



通向研究生之路丛书

高等数学

常见题型解析及模拟题

陆全 肖亚兰 等编

- 内容精要
- 知识脉络
- 重要公式
- 精典范例
- 效果测试
- 真题剖析

西北工业大学出版社

通向研究生之路丛书·世纪精版

根据教育部 2003 年最新修订的考研大纲编写

高等数学

常见题型解析及模拟题

陆全 肖亚兰 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部修订的最新考研大纲编写的,适用于选考数学一、数学二的考生,也可供考数学三、数学四的考生参考。

本书的特点:(1)明确考试大纲内容、常考点及近7年考研试题的具体分布,帮助考生宏观了解考试范围和侧重点,以便有的放矢。(2)汇总基本概念、重要公式与结论,以便查阅,并将历年统考中的常见题型(共134个)按题型板块归纳分类,剖析典型例题,介绍求解方法与技巧,注重总结,以期开阔考生的解题思路,提高综合解题能力。(3)介绍历年重要考研真题(约110个),分析所涉及的知识点,剖析常见错误,并配有考研题型的模拟训练题(约350个),供学生实战练习,提高应试能力,了解考题命题特点与动向,进入考试状态。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学常见题型解析及模拟题/陆全,肖亚兰编. 西安:西北工业大学出版社,2003.4
(通向研究生之路丛书·世纪精版)

ISBN 7-5612-1641-6

I. 高… II. ①陆… ②肖… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022286 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072 电话:(029) 8493844

网 址:www.nwpup.com

E-mail:fxb@nwpup.com

印 刷 者:陕西向阳印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:23

字 数:557千字

版 次:2003年6月第1版 2003年6月第1次印刷

印 数:1~6 000册

定 价:29.00元

为了使准备报考硕士研究生的考生在较短时间内有效地全面复习数学,提高考研应试能力,作者按照教育部制订的最新考研大纲的要求,研究了近年来考研命题的特点和动态,并结合数学阅卷、考研数学辅导的经验,编写了本书。每章内容均由以下三部分组成。

一、考试内容、考点解密、考题分布

编写此部分内容的目的是明确每章中考研大纲的内容,指出本章的常考点及近7年考题的具体分布,帮助考生宏观了解每章内容的范围和侧重点,以利于有针对性的系统学习。

二、知识脉络、题型归类、剖析总结

此部分的编写特点是按题型分类讲解。每节均设知识脉络和若干题型板块。汇总本节基本概念、重要公式与结论,便于查阅。并将历年统考中的常见题型(共134个题型,约500个例题)进行归纳分类,通过对典型例题的剖析,介绍解题方法与技巧,并加以总结,注重一题多解,以期开阔考生的解题思路,提高综合解题能力。

三、真题解析、错误剖析、模拟测试

此部分属于模拟实战训练部分。按章介绍历年重要考研真题(约110个),分析所涉及的知识点及解题要点,帮助考生走近考试状态;指出考生在运用基本概念、基本理论、基本方法时易犯的错误,并对产生错误的原因进行剖析,使考生对三基内容能正确地理解与运用;每章还配有精选的适量考研题型的模拟训练题(约350个)及答案与提示,供考生通过实战练习,以巩固所学的知识,提高应试能力,了解考研统考命题的特点和动向,体验考试状态。

本书适合选考数学(一)、数学(二)的考生并可供选考数学(三)、数学(四)考生参考,也可作为教授相关课程教师的教学参考书。

本书的第1章至第5章,第7章由陆全编写,第6章由肖亚兰编写,第8章由陆全、刘哲编写,全书由陆全统纂。

由于水平所限,书中疏漏与不妥之处,恳请读者指教。

编者

2003年元月于西北工业大学

第1章 函数、极限、连续..... 1

1.1 函数..... 3

题型(一)求复合函数;题型(二)求函数表达式;题型(三)函数的性质.

1.2 极限..... 7

题型(一)求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限;题型(二)求 $0 \cdot \infty$ 型或 $\infty - \infty$ 型极限;题型(三)求幂指型($1^\infty, 0^0, \infty^0$)极限;题型(四)求极限式中的参数;题型(五)已知某极限求另一极限;题型(六)关于含变限积分的未定式的极限;题型(七)关于无穷小的比较与无穷小阶的确定;题型(八)用夹逼准则求极限;题型(九)利用单调有界性求极限;题型(十) n 项和数列的极限;题型(十一) n 项积数列的极限.

