架时，近似法的更多的优点便显示出来了。这种近似法在細节上与結点平衡法(或与固端力矩分配法)相类似。在后者中，第二次固端力矩是随着反力矩(平衡力矩)的求出而同时得出的。其实，在所述的方法中，逐次分配仅对一个第二次力矩有关，因而計算程序可縮短一半。此外，基本系統复杂单元的分配系数可用力矩行列式的精确方法計

算，这样可簡化設計者的計算工作。其次，还可看出，一般逐次平衡法对于計算結点的綫位移并不方便，而計算結点綫位移对于高聳結构的刚度是必需的。但在本書所論述的方法中，这种位移的計算却十分簡单。这种方法并不逐次决定平衡力矩（逐次决定平衡力矩是一般結点逐次平衡法的計算工作中的主要部分。），它只是借助于所謂的互联系数来逐次决定固端力矩，算出这些力矩的最終总和，并一次結束所有結点的平衡。結点平衡后，基本系統便可化为已知刚架。

上述方法的所有这些特点，使我們可以称它为基本系統中单元的逐次互联法，或者簡称为逐次互联法。

实际上，在一定的設計时間內，設計工程师可以有效的运用这个計算方法，很快地决定內力和变形，同时具有足够的精确度。

如上所述，将本法应用于計算多层骨架的发展符合于計算迅速而結果精确的要求，虽然这种形式的方法就其本質說来是个近似法。本法其所以具有足够的精确度，是由于适当的选择了基本系統的联系，这种联系保証了相应的級数能迅速地收斂，并在計算中消除了不可避免的累积誤差。

这里所說的計算方法的足够精确度是指与所謂的古典計算方法的精确度极少区别的精确度。

实用而又方便的方法决定于下面这样的因素：在計算中完全不必解联立方程式，而所有的計算都可用計算尺进行；所有的計算步驟都有計算表格，因而使求解紧凑；計算結点綫位移的方法十分簡单。所有这些特点都已在計算数例中指出，每一个数例照例都全部算完。最后应該指出：本書所研究的只是实际中应用最广的对称刚架，而且主要是水平結点荷載下的对称刚架，而計算承受水平結点荷載的刚架也就是計算自由刚架中的最困难的部分。

第一章　水平結点荷載下多层刚架的計算

第一节　一力矩方程式及力矩行列式法的要点

在本書所論述的計算方法中，研究了利用一力矩方程式来順次解算基本系統❶中复杂单元的逐次互联法。一力矩方程式系力矩-行列式法的基础，但此处将不述及該方程式的論証，因在笔者已发表的著作〔2〕中已有簡要的闡述，此处仅述及該方程式本身的要点、专用名詞的解释以及力矩行列式法之特征。

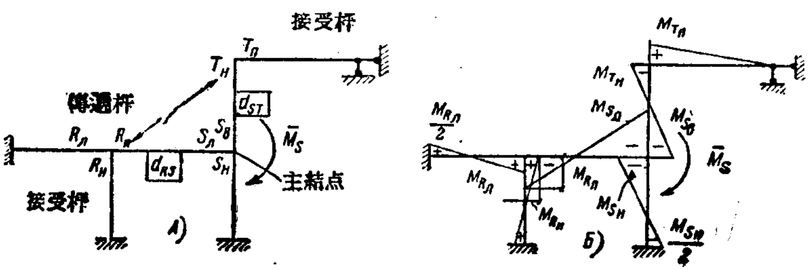

图 1

图 1 所示为具有不移动結点的刚架，为簡便起見，以下均称之为非自由刚架❷。它与自由刚架不同，换言之，即与有移动結点的刚架不同。

在此刚架上，有外力矩$\overline{M}_s$作用的結点 S 称为主結点，而无荷載的結点 R 及 T，則称之为次結点。

因外力矩作用，故刚架結点内产生反力矩（图 1Б）。以結点为中心，在結点左边杆端的反力矩标以符号 л，在結点上面杆端的标

---

❶ 基本系統和複雜單元的定義可參閱"蘇聯剛構分析的三種新方法"一書中的"力矩-力的行列式法"(即本書參考文獻〔2〕的譯文)，科學技術出版社出版，第 73 頁——譯者注。

