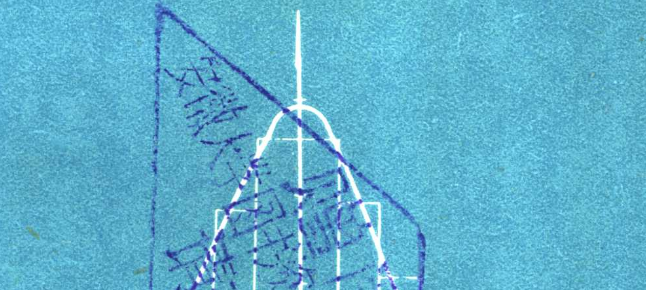
报考硕士研究生

高等数学函授教材

第三册　微 分 方 程

滕尧清　　黄文纲



安徽大学数学系函授部

一九八六年三月

启　　事

本组有如下高等数学函授教材供应，基本上是历届研究生高等数学试题中难题选解。您若需要，请把款汇到“合肥市安徽大学数学系函授组”，在汇款单附言栏注明购买书的名称和册数，不要另来函说明，以免核对之繁。**书有存货，款到书发，保证供应。**

第一册，《**一元微积分**》，551题解，204页，定价1.30元；

第二册，《**级数与多元微积分**》，370题解，210页，定价1.30元；

第三册，《**微分方程**》，390题解，138页，定价0.90元；

第四册，《**线性代数**》，447题解，132页，定价0.90元；

第五、六册，含1985年96所研究院、所及高校110套非数学专业用《**高等数学研究生题解**》，每册定价1.50元。全套书价7.40元。[redacted]价作废。

我[redacted]**率论题解**[redacted]寄书邮费[redacted]

第一章　一阶方程

第二章　常系数线性微分方程(组)

第三章　欧拉方程，二阶变系数线性微分方程

第五章　一阶偏微分方程

第一章　一阶方程

§1．求曲线族的微分方程

试求下列曲线族的微分方程，并指出这些微分方程所表示的曲线的特性（C_1，C_2为参量）：

1　$(x-C_1)^2+y^2=1$.

【关于x微分等式两边得：$C_1=x+yy'$。将它代入原式得曲线族的微分方程$y^2y'^2+y^2=1$.它表示曲线族上任一点的切线长（该点沿该点的法线至x轴的距离）均为1。

2．$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$.

【关于x微分等式两边一次和二次得：$x-C_1+(y-C_2)\cdot y'=0$，$1+y'^2+(y-C_2)y''=0$。由此二式解出C_1，C_2，并代入原式，即得曲线族的微分方程$y''=(1+y'^2)^3$。它表示曲线族上每一点的曲率均为1。

验证曲线族是已给微分方程的通积分（C为参量）

3　$x=y^{cy+1}$；$y'=y/x(\ln x-\ln y)$.

【关于x微分曲线族表达式两边（y为x的函数）得：$y'=y/x(1+Cy)$。∵由曲线族表达式有$1+Cy=\ln x-\ln y$ ∴曲线族的微分方程是$y'=y/x(\ln x-\ln y)$。

4　$y=e^{\arcsin Cx}$；$xy'=y\operatorname{tg}(\ln y)$.

【由曲线族表达式得$\sin(\ln y)=Cx$。再关于x微分此式两边得$(\cos\ln y)/y=C/y'$。将得出的两式相除即得题给的微分方程。

5 $C^2y^2+(C^2-a^2)x^2=c^2(c^2-a^2)$； $xyy'^2+y'(x^2-y^2-a^2)-xy=0$

【关于x微分曲线族表达式两边得：$C^2yy'+(C^2-a^2)x=0$

∴有$C^2xyy'+(C^2-a^2)x^2=0$和$C^2=a^2x/(x+yy')$两式，将曲线族表达式与此两式的前者相减后，约去C^2，再将前两式之后者代入即可得题给的微分方程。