1.3 连续..... 23

题型(一)函数的连续性与间断点的类型;题型(二)分段函数式中参数的确定;题型(三)连续函数性质的应用;题型(四)关于连续性的杂题.

第2章 一元函数微分学..... 34

2.1 导数与微分..... 36

题型(一)求分段函数在分段点处的导数;题型(二)求抽象函数在某点处的导数;题型(三)已知某极限,求函数在指定点处的导数;题型(四)在可导条件下,求某极限或确定某常数;题型(五)复合函数的导数,参数方程确定的函数的导数;题型(六)隐函数的导数,对数求导法;题型(七)变限积分函数的导数;题型(八)求高阶导数;题型(九)有理分式函数的高阶导数;题型(十)某些三角函数有理式的高阶导数;题型(十一)乘积的高阶导数.

2.2 利用导数研究函数性态..... 48

题型(一)利用导数判断函数的单调性;题型(二)判定函数的极值;题型(三)求函数的最值;题型(四)曲线的凹凸性及拐点;题型(五)曲线的曲率;题型(六)求曲线的渐近线.

2.3 中值定理、零点问题、不等式	55
<u>题型(一)</u>利用介值定理证明方程根的存在;<u>题型(二)</u>证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题;<u>题型(三)</u>证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f^{(n)}(\xi) = k$ 的命题;<u>题型(四)</u>欲证关系式涉及两个中值 ξ, η 的命题;<u>题型(五)</u>方程有且仅有 n 个实根的证明;<u>题型(六)</u>利用中值公式求极限;<u>题型(七)</u>利用单调性及求最值的方法证明不等式;<u>题型(八)</u>利用微分中值定理证明不等式.	
第3章 一元函数积分学	78
3.1 不定积分	79
<u>题型(一)</u>原函数、不定积分的概念;<u>题型(二)</u>分段函数的不定积分;<u>题型(三)</u>不定积分的第一类换元法;<u>题型(四)</u>不定积分的第二类换元法;<u>题型(五)</u>不定积分的分部积分法;<u>题型(六)</u>有理函数的积分;<u>题型(七)</u>三角函数有理式的积分;<u>题型(八)</u>简单无理函数的积分.	
3.2 定积分与广义积分	94
<u>题型(一)</u>关于定积分性质;<u>题型(二)</u>利用定积分定义求极限;<u>题型(三)</u>定积分的换元积分法;<u>题型(四)</u>定积分的分部积分法;<u>题型(五)</u>分段(含绝对值)函数的定积分;<u>题型(六)</u>利用函数的奇偶性、周期性计算定积分;<u>题型(七)</u>广义积分;<u>题型(八)</u>关于积分上限函数;<u>题型(九)</u>定积分等式的证明;<u>题型(十)</u>定积分不等式的证明.	
3.3 定积分应用	116
<u>题型(一)</u>计算平面图形的面积;<u>题型(二)</u>计算空间立体的体积;<u>题型(三)</u>变力做功, 引力, 液体压力.	
第4章 向量代数与空间解析几何	131
4.1 向量代数	132
<u>题型(一)</u>以向量平行, 垂直, 交成定角或模为条件, 求某些量;<u>题型(二)</u>利用数量积, 向量积, 混合积求某些量.	
4.2 平面与空间直线	136
<u>题型(一)</u>求平面方程;<u>题型(二)</u>求直线方程;<u>题型(三)</u>求点, 直线, 平面之间的关系;<u>题型(四)</u>利用线性代数知识讨论平面的位置关系.	
4.3 曲面与空间曲线	145
<u>题型(一)</u>曲线的投影柱面与投影曲线;<u>题型(二)</u>旋转曲面的方程.	
第5章 多元函数微分学	156
5.1 多元函数的基本概念(含极限, 连续, 偏导数, 全微分, 方向导数, 梯度, 散度, 旋度)和微分法	157