❷ 非自由剛架即無側移剛架——譯者注。

以$в$，在結点右边杆端的标以$п$，在結点下面杆端的标以$н$。

反力矩分为主反力矩（Ms_K一类）——产生于主結点內的，及次反力矩（M_{TK}及M_{RK}一类）。

傳递主反力矩于次結点的各杆端为R_n及$T_н$的杆件称为傳递杆，而所有次結点的其余杆件均称之为接受杆。弯矩的符号按順时針法則确定之。根据此法則，按順时針方向旋轉的弯矩为正号。

图1A定名为力矩行列式法的"不变量簡图"❶，因其参变量与外力矩无关。

于图形的各結点記上所謂的最簡单的分配系数$S_л$、$S_в$、$S_н$等。这些分配系数在一般的結点逐次平衡法中即为大家所熟知，它們的符号与結点杆端的符号一致。除此以外，在不变量簡图的非支承杆件上注出所謂的力矩行列式d_{ST}及d_{SR}，它們是分配系数的函数，其值写在相应的杆件上。

最簡单的分配系数，例如結点S中的分配系数，由結点逐次平衡法可知，系由下式确定：

$$S_л=\frac{i_{Sл}}{i_{Sл}+i_{Sв}+i_{Sн}};\quad S_в=\frac{i_{Sв}}{i_{Sл}+i_{Sв}+i_{Sн}};$$

$$S_н=\frac{i_{Sн}}{i_{Sл}+i_{Sв}+i_{Sн}},\tag{1}$$

式中$i_{Sл}$、$i_{Sв}$及$i_{Sн}$为各相应杆件的相对綫性刚度i_0，其值也同样按杆件的形式确定（图2）。如假定第一类杆件（图2A）为基本形式，则可以看出，i_0值可从相应的反力矩$4i$、$3i$或i与数值4的比值得出，数值4表示第一类杆件結点轉动的特征。

因此，除杆件T_n外，不变量簡图的所有杆件，按图2A，在不包括弹性模量E时均得：

$$i_0=\frac{I}{l}。$$

---

❶ 所謂"不變量簡圖"就是在剛架簡圖上寫出與荷載無關的"不變量"（如分配系數、力矩行列式等）——譯者注。

按图 2Б，对杆件 $T_{п}$ 得

$$i_0=\frac{0.75I}{l}。$$

力矩行列式按一般的公式計算：

$$d_{RS}=\frac{R_{п}S_{л}}{K_{п}K_{л}}。\qquad (2)$$

式中，$R_{п}$ 及 $S_{л}$ 为杆件 RS 的抵抗分配系数，而 $K_{п}$ 及 $K_{л}$ 则各为該杆右端及左端的力矩焦点比值。該杆被視为基本系統的单元。在此刚架的基本系統中，所有非支承結点 R、S 及 T 都被刚性嵌固形式的附加联系所固結。結果，基本系統被分解为 А、Б 及 В（图 2）型式的单元或其他型式的单元，这取决于杆件的外形及其截面。如果考虑此单元在嵌固处有一轉角 $\varphi=+1$ 的影响，則可得出它的右边及左边的焦点比値，例如，图 2-А 型式的杆件为：

$$K_{п}=K_{л}=\frac{-4}{-2}=2。$$

因此，对含有非支承杆件（仅对該型式而言）在內的不变量簡图，力矩行列式的公式取为如下特殊形式：

$$d_{RS}=\frac{R_{п}S_{л}}{4}。\qquad (3)$$

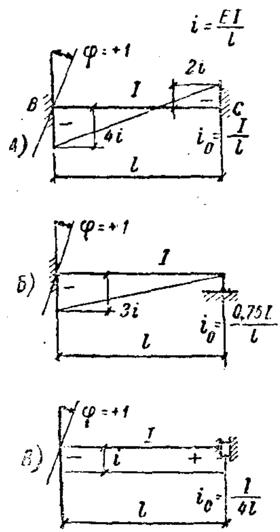

图 2

力矩行列式仅写在非支承杆件上，因在支承杆件上它們都变为零。这点从已示的行列式公式（2）便可看出。支承杆件在支承端可为固定或鉸接。当固定时，分配系数等于零，而鉸結时杆件焦点比値之一变为无穷大。因此，在这两种情况下，力矩行列式均变为零。

基于这些专用名詞，我們得到精确的一力矩方程式，便能按图 1Б 求出所有的反力矩：

1. 主力矩

$$M_{S\kappa}=-\frac{\overline{M}_S}{1-\Sigma d_S}(S_\kappa-d_\kappa), \qquad (4)$$

