世纪精版

通向研究生之路丛书

高等数学

常见题型解析及模拟题

陆　全　肖亚兰　等编

- 内容精要
- 知识脉络
- 重要公式
- 精典范例
- 效果测试
- 真题剖析

西北工业大学出版社

通向研究生之路丛书·世纪精版

根据教育部2003年最新修订的考研大纲编写

高等数学

常见题型解析及模拟题

陆全　肖亚兰　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部修订的最新考研大纲编写的，适用于选考数学一、数学二的考生，也可供考数学三、数学四的考生参考。

本书的特点：(1)明确考试大纲内容、常考点及近7年考研试题的具体分布，帮助考生宏观了解考试范围和侧重点，以便有的放矢。(2)汇总基本概念、重要公式与结论，以便查阅，并将历年统考中的常见题型(共134个)按题型板块归纳分类，剖析典型例题，介绍求解方法与技巧，注重总结，以期开阔考生的解题思路，提高综合解题能力。(3)介绍历年重要考研真题(约110个)，分析所涉及的知识点，剖析常见错误，并配有考研题型的模拟训练题(约350个)，供学生实战练习，提高应试能力，了解考题命题特点与动向，进入考试状态。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学常见题型解析及模拟题/陆全，肖亚兰编．西安：西北工业大学出版社，2003.4

(通向研究生之路丛书·世纪精版)

ISBN 7-5612-1641-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①陆… ②肖… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第022286号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路127号　**邮编**：710072　**电话**：(029) 8493844

网　址：www.nwpup.com

E-mail：fxb@nwpup.com

印刷者：陕西向阳印务有限公司

开　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　张：23

字　数：557千字

版　次：2003年6月第1版　2003年6月第1次印刷

印　数：1～6 000册

定　价：29.00元

前言

为了使准备报考硕士研究生的考生在较短时间内有效地全面复习数学，提高考研应试能力，作者按照教育部制订的最新考研大纲的要求，研究了近年来考研命题的特点和动态，并结合数学阅卷、考研数学辅导的经验，编写了本书。每章内容均由以下三部分组成。

一、考试内容、考点解密、考题分布

编写此部分内容的目的是明确每章中考研大纲的内容，指出本章的常考点及近7年考题的具体分布，帮助考生宏观了解每章内容的范围和侧重点，以利于有针对性的系统学习。

二、知识脉络、题型归类、剖析总结

此部分的编写特点是按题型分类讲解。每节均设知识脉络和若干题型板块。汇总本节基本概念、重要公式与结论，便于查阅。并将历年统考中的常见题型(共134个题型，约500个例题)进行归纳分类，通过对典型例题的剖析，介绍解题方法与技巧，并加以总结，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，提高综合解题能力。

三、真题解析、错误剖析、模拟测试

此部分属于模拟实战训练部分。按章介绍历年重要考研真题(约110个)，分析所涉及的知识点及解题要点，帮助考生走近考试状态；指出考生在运用基本概念、基本理论、基本方法时易犯的错误，并对产生错误的原因进行剖析，使考生对三基内容能正确地理解与运用；每章还配有精选的适量考研题型的模拟训练题(约350个)及答案与提示，供考生通过实战练习，以巩固所学的知识，提高应试能力，了解考研统考命题的特点和动向，体验考试状态。

本书适合选考数学(一)、数学(二)的考生并可供选考数学(三)、数学(四)考生参考，也可作为教授相关课程教师的教学参考书。

本书的第1章至第5章，第7章由陆全编写，第6章由肖亚兰编写，第8章由陆全、刘哲编写，全书由陆全统纂。

由于水平所限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指教。

编　者

2003年元月于西北工业大学

目录

第1章 函数、极限、连续

【考试内容】

数学(一)

函数的概念及表示法，函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，复合函数、反函数、分段函数和隐函数，基本初等函数的性质及其图形，初等函数，简单应用问题的函数关系的建立，数列极限与函数极限的定义以及它们的性质，函数的左极限与右极限，无穷小和无穷大的概念及其关系，无穷小的性质及无穷小的比较，极限的四则运算，极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

【注】 数学(二)本章考试内容同数学(一).