6 建立切于两条直线$y=\pm(x-b)tg\alpha$且圆心在x轴上的所有圆的微分方程。

【合题意的圆族表达式为：$(x-C)^2+y^2=(C-b)^2\cdot Sin^2\alpha$，其中$C$为参量，关于$x$微分此表达式的两边得$C'=x+yy'$。再将它代入圆族表达式，即可得所求的微分方程

$$y'^2y^2\cos^2\alpha+2yy'(b-x)\sin^2\alpha+y^2-(b-x)^2\sin^2\alpha=0.$$

7 求与曲线族$x^2/a^2+y^2/c^2=1$（C为参量）正交的轨线族的微分方程。

【关于x微分等式$1/y^2(1-x^2/a^2)=1/C^2$两边，得已知曲线族的微分方程式$y'(x^2-a^2)=xy$。以$-1/y_1'$取代此方程中的y'即得所求之微分方程

8 求与曲线族$x^2+y^2=C^2$（C为参量）交成45^0的等交轨线族的微分方程。

【已给曲线族的微分方程是$x+yy'=0$。把此式中的y'换成$(y'\mp tg45°)/(1\pm y'tg45°)$即得所求之微分方程：

$(y+x)y'=y-x$和$(y-x)y'=y+x$.

9 求与曲线族$r=C\cos^2\theta$（C为参量）正交的轨线的微分方程。

【关于θ微分等式$r(\theta)/\cos^2\theta=C$的两边，得已知曲线族的微分方程$r'=-2rtg\theta$。以$-r^2/r'$取代其中的r'即得所求之微

分方程$r' = \frac{1}{2}r \cdot ctg\theta$

10 求与曲线族$r = C\sin\theta$（C为参量）交成45°的等交轨线族的微分方程。

【关于θ微分等式$r(\theta)/\sin\theta = C$的两边，得已知曲线族的微分方程$r' = r \cdot ctg\theta$。以$\pm r \cdot (r' - r tg45^\circ)/(r + r' tg45^\circ)$取代其中的$r'$，即得所求的微分方程

$r' = r \cdot ctg(\theta + 45^\circ)$和$r' = r \cdot ctg(\theta + 45^\circ)$。

11 求二次曲线族$x^2/C^2 + y^2/(C^2 - 1) = 1$（$C$为参量）所满足的微分方程，并从微分方程本身证明这族曲线是自正交曲线族，即这族曲线中的任何两条曲线如果相交则必正交。

【视y为x的函数，关于x微分已知曲线族表达式的两边得：$x/C^2 + yy'/(C^2 - 1) = 0$，再由它和原式消去参量$C$，即得已知曲线族的微分方程：$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0$。直接验证结果，此方程不因其中的$y'$被换成$-1/y'$而改变，故命题得证。

§2. 变量分离方程，线性方程以及可化为这两种方程的一阶一次方程。

今后，如无特殊声明，积分常数C均指任意有限常数。积分常数有时用C_1，C_2等表示。

求下列微分方程：

12 $y' = \sqrt{(x^2 - 1)/y^2 - 1)}$

【当$|x| > 1$，$|y| > 1$时，$\sqrt{y^2 - 1}\,dy = \sqrt{x^2 - 1}\,dx$。从而，$y\sqrt{y^2 - 1} - \ln|y + \sqrt{y^2 - 1}| = \sqrt{x^2 - 1} - \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$。

当$|x| < 1$，$|y| < 1$时，$\sqrt{1 - y^2}\,dy = \sqrt{1 - x^2}\,dx$，从而，$\arcsin y + y\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} + C$。

13 $y' + \sin\frac{1}{2}(x + y) = \sin\frac{1}{2}(x - y)$

【$y'=\sin\frac{1}{2}(x-y)-\sin\frac{1}{2}(x+y)=-2\sin\frac{1}{2}y\cos\frac{1}{2}x$. ∴ 当$\sin\frac{1}{2}y\neq 0$即$y\neq 2n\pi$（$n$为整数)时，$dy/2\sin\frac{1}{2}y=-\cos x dx$. 积分之，得$tg\frac{1}{4}y=Ce^{-2\sin(x/12)}$，当$y=2n\pi$时，直接验记结果：$y=2n\pi$也是方程的解。

14 $y'=\sqrt{(y^2-1)/(x^2-1)}$.

【显然，$y=\pm 1$是方程的解。

当$|y|<1$，$|x|<1$时，$dy/\sqrt{1-y^2}=dx/\sqrt{1-x^2}$，积分之得$\arcsin y=\arcsin x+C$；当$|y|>1$，$|x|>1$时 $dy/\sqrt{y^2-1}=dx/\sqrt{x^2-1}$，积分之得：$y+\sqrt{y^2-1}=C(x+\sqrt{x^2-1})$.

