普通高等教育“十五”国家级规划教材

高等数学

第五版 上册

同济大学应用数学系 主编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/同济大学应用数学系主编．—5 版．
北京:高等教育出版社,2002 (2003 重印)
高等院校本科生教材
ISBN 7-04-010820-8

Ⅰ.高...　Ⅱ.同...　Ⅲ.高等数学-高等学校-
教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 007081 号

责任编辑　张忠月　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　郝　林
版式设计　马静如　**责任校对**　康晓燕　**责任印制**　韩　刚

高等数学　第五版　上册
同济大学应用数学系　主编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
排　　版	高等教育出版社照排中心
印　　刷	高等教育出版社印刷厂

开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	1978 年 3 月第 1 版
印　　张	25		2002 年 7 月第 5 版
字　　数	460 000	**印　　次**	2003 年 8 月第 7 次印刷
		定　　价	26.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

第一版前言

本书分上、下两册.上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数,下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论.各章配有习题,书末附有习题答案.

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书.

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驺,上海交通大学王嘉善,上海纺织工学院巫锡禾,上海科技大学蔡天亮,上海机械学院王敦珊、周继高,上海铁道学院李鸿祥等同志.

本书由上海海运学院陆子芬教授主审.参加审稿的还有大连工学院刘锡琛,合肥工业大学万迪生、何继文,成都电讯工程学院冯潮清,西北工业大学王德如,浙江大学盛骤、孙玉麟,太原工学院徐永源、张宝玉,上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志.

审稿同志都认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢.

限于编者水平,同时编写时间也比较仓促,因而教材中一定存在不妥之处,希望广大读者提出批评和指正.

编者

一九七八年三月

第四版前言

关于本书的修订问题，全国高校工科数学课程教学指导委员会曾于1992年5月的工作会议上进行了讨论，与会代表们希望本书修改后能更加适应大多数院校的需要，这也正是我们的愿望．因此，我们在修订时，对不标*号的部分，注意控制其深广度，以期使它尽量符合高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》；同时仍保留标*号的内容，这些内容都是超出《基本要求》的，可供对数学要求稍高的专业采用．

兄弟院校的同行，对本书此次修订也提出了不少具体意见，修订时我们都作了认真考虑．在此，我们对课委会及同行们表示衷心的谢意．齐植兰、赵中时、谢树艺三位教授审阅了本书第四版稿，并提出不少宝贵意见，对此我们表示感谢．

本版在每章末增加了总习题，希望这些总习题在检查学习效果以及复习方面能发挥作用．

本书中用到二、三阶行列式的一些知识，部分读者由于阅读本书前尚未学过这方面的内容，因而产生学习上的困难．为此，本版上册增加了一个附录，用尽可能少的篇幅介绍有关二、三阶行列式的一些简单知识．

本书从第二版起的修订工作均由同济大学承担．第二版修订工作的正文部分由王福楹、邱伯驺完成，习题部分由宣耀焕、郭镜明、黄忠湛、王章炎完成．参加第三版修订工作的有王福楹、邱伯驺、骆承钦、王章炎．参加第四版修订工作的有王福楹、邱伯驺、骆承钦．

编者

一九九三年十二月

第五版前言

本书第五版是在第四版的基础上，根据我们多年的教学改革实践，按照新形势下教材改革的精神，进行全面修订而成的.在修订中，我们保留了原教材的系统和风格，及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革举措，使得新版能更适合当前教学的需要，成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材.

新版为更好地与中学数学教学相衔接，上册从一般的集合、映射引入函数概念，精简了基本初等函数的基础内容；为有利于培养学生的能力和数学素养，渗透了一些现代数学的思想、语言和方法，适当引用了一些数学记号和逻辑符号，文字作了适当简化；为适应高等数学课程教学时数减少的情况，在保证《高等数学课程教学基本要求》的前提下，对一些内容作了适当精简和合并；在应用方面，增加了一些微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题.对第四版中存在的个别问题，这次也作了修订.修改较多的部分涉及函数、极限及向量代数等内容.

这次修订中，我系的广大教师提出了许多宝贵的意见和建议，特别是郭镜明教授提供了不少好的建议，我们在此表示诚挚的谢意.

本版修订工作由邱伯驺、骆承钦完成.新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者批评指正.

编者

二〇〇一年十月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

内容提要

本书是根据编者多年的教学实践，按照新形势下教材改革的精神，并结合《高等数学课程教学基本要求》在第四版的基础上修订而成的.这次修订更好地与中学数学教学相衔接，适当引用了一些数学记号和逻辑符号，增加了应用性例题和习题，对一些内容作了适当的精简和合并.修改较多的部分涉及函数、极限及向量代数等内容.