【考点解密】

1. 求极限或已知极限来确定极限式中的常数.
2. 比较无穷小阶的高低或已知两无穷小为同阶(或等阶或高阶)，确定其中参数.
3. 函数连续与间断的判断，特别由分段函数在分段点处连续确定参数.
4. 讨论连续函数零点的个数(或方程实根的个数).
5. 求分段函数的复合函数.

特别注意极限问题及闭区间上连续函数的性质与其他知识的综合问题.

【考题分布】

数学(一)

年份	题型及分数	知识点	年份	题型及分数	知识点
1997	填空 3	$\frac{0}{0}$型、无穷小替代、重要极限、无穷小性质	1998	填空 3	$\frac{0}{0}$型，洛必达法则(或泰勒公式法)
	证明 4＋(4)	极限存在准则Ⅱ(正项级数比较法)		计算 2＋(4)	夹逼准则(定积分定义)

续表

年份	题型及分数	知识点
1999	填空 3	$\infty-\infty$ 型，无穷小替代，洛必达法则
	选择 2+(1)	函数奇偶性、周期性、单调性（原函数）
	选择 2+(1)	分段点处极限、连续性（可导性）
2000	计算 5	左右极限，重要极限
2001	/	/
2002	计算 4+(2)	无穷小比较，洛必达法则（导函数连续性）
2003	填空 4	洛必达法则
	选择 4	数列极限
	计算 4+(0)	数列极限（变力做功）

数学(二)

年份	题型及分数	知识点
1997	填空 3	分段点处的连续性
	选择 3	分段函数复合
	选择 1+(2)	无穷小比较（泰勒公式）
	计算 5	$\frac{\infty}{\infty}$ 型，有理化
1998	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型，洛必达法则（或泰勒公式法）
	选择 3	数列收敛性、有界性，无穷小
	计算 5	间断点类型
	计算 3+(2)	$\frac{0}{0}$ 型，洛必达法则（变限积分求导）
1999	选择 2+(1)	分段点处极限，连续性（可导性）
	选择 2+(1)	无穷小比较（变限积分求导）
	选择 2+(1)	函数奇偶性、周期性、单调性（原函数）
	选择 3	数列极限的“$\varepsilon-N$”定义
	计算 5	$\frac{0}{0}$ 型，洛必达法则 重要极限
	证明 3+(4)	极限存在准则 Ⅱ（定积分）
2000	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型，无穷小替代，洛必达法则
	填空 2+(1)	$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$ 型，等价无穷小（斜渐近线）
	选择 3	$\frac{\infty}{\infty}$ 型，连续定义.
	选择 2+(1)	$\frac{0}{0}$，无穷小比较（泰勒公式）
	证明，计算 2+(4)	夹逼准则（定积分性质）
2001	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型，有理化
	选择 3	分段函数的复合
	选择 3	无穷小比较
	计算 7	1^{∞} 型，洛必达法则，重要极限，间断点类型
2002	填空 3	分段点处的连续性
	选择 2+(1)	洛必达法则（微分方程）
	证明计算 8	极限存在准则 Ⅱ
2003	填空 4	等价无穷小
	选择 4	数列极限
	选择 2+(2)	数列极限（定积分换元法）
	选择 4	一元函数极限
	计算 10	一元函数连续性，间断点
	计算 6+(6)	方程根零点定理（单减性）

1.1 函数

1.1.1 知识脉络

☞ 函数概念

函数,分段函数;反函数,复合函数;基本初等函数,初等函数.

☞ 函数性质

有界性:有 $M>0$, $|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in X\subset D$

单调性:$x_1<x_2$ 时,$f(x_1)\leqslant f(x_2)$, $\forall x_1,x_2\in I\subset D$

奇偶性:$f(-x)=\pm f(x)$, $\forall x\in[-a,a]$

周期性:有 $T>0$, $f(x+T)=f(x)$, $\forall x, x+T\in D$

☞ 常见的函数形式

初等函数	
由极限确定的函数	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x,n)$
由方程确定的隐函数	$F(x,y)=0$
由参数方程确定的函数	$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$
由变限积分确定的函数	$y=\int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t$
由函数项级数确定的函数	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

1.1.2 精典范例

在考研试题中,与本节内容有关的内容很多,除了建立函数关系,利用基本初等函数的基本性质之外,在利用单调有界必有极限准则求极限时,需判定函数的单调性,有界性;利用单调性可以证明一些不等式,而判定单调性可以用导数;对于奇(偶)函数,可以利用对称性简化某种积分的计算(如定积分,重积分,第一型的曲线,曲面积分等).本节的重点是分段函数的复合,函数的表示,反函数.