15 $y'=y/(2x)+(2y)tg(y^2/x)$.

【∵由原式，$y^2/x+tgy^2/x=2yy'=(y^2)'=[(y^2/x)x]'=(y^2/x)'x+y^2/x$ ∴令$u=y^2/x$ 得 $tgu=xdu/dx$. 从而 $x\sin(y^2/x)=C$.

16 $y'=\sin(x+y+1)$.

【令$u=x+y+1$，则$du/dx=1+dy/dx=1+\sin u$. 故当$1+\sin u\neq 0$时，$du/(1+\sin u)=dx$，积分后得$tg[\pi/4-(x+y+1)/2]=-x+C$. 当$1+\sin u=0$即$x+y+1=-\frac{1}{2}\pi+2k\pi$（$k$为整数）时$x+y+1=-\frac{1}{2}\pi+2k\pi$($k$为整数)也是方程的解。

17 $y'=\frac{1}{3}y^2+2/(3x^2)$

【令$u=xy$. 则$3xu'-3u=u^2+2$，即$du/[(u+1)(u+2)]=dx/3x$，从而，$(xy+1)/(xy+2)=Cx^{\frac{1}{3}}$即$y=(2Cx^{\frac{1}{3}}-1)/[(1-Cx^{\frac{1}{3}})]$. 前述过程假定$(xy+1)(xy+2)\neq 0$. 通过直接验证，除上述通解外，还有解：$y=-2/x$

18 $(x^6-2x^5+2x^4-y^3+4x^2y)dx+(xy^2-4x^3)dy=0$,

【令$y=ux$，则由原式得：$(x^6-2x^5+2x^4-u^3x^3+4x^3u)dx+(x^3u-4x^3)(udx+xdu)=0$，即$(x^2-2x+2)dx+(u^2-4)du=0$. 从而，积分后得：$\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+y^3/(3x^3)-4y/x$

$=C$。

19 $y'+1=(x+y)^m/[(x+y)^n+(x+y)^p]$

【令$u=x+y$。则原式成为 $(u^{n-m}+u^{p-m})du=dx$。因而，

$$x=\begin{cases}(x+y)^{n-m+1}/(n-m+1)+(x+y)^{p-m+1}/(p+m+1)+C \text{ 当}n\neq m-1,\ p\neq m-1\text{时}\\ \ln|x+y|+(x+y)^{p-m+1}/(p-m+1)+C \text{ 当}n=m-1,\ p\neq m-1\text{时}\\ (x+y)^{n-m+1}/(n-m+1)+\ln|x+y|+C \text{ 当 }n\neq m-1,\ p=m-1\text{时}\\ 2\ln|x+y|+C \text{ 当}n=m-1.\ p=m-1\text{时}\end{cases}$$

20 $y'=y^3/[2(xy^2-x^2]$

【令$u=y^2$得$du/dx=u^2/(xu-x^2)$。再令$u=xt$得 $dx/x=(t-1)/t\cdot dt$。从而$xt=Ce^t$ 即$y^2=Ce^{y^2/x}$

21 $(y^2/b+x^2/a)(yy'+x)+(a-b)/(b+a)(yy'-x)=0$

【令$u=x^2$，$v=y^2$，则$(v/b+u/a)(du+dv)+(dv-du)(a-b)/(a+b)=0$。

$(v/b+u/a-1)(du+dv)+dv\cdot 2a/(a+b)+du\cdot 2b/(a+b)=0$。

$(v/b+u/a-1)(du+dv)+2ab/(a+b)\cdot(dv/b+du/a)=0$

$(v/b+u/a-1)d(u+v)+2ab/(a+b)\cdot d(v/b+u/a-1)=0$

$d(v/b+u/a-1)/(v/b+u/a-1)=-(a+b)/(2ab)\cdot d(u+v)$

积分后代回原变量得：$\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{x^2}{a}-1=Ce^{-(a+b(x^2+y^2)/(2ab)}$