式中 $\sum d_S$ 是联接于主結点各杆件的力矩行列式的总和。

2. 次力矩，例如 $M_{R\kappa}$ 一类：

$$M_{R\textit{øocnp}}=-\frac{M_{ucx}}{2-\frac{R_{nep}}{2}}R_{\textit{øocnp}}, \qquad (5)$$

式中：M_{ucx}——由傳递杆 SR 傳递到次結点 R 的主力矩 $M_{S\textit{л}}$；

R_{nep}——傳递杆端的分配系数(此处为 R_n)；

$R_{\textit{øocnp}}$——結点接受杆在次結点处的其他相应的分配系数。

(4,5)两式系一力矩广义方程式(适合于任意型式的杆件和任意复杂的系統)的推論(见著者的学位論文)。在目前的情况下，我們仅引用該方程式的特殊型式，因为在本書所論及的較为簡单的系統內，亦即对于中間为主結点，外緣为次結点的系統內，它能保持本身的精确性。当单元更复杂时，則在方程式中含有力矩方程式的鏈分数，本書不予討論。

可以看出，按公式(4,5)計算所有的反力矩时，計算可在計算尺上很快地进行。要算未知力矩，只須在計算尺上計算分子和分母的商即可，而分子和分母却可用心算求得。以后再把計算尺上的活动游标放在已知差数 $S_\kappa-d_\kappa$ 上，便可以很簡单的求得未知力矩；已知差数也是用心算得出。从以上計算程序出发，我們引用相应于公式(4,5)的分开式，即下列規定的縮写形式，以便于列写和心算。

$$\left.\begin{matrix} M_{S_\textit{л}}= \\ M_{S_n}= \\ M_{S_\textit{в}}= \end{matrix}\right\} -\frac{\overline{M}_S}{1-(d_{ST}+d_{SR})}\times\left|\begin{matrix}(S_\textit{л}-d_{SR}) \\ (S_n-0) \\ (S_\textit{в}-d_{ST})\end{matrix}\right\} \qquad (4')$$

校算：$\sum M_{S_\kappa}=-\overline{M}_S$

$$\left.\begin{array}{l} M_{R_л}= \\ M_{R_п}= \\ M_{R_п}= \end{array}\right\} \quad -\frac{M_{S_л}}{2-\dfrac{R_п}{2}}\times \quad \left| \begin{array}{l} R_л; \\ R_п; \\ (R_п-1) \end{array}\right. \tag{5'}$$

$$校算：\sum M_{R_к}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} M_{T_п}= \\ M_{T_н}= \end{array}\right\} \quad -\frac{M_{S_в}}{2-\dfrac{T_н}{2}}\times \quad \left| \begin{array}{l} T_п; \\ (T_н-1) \end{array}\right. \tag{5''}$$

$$校算：\sum M_{T_к}=0$$

式中每一行的第三列数值要乘上一个共有的乘数，該乘数见第二列。

傳递杆杆端力矩 $M_{R_п}$ 和 $M_{T_н}$ 专作校算之用。該值亦可由公式(5)根据条件 $\sum M_{R_к}=0$ 和 $\sum M_{T_к}=0$ (见公式 7)决定。

这种规定的写法，在以后有时还要説明。

附录中表 5和表6 便是根据巳示的分开式——公式(4′、5″)編制出来的。在此同一方程式的基础上，我們已使力矩行列式法在計算自由单元方面(第三节)得到进一步的发展。計算自由单元需要导出复杂力矩行列式公式的結果，其解答见附录中表 1～4。

力矩行列式法是以一力矩方程式为基础的，我們将用計算連續梁这个最簡单的例子来說明力矩行列式法。由这个例子，我們可以得知該法应用到非自由系統中去的若干特点(图 3)。荷載 $q=2.40$ 吨/公尺。

按照梁的巳知簡图(图 3 A)，首先計算注在梁的不变量簡图(图 3$Б$)中的最簡单的分配系数和力矩行列式。

1. 分配系数：

$$B_л=B_п=0.500;$$

$$i_{C_л}=\frac{1}{5}=0.20; \quad C_л=\frac{0.20}{0.45}=0.445;$$

$$i_{C_n}=\frac{1}{4}=0.25; \qquad C_n=\frac{0.25}{0.45}=0.555;$$

$$\sum=0.45; \qquad \text{校算：}\ \sum=1.000;$$

$$i_{D_{\text{л}}}=\frac{1}{4}=0.25; \qquad D_{\text{л}}=\frac{0.25}{0.40}=0.625;$$