本书分上、下两册出版.上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数等七章，书末还附有二、三阶行列式简介、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示.

本书仍保持了第四版结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点，又在保证教学基本要求的前提下，扩大了适应面，增强了伸缩性，供高等院校工科类专业的学生使用.

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897　(010)82086060

传真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法．本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

第一节　映射与函数

一、集合

1．集合概念

集合是数学中的一个基本概念，我们先通过例子来说明这个概念．例如，一个书柜中的书构成一个集合，一间教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等．一般地，所谓集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素（简称元）．

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$．一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集．

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示．例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，就可表示成

$$B=\{x\mid x^2-1=0\}.$$

对于数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上“$*$”来表示该数集内排除 0 的集，标上“$+$”来表示该数集内排除 0 与负数的集．

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体正整数的集合为

$$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$,即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^{+}\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\};$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^{*}$ 为排除数 0 的实数集,$\mathbf{R}^{+}$ 为全体正实数的集.

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$. 例如,设

$$A=\{1,2\},\qquad B=\{x\mid x^{2}-3x+2=0\},$$

则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$. 例如,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x^{2}+1=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^{2}+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作 $\varnothing$,且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种:并、交、差.

设 A、B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

有时,我们研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时,我们称集合 I 为全集或基本集,称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集,记作 A^{C}. 例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$ 的余集就是

$$A^{C}=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足下列法则.

设 A、B、C 为任意三个集合,则有下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证.现就对偶律的第一个等式:"两个集合的并集的余集等于它们的余集的交集"证明如下:因为

$x\in(A\cup B)^C\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\in A^C$ 且 $x\in B^C$ $\Rightarrow x\in A^C\cap B^C$,

所以　$(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C$;

反之,因为

$x\in A^C\cap B^C\Rightarrow x\in A^C$ 且 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B$ $\Rightarrow x\in(A\cup B)^C$,

所以　$A^C\cap B^C\subset(A\cup B)^C$.

于是　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

注　以上证明中,符号"$\Rightarrow$"表示"推出"(或"蕴含").如果在证明的第一段中,将符号"$\Rightarrow$"改用符号"$\Leftrightarrow$"(表示"等价"),则证明的第二段可省略.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积.设 A、B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新的元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$.数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$.

类似地可说明：

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别如图 1-1(a) 与 (b) 所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c)、(d) 所示.

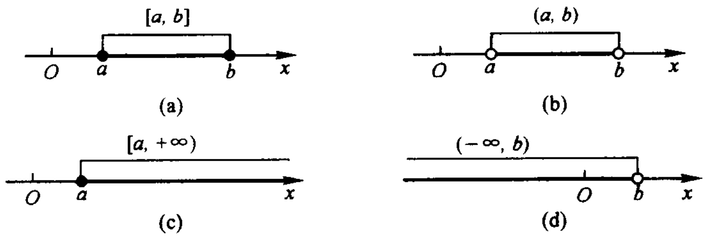

图 1-1

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径（图 1-2）.

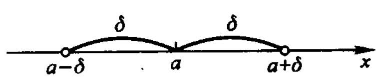

图 1-2

由于 $a-\delta < x < a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域，这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

二、映射

1. 映射概念

定义　设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

从上述映射的定义中，需要注意的是：

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

例 1　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y \mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除

$y=0$ 外,它的原像不是唯一的.如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个.

例 2 设 $X=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$, $Y=\{(x,0)\mid |x|\leqslant 1\}$, $f:X\to Y$,对每个$(x,y)\in X$,有唯一确定的$(x,0)\in Y$与之对应.显然 f 是一个映射,f 的定义域 $D_f=X$,值域 $R_f=Y$.在几何上,这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间$[-1,1]$上.

例 3 设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$,对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\sin x$.这 f 是一个映射,其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,值域 $R_f=[-1,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为X到Y上的映射或满射;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的单射;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为一一映射(或双射).

上面例 1 中的映射,既非单射,又非满射;例 2 中的映射不是单射,是满射;例 3 中的映射,既是单射,又是满射,因此是一一映射.

映射又称为算子.根据集合 X、Y 的不同情形,在不同的数学分支中,映射又有不同的惯用名称.例如,从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函,从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换,从实数集(或其子集)X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射,则由定义,对每个 $y\in R_f$,有唯一的 $x\in X$,适合 $f(x)=y$.于是,我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$,规定 $g(y)=x$,这 x 满足 $f(x)=y$.这个映射 g 称为 f 的逆映射,记作 f^{-1},其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义,只有单射才存在逆映射.所以,在例 1,2,3 中,只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1},这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值:

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\ x\in[-1,1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$,值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\qquad f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$.则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则,它将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$.显然,这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射,这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射,记作 $f\circ g$,即

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com