22 $\{y\sqrt{y^2-x^2}+(y^2-x^2)\sin a-2xy\cos a\}y'+x\sqrt{y^2+x^2}+2xy\sin a+(y^2-x^2)\cos a=0$

【令$x=r(t)\cos t$，$y=r(t)\sin t$，代入原式得：

$(r^2 sint - r^2 cos2t sin\alpha - r^2 sin2t cos\alpha)(r' sint + rcost) +$
$(r^2 cost + r^2 sin2t sin\alpha - r^2 cos2t cos\alpha)\ (r' cost - rsint) = 0$ 化简

得$\frac{dr}{r} = \frac{sin(t+\alpha)}{1-cos(t+\alpha}dt$，积分后代回原变量得：

$x cos\alpha - y sin\alpha - \sqrt{x^2+y^2} = C(x^2+y^2)$。

23 $y(1+xy)dx + (1-xy)xdy = 0$。

【显然，$x=0$和$y=0$ 是方程的两个特解，当$x \neq 0$，$y \neq 0$ 时，改写方程为 $ydx + xdy^3\ (ydx - xdy)\ /y^2 = 0$。令$u = xy$ $v = x/y$，并注意到$u^2/v = xy^3$得$dv/ = du/u^2 = 0$。

$\therefore v = Ce^{1/U}$。即$x = Cye^{1/xy}$

24 $y' + x = \sqrt{x^2+y}$。

【令$\sqrt{x^2+y} = xu$，于是$y = x^2(u^2-1)$，代入原式后分离变量得$2udu/[(1-u)\ (1+2u)] = dx/x$ 因此，方程的通解为

$$2(x^2+y) - x\sqrt{x^2+y} - x^2 = Cx^{4/3}.$$

25 $x^2(y'+y^2) = a(xy-1)$。

【令$u = xy$得$x \cdot du/dx = (1-u)(u-a)$。当$a \neq 1$时

$\frac{1}{1-a}\ (\frac{1}{1-u} + \frac{1}{u-a})\ du = \frac{dx}{x}$故此时解为$xy-a=Cx^{1-a}(1-xy)$；

当$a=1$时，解为$(xy-)ln(Cx) = 1$。

26 $x(y^2+x^2-a)y' - y(y^2+x^2+a) = 0$

【由原式，$x(y^2+x^2-a)dy - y(y^2+x^2+a)dx = 0$，$(x^2+y^2)(xdy - ydx) - a(xdy + ydx) = 0$；$(1 + x^2/y^2) \cdot$ $\cdot (xy)^2 d(y/x) - ad(xy) = 0$ $\therefore$ 令$u = y/x$，$v = xy$得$(1+u^{-2}) \cdot$ $\cdot du = av^{-2}dv$。因此通解为，$xy = C(y^2 - x^2 + a)$。

27 $(y-x)\sqrt{1+x^2}y' = (1+y^2)^{3/2}$

【令$u = arctgy$，$v = arctgx$。则方程变成$dv =$ $sin(u-v)du$。再令$z = u - v$得$sinzdz/(1-sinz) = dv$。因而

$-z+tg(\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}\pi)=\nu+C$。因此方程的通解为

$\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}+y-x=(1+xy)(arctgy+C)$

28　$(x^2y^2+1)ydx+(x^2y^2-1)xdy=0$

【由原式，$x^2y^2(ydx+xdy)+ydx-xdy=0$。令$u=xy$ $\nu=x/y$并注意到$u/\nu=y^2$　得$udu+d\nu/\nu=0$。积为后代回原变量得$x^2e^{x^2y^2}=Cy^2$。上述结果是在$xy\neq 0$的条件下。不难看出，$y=0$也是方程的解。

26　$xy'-x(y-x)\sqrt{y^2-x^2}-y=0$。

【不难看出，$y=x$和$y=-x$是方程的二个解。当$y\neq\pm x$时，方程可变形为$xy'-y\mp x(y-x)^2\sqrt{(y+x)/(y-x)}=0$（当$y-x>0$时，取"$-$"号；当$y-x<0$时取"$+$"号).令$u=\sqrt{(y+x)/(y-x)}$。并注意到$udu/dx=(y-xdy/dx)/(y-x)^2$得$\mp du=xdx$。因此，$\mp 2\sqrt{(y+x)/(y-x)}=x^2+C$。〔注意：此处表明$(y-x)(x^2+C)<0$〕