题型(一) 求复合函数

【例 1.1】 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x)=\underbrace{f[f(\cdots f}_{n个f}(x))]$,求 $f_n(x)$.

【解】 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

若
$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$$

则
$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x/\sqrt{1+kx^2}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知,对于任意的自然数 n,有 $\quad f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[\varphi(x)]$.

【解】
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$$

当 $\varphi(x)<1$ 时,

若 $x<0,\varphi(x)=x+2<1$,有 $\quad x<-1$

若 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1<1$,有 $\quad 0\leqslant x<\sqrt{2}$

当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时,

若 $x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$,有 $\quad -1\leqslant x<0$

若 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$,有 $\quad x\geqslant\sqrt{2}$

因此
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

【注】 求复合函数常用的方法是:① 代入法(如例 1.1);② 分析法(如例 1.2).

题型(二) 求函数表达式

【例 1.3】 设 $2f(x)-f\left(\dfrac{x-1}{3x-1}\right)=x$,则 $f(x)=$ ________.

【解】 应填 $f(x)=\dfrac{6x^2-x-1}{3(3x-1)}$. 令 $t=\dfrac{x-1}{3x-1}$,得 $x=\dfrac{t-1}{3t-1}$,代入原式得
$$2f\left(\frac{t-1}{3t-1}\right)-f(t)=\frac{t-1}{3t-1}$$

即
$$f(x)-2f\left(\frac{x-1}{3x-1}\right)=\frac{-x+1}{3x-1}$$

与原式联立消 $f\left(\dfrac{x-1}{3x-1}\right)$得 $\quad f(x)=\dfrac{6x^2-x-1}{3(3x-1)}$

【注】 一般地，设 $af(x)+f\left(\frac{b_1x+c_1}{b_2x+c_2}\right)=g(x)$.（其中 $g(x)$ 为已知函数，常数 a,b_1,b_2,c_1,c_2，满足：$a\neq\pm1,b_1=-c_2$）可用例1.3中方法求 $f(x)$.

【例 1.4】 (1) 已知 $f(x)=e^{\arcsin x},f[\varphi(x)]=x-1$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(2) 已知 $f(e^x)=1+x+\sin x$，求 $f(x)$.

【解】 (1) 由 $f[\varphi(x)]=e^{\arcsin\varphi(x)}=x-1$，得

$$\varphi(x)=\sin[\ln(x-1)]$$

定义域为 $|\ln(x-1)|\leqslant\frac{\pi}{2}$，且 $x-1>0$，即

$$1+e^{-\frac{\pi}{2}}<x<1+e^{\frac{\pi}{2}}$$

(2) 令 $t=e^x$，则 $x=\ln t$. 代入原式得 $f(t)=1+\ln t+\sin\ln t$

故
$$f(x)=1+\ln x+\sin\ln x$$

【注】 一般地 $f[\varphi(x)]=g(x)$，其中 $g(x)$ 为已知函数.

(1) 已知 $f(x)$，则 $\varphi(x)=f^{-1}[g(x)]$；

(2) 已知 $\varphi(x)$，则令 $\varphi(x)=t$，有 $x=\varphi^{-1}(t)$，故 $f(t)=g[\varphi^{-1}(t)]$，即 $f(x)=g[\varphi^{-1}(x)]$.

【例 1.5】 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1\\ 2e^{x-1}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________.

【解】

当 $-1\leqslant x<0$ 时，$0<y\leqslant1$，$x=f^{-1}(y)=-\sqrt{y}$

当 $0<x\leqslant1$ 时，$y\leqslant0$，$x=f^{-1}(y)=e^y$

当 $1<x\leqslant2$ 时，$2<y\leqslant2e$，$x=f^{-1}(y)=1+\ln\frac{y}{2}$

所以反函数 $f^{-1}(x)$ 为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant1,\\ 1+\ln\frac{x}{2}, & 2<x\leqslant2e.\end{cases}$$

【例 1.6】 (1) 已知 $f(x)=f(x+4)$，$f(0)=0$，且在 $(-2,2]$ 上有 $f'(x)=|x|$，求 $f(9)$；

(2) $f'(\ln x)=1+x$，求 $f(x)$；

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，求 $f(x)$.