$$i_{D_n}=\frac{0.75\times 1}{5}=0.15; \qquad D_n=\frac{0.15}{0.40}=0.375;$$

$$\sum=0.40; \qquad \text{校算：}\ \sum=1.000;$$

2. 力矩行列式：

$$d_{BC}=\frac{0.500\times 0.445}{4}=0.056;$$

$$d_{CD}=\frac{0.555\times 0.625}{4}=0.087;$$

$$\sum d_C=0.056+0.087=0.143。$$

再按公式計算两端固定梁(AB、BC、CD)的外力矩，以及一端固定、另一端为鉸結支承的梁(DE)的外力矩：

$$\overline{M}_{A_n}=-\overline{M}_{B_{\text{л}}}=\overline{M}_{B_n}=-\overline{M}_{C_{\text{л}}}=\frac{2.40\times 5^2}{12}=5.00;$$

$$\overline{M}_{C_n}=-\overline{M}_{D_{\text{л}}}=\frac{2.40\times 4^2}{12}=3.20;$$

$$\overline{M}_{D_n}=\frac{2.40\times 5^2}{8}=7.50。$$

外力矩写在計算表格(图 3B)中外力矩($B.M.$)栏內。

再重新分配不平衡力矩 $M_B=0$ 和 $\overline{M}_D=+4.30$，以使所有外荷載的影响集中到中間結点 C。为此目的，我們应使B和D两結点平衡，換言之，即将不平衡力矩$\overline{M}_B$❶ 和$\overline{M}_D$ 乘以相应的分配系数，

❶ 在目前情况下，力矩$\overline{M}_B$不必去平衡它，因它等于0。

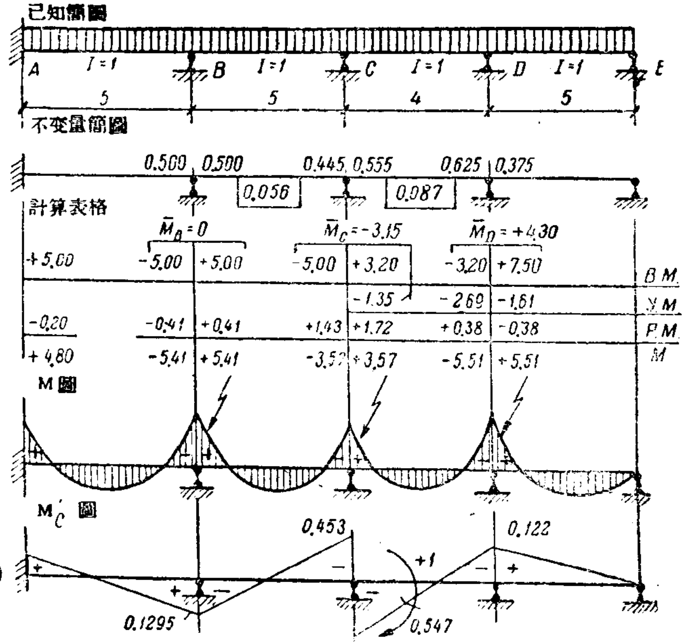

图 3

以求得平衡力矩($Y.M.$)。此时,第二次的力矩 $-1.35\approx-\frac{2.69}{2}$ 将傳至結点 C。所有該項力矩均写在第二行平衡力矩 $Y.M.$ 栏内。不平衡力矩的总和 $\overline{M}_C=-3.15$。

照我們所采用的规定分开式——公式($4'\sim5''$)所算出的反力矩写在第三行($P.M.$):

$$\left.\begin{array}{l}M_{C_л}=\\ M_{C_n}=\end{array}\right\}\frac{-3.15}{1-0.143}\times\left|\begin{array}{l}(0.445-0.056)=+1.43\\ (0.555-0.087)=+1.72\end{array}\right.$$

校算: $\sum=3.15$。

$$M_{B_л}=-\frac{1.43}{2-\frac{0.500}{2}}0.50=-0.41;$$

$$M_{A_n}=\frac{-0.41}{2}=-0.20;$$

$$M_{Dn}=-\frac{1.72}{2-\frac{0.625}{2}}0.375=-0.38。$$

实际力矩 M（图 3Г）即为公式 $M=B.M.+У.M.+P.M.$ 之代数和。

所有的演算均不必进行冗繁的計算便可完成——只須把計算尺上所得的結果写在計算表格中。

用焦点力矩法計算所需要的工作量約多两倍，因为在該法中計算每根受荷构件时，須把四个图形逐次相加。在所示的計算題中，实际上要考虑到所有构件的同时受荷。

当荷載为任意荷載时，須按同样公式（$4'$～$5''$）一次确定 M_C^1 单位图（图3Д）。重新分配不平衡計算力矩 $\overline{M}_C$ 后，即可按公式 $P.M.=\overline{M}_C\overline{M}_C^1$ 求得未知反力矩。在更复杂的图形中，可采用复杂力矩行列式法計算（见文献〔2〕第7节）。