<u>题型(一)多元函数与极限</u> ; <u>题型(二)多元函数有关基本概念及关系</u> ; <u>题型(三)求具体函数的偏导数、全微分</u> ; <u>题型(四)求含抽象函数的复合函数的偏导数</u> ; <u>题型(五)隐函数的微分法</u> ; <u>题型(六)方向导数,梯度,散度,旋度.</u>	
5.2 多元函数微分学的应用	170
<u>题型(一)曲面的切平面,法线</u> ; <u>题型(二)空间曲线的切线,法平面</u> ; <u>题型(三)函数的极值、最值</u> ; <u>题型(四)条件极值的拉格朗日乘数法.</u>	
第6章 多元函数积分学	185
6.1 重积分	186
<u>题型(一)选择坐标及积分次序计算二重积分</u> ; <u>题型(二)更换积分次序</u> ; <u>题型(三)分段函数(含绝对值函数)的二重积分</u> ; <u>题型(四)二重积分的简便计算</u> ; <u>题型(五)二重积分的相关证明</u> ; <u>题型(六)利用直角坐标计算三重积分</u> ; <u>题型(七)利用柱面坐标计算三重积分</u> ; <u>题型(八)利用球面坐标计算三重积分</u> ; <u>题型(九)三重积分的“先二后一”法</u> ; <u>题型(十)综合方法计算三重积分.</u>	
6.2 曲线积分	203
<u>题型(一)对弧长的曲线积分计算</u> ; <u>题型(二)对坐标的曲线积分的直接计算法</u> ; <u>题型(三)利用格林公式或路径无关性计算对坐标的曲线积分</u> ; <u>题型(四)沿空间曲线对坐标的曲线积分</u> ; <u>题型(五)对坐标的曲线积分综合问题.</u>	
6.3 曲面积分	215
<u>题型(一)对面积的曲面积分计算</u> ; <u>题型(二)对坐标的曲面积分的直接计算法</u> ; <u>题型(三)利用高斯公式计算对坐标的曲面积分</u> ; <u>题型(四)利用两类曲面积分的联系求对坐标的曲面积分</u> ; <u>题型(五)对坐标的曲面积分综合问题.</u>	
6.4 多元函数积分学的应用与场论初步	225
<u>题型(一)多元函数积分学的几何应用</u> ; <u>题型(二)多元积分学中的质量系列问题</u> ; <u>题型(三)变力做功问题</u> ; <u>题型(四)流量问题</u> ; <u>题型(五)引力问题.</u>	
第7章 无穷级数	248
7.1 常数项级数	249
<u>题型(一)有关级数概念、性质的命题</u> ; <u>题型(二)正项级数的敛散性</u> ; <u>题型(三)含抽象表达式的正项级数的敛散性</u> ; <u>题型(四)交错级数的敛散性</u> ; <u>题型(五)任意项级数的敛散性</u> ; <u>题型(六)级数判敛杂题</u> ; <u>题型(七)数项级数判敛的选择题.</u>	
7.2 幂级数	263

题型(一)求幂级数的收敛半径,收敛域,求函数项级数的收敛域;

题型(二)函数展开成幂级数;题型(三)幂级数求和;题型(四)数项级数求和.

7.3 傅里叶级数 274

题型(一)函数展开成傅里叶级数;题型(二)给出 $f(x)$,求其傅里叶级数在某指定点处的收敛和或求某傅里叶系数;题型(三)给出 $f(x)$ 的某性质,要证明其傅里叶系数的某性质.

第8章 微分方程 292

8.1 一阶微分方程及二阶可降阶方程 294

题型(一)可分离变量方程类(含齐次方程);题型(二)一阶线性方程类(含伯努利方程,数学(二)不要求);题型(三)简单代换化为常见类型方程求解(数学(二)不要求);题型(四)全微分方程类(含积分因子方程)(数学(二)不要求);题型(五)一阶微分方程的综合问题;题型(六)可降阶的高阶微分方程的求解.

8.2 高阶线性微分方程 306

题型(一)高阶常系数线性微分方程;题型(二)已知二阶线性方程的特解,求通解;题型(三)逆问题:已知线性方程的特解,求方程;题型(四)高阶线性方程综合问题.

8.3 微分方程的应用 314

题型(一)利用定积分的几何意义建立微分方程;题型(二)利用导数的几何意义建立微分方程;题型(三)利用物理学知识建立微分方程;题型(四)利用微元法建立微分方程.

附录 331

一、全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的说明 331

二、2000年全国硕士研究生入学考试数学试题及答案 332

三、2001年全国硕士研究生入学考试数学试题及答案 338

四、2002年全国硕士研究生入学考试数学试题及答案 344

五、2003年全国硕士研究生入学考试数学试题及答案 350



第1章 函数、极限、连续

【考试内容】

数学(一)

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,简单应用问题的函数关系的建立,数列极限与函数极限的定义以及它们的性质,函数的左极限与右极限,无穷小和无穷大的概念及其关系,无穷小的性质及无穷小的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

【注】 数学(二) 本章考试内容同数学(一).