【解】 (1)[分析] 欲求周期函数的表达式，一般先确定基本区间 $(0,T]$ 或 $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 中的表达式（T 为最小正周期）. 对于其他 x，可利用变量平移，使得 $x\pm nT\in(0,T]$ 或 $\left(-\frac{T}{2},\right.$

$\frac{T}{2}]$,从而得到 $f(x\pm nT)$ 的表示式,再由 $f(x)$ 的周期性得 $f(x)=f(x\pm nT)$ 的表示式. 解答如下:

由于 $x\in(-2,2]$ 时,$f'(x)=|x|$.因此

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x|t|\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-\int_0^x t\mathrm{d}t=-\frac{x^2}{2}, & -2<x<0\\ \int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

利用 $f(x)$,以 $T=4$ 为周期,则

$$f(9)=f(1+2T)=f(1)=\frac{1}{2}$$

(2) 由 $f'(\ln x)=1+x$,令 $t=\ln x$,得 $f'(t)=1+\mathrm{e}^t$,

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=x+\mathrm{e}^x+C$$

(3) [分析] 注意到定积分 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 是常数,记为 a,因此 $f(x)=x+2a$. 本题的关键是求 a,只需对原式两边求定积分即可解出 a. 解答如下:

原式两边取定积分,有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+2a)\mathrm{d}x\qquad(\text{其中 }a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x)$$

即
$$a=\left(\frac{x^2}{2}+2ax\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}+2a,\ a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$$

于是
$$f(x)=x-1$$

【注】 还有其他的求函数表达式的问题(如根据实际问题建立微分方程,并求解)将在后面介绍.

题型(三) 函数的性质

【例 1.7】 (1) 设 $f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数时,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　).

A. 当 $f(x)$ 为奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数

B. 当 $f(x)$ 为偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数

C. 当 $f(x)$ 为周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数

D. 当 $f(x)$ 为单调增加函数时,$F(x)$ 必为单调增加函数.

【解】 (1) 应选 B.

方法一(直接法)　由于 $|\sin x|\leqslant 1$ 且 e^x 为单调增加函数,有 $|\mathrm{e}^{\sin x}|\geqslant \mathrm{e}^{-1}$;又 x 和 $\tan x$ 都是无界函数,所以对 $\forall M>0$ 都存在 x_1,使得 $|x_1\tan x_1|>\mathrm{e}M$,从而

$$|f(x_1)|\geqslant|x_1||\tan x_1|\mathrm{e}^{-1}>M$$

故 $f(x)$ 是无界函数，应选 B.

方法二(排除法)　容易看出 $f(x)$ 不是周期函数，也不是单调函数，又由于

$$f(-x)=(-x)\tan(-x)\mathrm{e}^{\sin(-x)}=x\tan x\mathrm{e}^{-\sin x}\neq f(x)$$

$f(x)$ 也不是偶函数，故应选 B.

(2) 应选 A. $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可写成 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 形式，于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C \xlongequal{令 u=-t} \int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数，故选 A. 关于 B,C,D 反例如下：

B 的反例：$f(x)=x^2$，$F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ 不是奇函数.

C 的反例：$f(x)=1+\cos x$，$F(x)=x+\sin x+C$ 不是周期函数.

D 的反例：$f(x)=x$，$F(x)=\frac{x^2}{2}$ 不是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数.

【注】　此题是 1999 年数学(一)的 3 分题，主要考查原函数的概念及原函数的变限积分函数表示法，并涉及函数的奇偶性，单调性和周期性，要求考生会举反例排除错误项，正项选出 A. 但实际情况是：错误地选择 C 的约占 $\frac{3}{5}$，而选择 A 的约占 $\frac{1}{5}$. 这说明多数考生对原函数的概念认识模糊，不会用变限积分的形式将原函数表达出来，也就无法用数学的手段来验证原函数的对应性质，只能大致猜测一个(最不易举反例的)结论.

【例 1.8】　已知定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$. 试证明 $f(x)$ 为周期函数，且它的(最小正)周期为 2π.