即　$y=x\frac{(x^2+C)^2+4}{(x^2+C)^2-4}$，$\frac{x(x^2+C)}{(x^2+C)^2-4}<0$.($\because$ $(y-x)(x^2+C)$

$=\frac{8x(x^2+C)}{(x^2+C)^2-4}$)。

30　$(y+y\sqrt{x^2y^4-1})dx+2xdy=0$。

【令$u=xy^2$得$du+(u/x)\sqrt{u^2-1}dx=0$.分离变量后积分，再代回原变量得$arccos(1/xy^2)+ln|x|=C_1$，或等价地写成$ln(Cx)=arcsin(1/xy^2)$，即$xy^2sinln(Cx)=1$。上述结果是在$xy\neq0$，$x^2y^4-1\neq0$的条件下得到的。直接验证$xy=0$和$x^2y^4=1$也是方程的解。

31　$(3x^2y^3-6xy^2+5y)dx+(2x^3y^2-3x^2y)dy=0$

【令$u=xy$得$(u^2-3u+5)dx+(2u-3)xdu=0$分离变量后积分，再代回原变量得$x(x^2y^2-3xy+5)=C$。又直接验证知

$y=0$ 也是方程的解

32 $dy-y\,tgx\,dx=|\sec x|dx$。

【令$y=n\sec x$。则原方程成为$dn/dx=\pm 1$（当$\sec x>0$时取“+”号，当$\sec x<0$时取“-”号）。从而$y=(C\pm x)\sec x$，即

$$y=\begin{cases}(C+x)\sec x, & \text{当}2k\pi-\frac{1}{2}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{2}\pi\text{时,}\\(C-x)\sec x, & \text{当}(2k+1)\pi-\frac{1}{2}\pi<x<(2k+1)\pi+\frac{1}{2}\pi\text{时。}\end{cases}$$

其中k为整数。

33 $(xy+y+\sin y)dx+(x+\cos y)dy=0$。

【令$u=xy+\sin y$ 则原方程成为$udx+du=0$。故原方程的通解为：$xy+\sin y=Ce^{-x}$。

34 $(x^2-y^2-2y)dx+(x^2+2x-y^2)dy=0$。

【令$u=x+y$，$v=x/y$得$(v^2-1)du-2dv=0$。因此，方程的解为：$x-y=C(x+y)e^{x+y}$和$x+y=0$。

求下列方程满足指定条件的积分：

35 $2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$；$x=0$时$y=1$。

【令$t=x^2$得$d(e^t y-t)=0$ ∴方程的通积分为$e^{x^2}y-x^2=C$。∵$x=0$时$y=1$ ∴$C=1$，故满足条件的特积分为$e^{x^2}y=x^2+1$

36 $x^2y'\cos y+1=0$；当$x\to+\infty$时，$y\to 5\frac{1}{3}\pi$

【分离变量后积分得通积为$\sin y-1/x=C$。由条件得$C=-\sqrt{3}/2$。因此，$\sin y=1/x-\sqrt{3}/2$。于是，$y=\arcsin(1/x-\sqrt{3}/2)+2k\pi$或者$y=\pi-\arcsin(1/x-\sqrt{3}/2)+2k\pi$。其中$k$为整数。因为前者对任何整数$k$均不满足条件，故应舍去；而后者中只有$k=2$才满足条件，故满足条件的积分是

$$y = \arcsin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - 1/x) + 5\pi$$

37 $(1+x^2)y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0$；当$x\to -\infty$时，$y\to 3\frac{1}{2}\pi$。

【通常为$tg\,2y = arctgx + C$即$2y = k\pi + arctg\ (arctgx + C)$，其中$k$为整数。由条件应有$(7-k)\pi = arctg(-\frac{1}{2}\pi + C)$。故$k = 7$，从而$C = \frac{1}{2}\pi$∴满足条件的特积分为

$$y = 3\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}arctg(aictgx + \tfrac{1}{2}\pi)。$$