【考点解密】

1. 求极限或已知极限来确定极限式中的常数.
2. 比较无穷小阶的高低或已知两无穷小为同阶(或等阶或高阶),确定其中参数.
3. 函数连续与间断的判断,特别由分段函数在分段点处连续确定参数.
4. 讨论连续函数零点的个数(或方程实根的个数).
5. 求分段函数的复合函数.

特别注意极限问题及闭区间上连续函数的性质与其他知识的综合问题.

【考题分布】

数学(一)

年份	题型及分数	知识点	年份	题型及分数	知识点
1997	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型、无穷小替代、重要极限、无穷小性质	1998	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型,洛必达法则(或泰勒公式法)
	证明 4 + (4)	极限存在准则 II (正项级数比较法)		计算 2 + (4)	夹逼准则 (定积分定义)





续表

年份	题型及分数	知识点	年份	题型及分数	知识点
1999	填空 3	$\infty - \infty$ 型, 无穷小替代, 洛必达法则	2000	计算 5	左右极限, 重要极限
	选择 2 + (1)	函数奇偶性、周期性、单调性 (原函数)	2001	/	/
	选择 2 + (1)	分段点处极限、连续性 (可导性)	2002	计算 4 + (2)	无穷小比较, 洛必达法则 (导函数连续性)
			2003	填空 4	洛必达法则
				选择 4	数列极限
				计算 4 + (0)	数列极限 (变力做功)

数学(二)

年份	题型及分数	知识点	年份	题型及分数	知识点
1997	填空 3	分段点处的连续性		选择 3	$\frac{\infty}{\infty}$ 型, 连续定义.
	选择 3	分段函数复合		选择 2 + (1)	$\frac{0}{0}$ 型, 无穷小比较 (泰勒公式)
	选择 1 + (2)	无穷小比较 (泰勒公式)		证明, 计算 2 + (4)	夹逼准则 (定积分性质)
	计算 5	$\frac{\infty}{\infty}$ 型, 有理化			
1998	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型, 洛必达法则 (或泰勒公式法)	2001	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型, 有理化
	选择 3	数列收敛性、有界性, 无穷小		选择 3	分段函数的复合
	计算 5	间断点类型		选择 3	无穷小比较
	计算 3 + (2)	$\frac{0}{0}$ 型, 洛必达法则 (变限积分求导)		计算 7	1^∞ 型, 洛必达法则, 重要极限, 间断点类型
1999	选择 2 + (1)	分段点处极限, 连续性 (可导性)	2002	填空 3	分段点处的连续性
	选择 2 + (1)	无穷小比较 (变限积分求导)		选择 2 + (1)	洛必达法则 (微分方程)
	选择 2 + (1)	函数奇偶性、周期性、单调性 (原函数)		证明计算 8	极限存在准则 II
	选择 3	数列极限的“ $\varepsilon - N$ ”定义	2003	填空 4	等价无穷小
	计算 5	$\frac{0}{0}$ 型, 洛必达法则 重要极限		选择 4	数列极限
2000	证明 3 + (4)	极限存在准则 II (定积分)		选择 2 + (2)	数列极限 (定积分换元法)
	填空 3	$\frac{0}{0}$ 型, 无穷小替代, 洛必达法则		选择 4	一元函数极限
	填空 2 + (1)	$\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ 型, 等价无穷小 (斜渐近线)		计算 10	一元函数连续性, 间断点
				计算 6 + (6)	方程根零点定理 (单减性)





1.1 函数

1.1.1 知识脉络

函数概念

函数,分段函数;反函数,复合函数;基本初等函数,初等函数.

函数性质

有界性:有 $M > 0$, $|f(x)| \leq M, \forall x \in X \subset D$

单调性: $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) \leq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I \subset D$

奇偶性: $f(-x) = \pm f(x), \forall x \in [-a, a]$

周期性:有 $T > 0, f(x+T) = f(x), \forall x, x+T \in D$

常见的函数形式

初等函数

由极限确定的函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x, n)$

由方程确定的隐函数 $F(x, y) = 0$

由参数方程确定的函数 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

由变限积分确定的函数 $y = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt$

由函数项级数确定的函数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

1.1.2 精典范例

在考研试题中,与本节内容有关的内容很多,除了建立函数关系,利用基本初等函数的基本性质之外,在利用单调有界必有极限准则求极限时,需判定函数的单调性,有界性;利用单调性可以证明一些不等式,而判定单调性可以用导数;对于奇(偶)函数,可以利用对称性简化某种积分的计算(如定积分,重积分,第一型的曲线,曲面积分等).本节的重点是分段函数的复合,函数的表示,反函数.