【证】　$f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=[f(x)+\sin x]+\sin(x+\pi)=f(x)$.
故 $f(x)$ 为周期函数. 下证 2π 为最小正周期，设有 a：$0<a<2\pi$，使 $f(x+a)=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则

$$f(\pi+a)=f(\pi)=f(\pi+0)=f(0)+\sin 0=f(0)=f(a)$$

又由原式得 $f(a+\pi)=f(a)+\sin a$，于是 $\sin a=0$，$a=\pi$，即 π 也是周期，$f(x+\pi)=f(x)$，再由原式 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$，得 $\sin x\equiv 0$，矛盾，故 $f(x)$ 以 2π 为最小正周期.

1.2　极限

1.2.1　知识脉络

☞ **概念**

数列极限，函数极限；无穷小，无穷大.

无穷小的阶：α、β：自变量同一变化过程中的无穷小.

$$\text{若}\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0, & \text{称}\beta\text{是比}\alpha\text{高阶的无穷小,记作}\beta=o(\alpha).\\ \infty, & \text{称}\beta\text{是比}\alpha\text{低阶的无穷小.}\\ C\neq 0, & \text{称}\beta\text{与}\alpha\text{是同阶无穷小.}\\ 1, & \text{称}\beta\text{与}\alpha\text{是等价无穷小,记作}\alpha\sim\beta.\end{cases}$$

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0,k>0$,称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

七种未定式: $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$.

☞ 性质与结论

收敛数列性质: 1° 极限惟一;2° 收敛数列必有界.

极限存在的充要条件: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$.

极限的局部保号性:

1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$,则 $f(x)>0(<0),x\in\dot{U}(x_0,\delta)$;

2° 若 $f(x)\geqslant 0,x\in\dot{U}(x_0,\delta)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant 0(\leqslant 0)$.

两个重要极限:

1° $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ (或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$).

极限存在准则:

1° 若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n(n>N)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$;

2° 单调有界数列必有极限.

无穷小的性质:

1° 有限个无穷小的和(或积)仍为无穷小;

2° 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;

3° 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小;

4° 若无穷小 $\alpha_1\sim\alpha_2,\beta_1\sim\beta_2$,且 $\lim\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ 存在,则 $\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\lim\frac{\alpha_2}{\beta_2}$.

洛必达法则: 若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 有限或 ∞),则 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}\xlongequal{\frac{0}{0}\left(\text{或}\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

1.2.2 精典范例

极限部分是考研的热点主要考查求极限的各种方法(如洛必达法则,夹逼准则,单调有界准则,等价无穷小替代,两个重要极限等),还有无穷小比较(包括比较无穷小阶的高低以及已知两个无穷小为同阶或等价或高阶,要确定其中的某参数),后一部分题多数为选择题或填空题.

题型(一)　求$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型极限

【解题方法】 求$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型极限的常用方法有:

1°　恒等变形(如利用三角公式,提公因子,分子分母同乘除等)约去零因子(或∞因子),再用四则运算法则求极限;

2°　(对$\frac{0}{0}$型)用等价无穷小替代(简化计算);

3°　洛必达法则(这是最有效的方法但不是万能的);

4°　泰勒公式;

5°　设变量代换;

6°　定因子(极限存在但不为0的因子)的处理.

【例 1.9】 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{\sin^4 2x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

【解】 (1) 原式$\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x^2-e^{-x^2}}{(2x)^4}\xlongequal[\sin 2x\sim 2x]{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x+2xe^{-x^2}}{64x^3}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{-1+e^{-x^2}}{32x^2}\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to0}\frac{-2xe^{-x^2}}{64x}=-\frac{1}{32}$$

(2) 原式$\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to0}e^x\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x-x}-1}{x-\sin x}\xlongequal[e^t-1\sim t]{\text{(提出定因子 }e^x\text{,而不是直接用洛必达法则)}}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}\xlongequal[\text{洛}]{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{1-\cos x}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}\xlongequal[1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}]{\tan x-x}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2/2}=2$$

(3) 原式$\xlongequal[\text{有理化,提出定因子}]{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$

$$\xlongequal[\text{洛}]{\left(\frac{0}{0}\right)}2\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\cos x+\sin x+\sin x}=\frac{4}{3}$$

(4) 原式$\xlongequal{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{\cot 3x}\xlongequal{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-3\csc^2 3x}=\dfrac{1}{3}$