38 $e^y = e^{4y} + 1$，当$x\to +\infty$时y有界。

【当$e^y - 1 \neq 0$时，$dx = e^{4y}/(e^y - 1)dy$从而

$x = \frac{1}{3}e^{3y} - \frac{1}{2}e^{2y} + e^y + ln|e^y - 1| + C$。

∵对任何取定的常数C。当$x\to +\infty$时，由此积分确定的y不可能有界。∴上述解中无满足条件的特解。

显然$e^y - 1 = 0$即$y = 0$也是方程的解且满足条件，因此，$y = 0$即为所求之积为。

39 求出方程$dy/dx = \sqrt{|y|}$于$-\infty < x < +\infty$上有定义且满足初值条件$y(0) = 0$的全部解。

【当$y > 0$时，$dy/dx = \sqrt{y}$，其通解是$x = 2\sqrt{y} + C$。

∵$y(0) = 0$，∴$C = 0$。从而$x = 2\sqrt{y}$即$y = \frac{1}{4}x^2 (x \geqslant 0)$；

当$y < 0$时，$dy/dx = \sqrt{-y}$，其通解是$x = -2\sqrt{-y} + C$，

∴$y(0) = 0$∴$C = 0$，从而$x = -2\sqrt{-y}$即$y = -\frac{1}{4}x^2$。$(x<0)$。

又显然$y = 0$也方程的满足条件的解。

因此，合题意的解为：

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geqslant 0 \\ -\frac{1}{4}x^2, & x < 0 \end{cases} \quad 和y = 0$$

解下列各微分方程：

40 $(y^2 + y^2 + 3)y' = 2x(2y - x^2/y)$。

【令$u = x^2$，$v = y^2$得，$(u + v + 3)dv = 2(2v - u)du$。再令

$u=r-2$，$v=s-1$得，$(r+s)ds=2(2s-r)dr$。此系齐次方程，令$s=zr$得，$(1+z)(zdr+rdz)=2(2z-1)dr$，即$(1+z)rdz=(z-2)(1-z)dr$。当$(z-2)(z-1)\neq 0$时，分离变量后积分，再代回原变量得$(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)$。当$(z-2)(z-1)=0$时，不难验证，$y^2-x^2-1=0$。也是方程的解。

41 $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$。

【先令$x=z^2$，再令$y=zu$得：$u(u^4-1)dz+(u^4-3)zdu=0$ 分离变量后积分并代回原变量得：$y^4-x^2=Cy^6$。此外，$y=0$也是方程的解。

42 $(3x+5y+6)y'=7y+x+2$。

【先令$x=z-2$，再令$z=uy$得$(1-u)(u+5)dy=(7+u)\cdot\cdot ydu$，当$(1-u)(u+5\neq 0$时，分离变量后积分得：$(y-x-2)^4=C(x+5y+2)$，当$(1-u)(n+5=0$时，通过直接验证，除上述解外，还有解$y=-\frac{1}{5}(x+2)$。

43 $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$。

【令$u=y+\sqrt{y^2-x^2}$。于是有$y=\frac{1}{2}(u+x^2/u)$。将它们代入原方程并化简整理得：$(1-x^2/u)(xdu/dx-2u)=0$。由$1-x^2/u^2=0$得$y=\pm x$。直接验证知，$y=\pm x$是方程的解；由$x.du/dx-2u=0$得解$y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^2$。

44 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

【令$y=x\sin u$，$-\frac{1}{2}\pi\leqslant u\leqslant\frac{1}{2}\pi$得$|x|\cos u(|x|du/dx-1)=0$。显然，$x=0$不是方程的解；由$\cos u=0$得$y=\pm x$。容易验证。它是方程的介；由$|x|du/dx-1=0$得解$y=|x|\sin(C+ln|x|$。)

45 $4y^6+x^3=6xy^5y'$。

【令$u=y^2$得$3xu^2du/dx=4u^3+x^3$。再令$u=xv$。得$3v^2x\cdot\cdot dv/dx=1+v^3$。分离变量后积分并代回原变量（顾及$1+v^3$

$=0$ 的情况）得：$y^6+x^8=Cx^4$。

46　$(x^6-y^4)dy=3x^5ydx$。

【显然 $y=0$ 是方程的解。当 $y\neq0$ 时，原方程等价于 $2(x^6-y^4)ydy=6x^5y^2dx$。令 $u=x^3$，$v=y^2$ 得 $(u^2-v^2)dv=2uvdu$。再令 $u=sv$ 得 $(s^2+1)dv=-2svds$，解得：$y^2=C(x^6+y^4)$，$C\neq0$。