题型(一) 求复合函数

【例 1.1】 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x) = \underbrace{f[f(\cdots f(x))]}_{n \uparrow f}$, 求 $f_n(x)$.





【解】 $f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x/\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

若

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$$

则 $f_{k+1}(x) = f[f_k(x)] = \frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}} = \frac{x/\sqrt{1+kx^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$

由数学归纳法知,对于任意的自然数 n ,有 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

【例 1.2】 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2-1, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$

当 $\varphi(x) < 1$ 时,

若 $x < 0$, $\varphi(x) = x+2 < 1$, 有 $x < -1$

若 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2-1 < 1$, 有 $0 \leq x < \sqrt{2}$

当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

若 $x < 0$, $\varphi(x) = x+2 \geq 1$, 有 $-1 \leq x < 0$

若 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2-1 \geq 1$, 有 $x \geq \sqrt{2}$

因此

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

【注】 求复合函数常用的方法是:① 代入法(如例 1.1);② 分析法(如例 1.2).

题型(二) 求函数表达式

【例 1.3】 设 $2f(x) - f\left(\frac{x-1}{3x-1}\right) = x$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 应填 $f(x) = \frac{6x^2-x-1}{3(3x-1)}$. 令 $t = \frac{x-1}{3x-1}$, 得 $x = \frac{t-1}{3t-1}$, 代入原式得

$$2f\left(\frac{t-1}{3t-1}\right) - f(t) = \frac{t-1}{3t-1}$$

即

$$f(x) - 2f\left(\frac{x-1}{3x-1}\right) = \frac{-x+1}{3x-1}$$

与原式联立消 $f\left(\frac{x-1}{3x-1}\right)$ 得 $f(x) = \frac{6x^2-x-1}{3(3x-1)}$





【注】 一般地, 设 $af(x) + f\left(\frac{b_1x + c_1}{b_2x + c_2}\right) = g(x)$. (其中 $g(x)$ 为已知函数, 常数 a, b_1, b_2, c_1, c_2 , 满足: $a \neq \pm 1, b_1 \neq -c_2$) 可用例 1.3 中方法求 $f(x)$.

【例 1.4】 (1) 已知 $f(x) = e^{\arcsin x}$, $f[\varphi(x)] = x - 1$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

(2) 已知 $f(e^x) = 1 + x + \sin x$, 求 $f(x)$.

【解】 (1) 由 $f[\varphi(x)] = e^{\arcsin \varphi(x)} = x - 1$, 得

$$\varphi(x) = \sin[\ln(x-1)]$$

定义域为 $|\ln(x-1)| \leq \frac{\pi}{2}$, 且 $x-1 > 0$, 即

$$1 + e^{-\frac{\pi}{2}} < x < 1 + e^{\frac{\pi}{2}}$$

(2) 令 $t = e^x$, 则 $x = \ln t$. 代入原式得 $f(t) = 1 + \ln t + \sin \ln t$

故 $f(x) = 1 + \ln x + \sin \ln x$

【注】 一般地 $f[\varphi(x)] = g(x)$, 其中 $g(x)$ 为已知函数.

(1) 已知 $f(x)$, 则 $\varphi(x) = f^{-1}[g(x)]$;

(2) 已知 $\varphi(x)$, 则令 $\varphi(x) = t$, 有 $x = \varphi^{-1}(t)$, 故 $f(t) = g[\varphi^{-1}(t)]$, 即 $f(x) = g[\varphi^{-1}(x)]$.

【例 1.5】 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 2e^{x-1}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $0 < y \leq 1, x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

当 $0 < x \leq 1$ 时, $y \leq 0, x = f^{-1}(y) = e^y$

当 $1 < x \leq 2$ 时, $2 < y \leq 2e, x = f^{-1}(y) = 1 + \ln \frac{y}{2}$

所以反函数 $f^{-1}(x)$ 为

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ -\sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 1 + \ln \frac{x}{2}, & 2 < x \leq 2e. \end{cases}$$

【例 1.6】 (1) 已知 $f(x) = f(x+4)$, $f(0) = 0$, 且在 $(-2, 2]$ 上有 $f'(x) = |x|$, 求 $f(9)$;

(2) $f'(\ln x) = 1 + x$, 求 $f(x)$;

(3) 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$.