我們再举一个自由刚架方面的例题。在計算多层房屋而又不考虑房屋承重墙承受风荷載时，我們在实际工作中常遇到这样的三跨对称刚架（如图 4А），其横梁具有活动支承。示于不变量簡图（图4Б）中結点上的分配系数，按相对綫性刚度 i_0 数値計算。

a） 对横梁按图 2Б，$i_0=\frac{0.75I}{l}$；

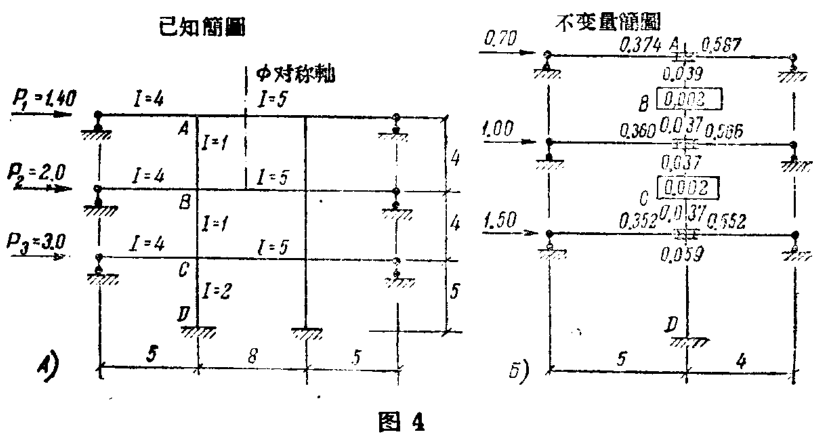

图 4

6） 对柱按图 $2B$， $i_0=\dfrac{I}{4h}$。

因此，如对結点 C，则得：

$$i_{C\text{л}}=\frac{0.75\times4}{5}=0.6000;\qquad C_{\text{л}}=\frac{0.60}{1.7025}=0.352;$$

$$i_{Cn}=\frac{0.75\times5}{4}=0.9400;\qquad C_{n}=\frac{0.94}{1.7025}=0.552;$$

$$i_{C\text{в}}=\frac{1}{4\times4}=0.0625;\qquad C_{\text{в}}=\frac{0.0625}{1.7025}=0.037;$$

$$i_{C\text{н}}=\frac{2}{4\times5}=0.1000;\qquad C_{\text{н}}=\frac{0.10}{1.7025}=0.059;$$

$$\sum=1.7025;\qquad \text{校算：}\sum=1.000。$$

在目前情况下，力矩行列式的計算应考虑杆件加上滑块的特点（图 $2B$），亦即：

相对焦点比値 $K_{\text{л}}=K_{n}=\dfrac{+i}{-i}=-1$。

因此，行列式具有如下形式：

$$d_{RS}=\frac{R_nS_{\text{л}}}{(-1)^2}=R_nS_{\text{л}}。\qquad (6)$$

对所研究的例題（图 $4B$）为：

$$d_{AB}=A_{\text{н}}B_{\text{в}}=0.039\times0.037=0.002;$$

$$d_{BC}=B_{\text{н}}C_{\text{в}}=0.037\times0.037=0.002。$$

共有的結点荷載，由于刚架对称，可对半分开。

作用在所研究的半个刚架柱端的外力矩（按杆件型式簡图——图 $2B$ 計算，已知力作用于滑块上），等于：

$$\overline{M}_{A_{\text{н}}}=\overline{M}_{B_{\text{в}}}=0.70\times\frac{4}{2}=1.40;$$

$$\overline{M}_{B_{\text{н}}}=\overline{M}_{C_{\text{в}}}=(0.70+1)\frac{4}{2}=3.40;$$

$$\overline{M}_{C_{\text{н}}}=\overline{M}_{D}=(0.70+1+1.50)\frac{5}{2}=8.00。$$