综上所述，方程的通解为：$y^2=C(x^6+y^4)$。其中 C 为任意常数。

47　$xy'\ln x-(1+\ln x)y+\frac{1}{2}\sqrt{x}(2+\ln x)=0$。

【原方程等价于 $y'-\frac{1+\ln x}{x\ln x}y=-\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x\ln x}$

$$\therefore y=e^{\int\frac{1+\ln x}{x\ln x}}\left(-\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x\ln x}e^{-\int\frac{1+\ln x}{x\ln x}}dx+C\right)$$

$$=x\ln x\left(-\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2x}dx+C\right).$$ 利用分部积分法，

$$\int\frac{2\sqrt{x}}{2x^2\ln^2x}dx=-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}-\int\frac{1}{2x^{3/2}\ln x}dx$$ 即，

$$\int\frac{\sqrt{x}(2+\ln x)}{2x^2\ln^2x}dx=-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}.$$ 故 $y=\sqrt{x}+Cx\ln x$。

48 $(xy^5-x^2y^2)dy+(x^2-y^6)dx=0$。

【由原方程得 $(y^3-x)\{xy^2dy-(x+y^3dx\}=0$。

$\therefore y^3=x$ 或 $xy^2dy-(x+y^3)dx=0$。显然 $x=0$ 是后者之解，从而也是原方程之解。当 $x\neq0$ 时，令 $u=y^3$，则后者等价于 $du/dx-3u/x=3$。因而 $y^3=u=-1\frac{1}{2}x+Cx^3$。

49　$y'+\sin y+x\cos y+x=0$。

【显然 $y=(2k+1)\pi$，k 为整数，是方程的解。当 $y\neq(2k+1)\pi$ 时，令 $u=\text{tg}\frac{1}{2}y$ 得：，$du/dx+u=-x$，从而 $\text{tg}\frac{1}{2}y=1-x+$

Ce^{-x}.

50 $xy' - y = x/\ln|x|$.

【$y' - y/x = 1/\ln|x|$，$\therefore y = x\left(\int \frac{dx}{x\ln|x|} + C\right)$.

$\because$若记$t = |x|$则$dt/t = dx/x$. $\therefore y = x\ln|\ln|x|| + C$.

51 $x(x^2-1)y' - (2x^2-1)y + ax^3 = 0$.

【$\because x = 0$和$x = \pm 1$均不是方程的解，$\therefore$原方程等价于

$y' - \frac{2x^2-1}{x(x^2-1)}y = -\frac{ax^3}{x(x^2-1)}$于是,

$$y = x|x^2-1|^{\frac{1}{2}}\left(\int \frac{ax^2dx}{(1-x^2)|x^2-1|^{1/2}} + C\right)$$

$$= \begin{cases} x(a + C\sqrt{1-x^2}), & \text{当}|x| < 1\text{时} \\ x(a + C\sqrt{x^2-1}), & \text{当}|x| > 1\text{时} \end{cases}$$

又由原方程，当$x = 1$时$y = a$；当$x = -1$时$y = -a$，故综合上述，方程的解为$y = x(a + C\sqrt{|x^2-1|})$。

52 $y' + x\sin 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$.

【显然，$y = (k + \frac{1}{2})\pi$（k为整数）是方程的解。当$y \neq (k + \frac{1}{2})\pi$时，令$u = \operatorname{tg} y$得$du/dx + 2xu = xe^{-x^2}$. 从而，$\operatorname{tg} y = u = e^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2 + C)$.

53 $y' - ay/x = (x+1)/x$，a为常数.