【解】 (1) [分析] 欲求周期函数的表达式, 一般先确定基本区间 $(0, T]$ 或 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 中的表达式 (T 为最小正周期). 对于其他 x , 可利用变量平移, 使得 $x \pm nT \in (0, T]$ 或 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$,





$\frac{T}{2}$], 从而得到 $f(x \pm nT)$ 的表示式, 再由 $f(x)$ 的周期性得 $f(x) = f(x \pm nT)$ 的表示式. 解答如下:

由于 $x \in (-2, 2]$ 时, $f'(x) = |x|$. 因此

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x |t| dt = \begin{cases} -\int_0^x t dt = -\frac{x^2}{2}, & -2 < x < 0 \\ \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

利用 $f(x)$, 以 $T = 4$ 为周期, 则

$$f(9) = f(1 + 2T) = f(1) = \frac{1}{2}$$

(2) 由 $f'(\ln x) = 1 + x$, 令 $t = \ln x$, 得 $f'(t) = 1 + e^t$,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (1 + e^x) dx = x + e^x + C$$

(3) [分析] 注意到定积分 $\int_0^1 f(t) dt$ 是常数, 记为 a , 因此 $f(x) = x + 2a$. 本题的关键是求 a , 只需对原式两边求定积分即可解出 a . 解答如下:

原式两边取定积分, 有

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2a) dx \quad (\text{其中 } a = \int_0^1 f(x) dx)$$

$$\text{即} \quad a = \left(\frac{x^2}{2} + 2ax \right)_0^1 = \frac{1}{2} + 2a, \quad a = \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{2}$$

于是

$$f(x) = x - 1$$

【注】 还有其他的求函数表达式的问题(如根据实际问题建立微分方程, 并求解) 将在后面介绍.

题型(三) 函数的性质

【例 1.7】 (1) 设 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是().

- A. 偶函数 B. 无界函数 C. 周期函数 D. 单调函数

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数时, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则().

- A. 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数
B. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数
C. 当 $f(x)$ 为周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数
D. 当 $f(x)$ 为单调增加函数时, $F(x)$ 必为单调增加函数.

【解】 (1) 应选 B.

方法一(直接法) 由于 $|\sin x| \leq 1$ 且 e^x 为单调增加函数, 有 $|e^{\sin x}| \geq e^{-1}$; 又 x 和 $\tan x$ 都是无界函数, 所以对 $\forall M > 0$ 都存在 x_1 , 使得 $|x_1 \tan x_1| > eM$, 从而

$$|f(x_1)| \geq |x_1| |\tan x_1| e^{-1} > M$$





故 $f(x)$ 是无界函数, 应选 B.

方法二(排除法) 容易看出 $f(x)$ 不是周期函数, 也不是单调函数, 又由于

$$f(-x) = (-x)\tan(-x)e^{\sin(-x)} = x\tan x e^{-\sin x} \neq f(x)$$

$f(x)$ 也不是偶函数, 故应选 B.

(2) 应选 A. $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可写成 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$ 形式, 于是

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C \xrightarrow{\text{令 } u = -t} \int_0^x f(-u)d(-u) + C$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u) = -f(u)$, 有

$$F(-x) = \int_0^x f(u)du + C = F(x)$$

即 $F(x)$ 为偶函数, 故选 A. 关于 B, C, D 反例如下:

B 的反例: $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ 不是奇函数.

C 的反例: $f(x) = 1 + \cos x$, $F(x) = x + \sin x + C$ 不是周期函数.

D 的反例: $f(x) = x$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ 不是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数.

【注】 此题是 1999 年数学(一)的 3 分题, 主要考查原函数的概念及原函数的变限积分函数表示法, 并涉及函数的奇偶性, 单调性和周期性, 要求考生会举反例排除错误项, 正项选出 A. 但实际情况是: 错误地选择 C 的约占 $\frac{3}{5}$, 而选择 A 的约占 $\frac{1}{5}$. 这说明多数考生对原函数的概念认识模糊, 不会用变限积分的形式将原函数表达出来, 也就无法用数学的手段来验证原函数的对应性质, 只能大致猜测一个(最不易举反例的)结论.

【例 1.8】 已知定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$. 试证明 $f(x)$ 为周期函数, 且它的最小正周期为 2π .

【证】 $f(x+2\pi) = f(x+\pi) + \sin(x+\pi) = [f(x) + \sin x] + \sin(x+\pi) = f(x)$. 故 $f(x)$ 为周期函数. 下证 2π 为最小正周期, 设有 $a: 0 < a < 2\pi$, 使 $f(x+a) = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则

$$f(\pi+a) = f(\pi) = f(\pi+0) = f(0) + \sin 0 = f(0) = f(a)$$

又由原式得 $f(a+\pi) = f(a) + \sin a$, 于是 $\sin a = 0$, $a = \pi$, 即 π 也是周期, $f(x+\pi) = f(x)$, 再由原式 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$, 得 $\sin x \equiv 0$, 矛盾, 故 $f(x)$ 以 2π 为最小正周期.

1.2 极限

1.2.1 知识脉络

概念

数列极限, 函数极限; 无穷小, 无穷大.

无穷小的阶: α, β : 自变量同一变化过程中的无穷小.





若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 高阶的无穷小, 记作 } \beta = o(\alpha). \\ \infty, & \text{称 } \beta \text{ 是比 } \alpha \text{ 低阶的无穷小.} \\ C \neq 0, & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是同阶无穷小.} \\ 1, & \text{称 } \beta \text{ 与 } \alpha \text{ 是等价无穷小, 记作 } \alpha \sim \beta. \end{cases}$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0, k > 0$, 称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

七种未定式: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$.

性质与结论

收敛数列性质: 1° 极限惟一; 2° 收敛数列必有界.

极限存在的充要条件: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$.

极限的局部保号性:

1° 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0 (< 0)$, 则 $f(x) > 0 (< 0), x \in U(x_0, \delta)$;

2° 若 $f(x) \geq 0, x \in U(x_0, \delta)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0 (\leq 0)$.

两个重要极限:

1° $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

2° $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$).

极限存在准则:

1° 若 $x_n \leq y_n \leq z_n (n > N)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$;

2° 单调有界数列必有极限.

无穷小的性质:

1° 有限个无穷小的和(或积)仍为无穷小;

2° 有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小;

3° 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小;

4° 若无穷小 $\alpha_1 \sim \alpha_2, \beta_1 \sim \beta_2$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.

洛必达法则: 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 有限或 ∞), 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ (或 } \frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

1.2.2 精典范例

极限部分是考研的热点主要考查求极限的各种方法(如洛必达法则, 夹逼准则, 单调有界准则, 等价无穷小替代, 两个重要极限等), 还有无穷小比较(包括比较无穷小阶的高低以及已知两个无穷小为同阶或等价或高阶, 要确定其中的某参数), 后一部分题多数为选择题或填空题.





题型(一) 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限

【解题方法】 求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的常用方法有:

1° 恒等变形(如利用三角公式,提公因子,分子分母同乘除等)约去零因子(或 ∞ 因子),再用四则运算法则求极限;

2° (对 $\frac{0}{0}$ 型)用等价无穷小替代(简化计算);

3° 洛必达法则(这是最有效的方法但不是万能的);

4° 泰勒公式;

5° 设变量代换;

6° 定因子(极限存在但不为 0 的因子)的处理.

【例 1.9】 求极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{\sin^4 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x - \sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

【解】 (1) 原式 $\xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{(2x)^4} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x + 2xe^{-x^2}}{64x^3} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + e^{-x^2}}{32x^2} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2xe^{-x^2}}{64x} = -\frac{1}{32}$$

(2) 原式 $\xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} e^x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - x} - 1}{x - \sin x} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x - x} - 1}{e^x - 1} \xrightarrow{e^t - 1 \sim t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} \xrightarrow{\tan x - x \sim \frac{x^3}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2/2} = 2$$

(3) 原式 $\xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} + \sqrt{\cos x}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x\sin x - \cos x} \xrightarrow{\text{有理化, 提出定因子}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x\sin x - \cos x} =$

$$\xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \cos x + \sin x + \sin x} = \frac{4}{3}$$

(4) 原式 $\xrightarrow{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot 3x} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{-3\csc^2 3x} = \frac{1}{3}$