【$y = |x|^a\left(\int \frac{x+1}{x|x|^a}dx + C\right)$

$$\therefore \text{当}x > 0\text{时}y = \begin{cases} x + \ln x + C. & a = 0 \\ x\ln x - 1 + Cx. & a = 1 \\ x/(1-a) - 1/a + Cx^a & a \neq 0, 1. \end{cases}$$

$$\text{当}x<0\text{时}y=\begin{cases} x+ln(-x)+C, & a=0 \\ xln(-x)-1+C(-x), & a=1 \\ x/(1-a)-1/a+C(-x)^a & a\neq 0,\ 1. \end{cases}$$

故综合上述，方程的解为

$$y=\begin{cases} x+ln|x|+C & a=0 \\ x+ln|x|-1+C|x| & a=1 \\ x/(1-a)-1/a+|x|^a & a\neq 0,\ 1 \end{cases}$$

54 $\sqrt{1+x^2}y'sin2y=2xsin^2y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$

【令$u=siny$ 得$\frac{du}{dx}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}e^{2\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore$ $sin^2y=u=e^{2\sqrt{1+x^2}}[C+ln(x+\sqrt{1+x^2})]$。

55 $xy'-y=\frac{xcosln|ln|x||}{ln|x|}$

【原方程等价于$y'-\frac{y}{x}=\frac{cosln|ln|x||}{ln|x|}$ 对$x>1,0<x<1$，$-1<x<0$和$x<-1$ 四种情况分别讨论，均有$dln|ln|x||=\frac{dx}{xln|x|}$因此，$y=|x|\left(\int\frac{cosln|ln|x||}{|xln|x|}dx+C_1\right)$

$=x\left(\int\frac{cosln|ln|x||}{xln|x|}dx+C\right)=x\left(\int cosln|ln|x||dln|ln|x||+C\right)$。$=x(sin|ln|x||$

56 $(x^2y^2-1)y'+2xy^3=0$

【显然$y=0$是方程的解。当$y\neq 0$时令$u(y)=x^2$。得$du/dy+u/y=1/y^3$。因而$x^2=u=1/y(-1/y+C)$。$C\neq 0$。故综上所述，方程的解为$y=C(1+x^2y^2)$。

57 $3(y^2-x^2)y'+2y^3-6x(x+1)y-3e^x=0$。

【由原式，$3y^2y'-3(x^2y'+2xy)+2(y^3-3x^2y)=3e^x$。即$d(y^3-3x^2y)/dx+2(y^3-3x^2y)=3e^x$。∴令$u=y^3-3x^2y$得$du/dx+2u=3e^x$.从而$y^3-3x^2y=u=e^{-2x}(e^{3x}+C)$ 即 $(y^3-3x^2y^2)e^{2x}=e^{3x}+C$。

58 $(x+y)(1-xy)dx+(x+2y)dy=0$。

【由原式$xdx-xy(x+y)dx+ydx+xdy+2ydy=0$ 即$xdx-x(xy+y^2)dx+d(xy+y^2)=0$。∴令$u=y(x+y)$ 得 $du/dx-xu=-x$。因而$(x+y)y=u=1+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

59 $y'=y/(2y\ln y+y-x)$。

【视x为y的函数，并改写方程成$dx/dy+x/y=1+2\ln y$。∴方程的通解为$x=y\ln y+Cy^{-1}$。

60 $(2x+1)y'-4e^{-y}+2=0$。

【令$u=e^y$得$du/dx+2/(2x+1)\cdot u=4/(2x+1)$。因而，$e^y=u=(4x+C)/(2x+1)$。

61 $y'=/(x+y^3)$。

【显然，$y=0$是方程的解。当$y\neq0$时视x为y的函数并改写方程成$dx/dy-x/y=y^2$，于是$x=y(\frac{1}{2}y^2+C)$。

62 设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解y_1，y_2。若线性组合$\alpha y_1+\beta y_2$也是方程的解，求α与β之间的关系。

【∵y_1，y_2，$\alpha y_1+\beta y_2$均是方程$y'+P(x)y=Q(x)$的解，∴$y_1'+P(x)$，$y_2'+P(x)y_2\equiv Q(x)$，$y_2'+P(x)y_2\equiv Q(x)$，

$$(\alpha y_1'+\beta y_2)'+P(x)(\alpha y_1+\beta y_2)\equiv Q(x)。$$

又∵$(\alpha y_1+\beta y_2)'+P(x)(\alpha y_1+\beta y_2)\equiv(\alpha+\beta)Q(x)$。

∴$(\alpha+\beta)Q(x)\equiv Q(x)$。又∵已知$y'+P(x)y=Q(x)$是非齐次