高等师范院校数学系列教材

数学建模

（上册）

白凤山　么焕民　李春玲　沈继红　施久玉　编著

哈尔滨工业大学出版社

高等师范院校数学系列教材

数学建模

（上册）

白凤山　么焕民　李春玲　沈继红　施久玉　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 提 要

本书是高等师范院校数学系列教材之一《数学建模》的上册，内容包括：绪论；初等数学模型；图解法与最小二乘法建模；量纲分析法建模；微积分方法建模与微分方程模型；统计与实验设计模型；灰色系统理论与应用模型；Matlab 6.1 软件与计算机数学建模法。每章后均配有一定数量的习题。

本书内容新颖、系统，选材深浅适度，文字通俗易懂，便于自学。本书可作为高等师范院校及成人教育本、专科学生的教材，也可供其他相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模.上册/白凤山等编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.4

ISBN 7-5603-1852-5

Ⅰ.数… Ⅱ.白… Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025336 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451-6414749
印　　刷	黑龙江地矿部测绘印制中心
开　　本	850×1 168　1/32　印张 9　字数 233 千字
版　　次	2003 年 4 月第 1 版　2003 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1852-5/O·145
印　　数	1～4 000
总 定 价	30.00 元

序

随着科学技术的发展，数学的应用范围日益广泛，不但在自然科学的各个分支中应用，而且在社会科学的很多分支中也有应用。毋庸置疑，数学自身的发展水平深刻地影响着人们的思维方式。

众所周知，数学创新、数学应用、数学传播是数学教学工作者的三大基本任务，为了适应现代教育发展的需要，我国高等师范院校的数学教育专业改为数学与应用数学专业(师范类)，由此导致课程设置必将发生根本的变化。如何开设应用数学课，如何应用计算机进行数学教学，如何改革数学教育的传统课程，都是有待进一步探讨的问题；相应的数学教材，更有待改革和完善。为此，黑龙江省高等师范院校数学教育研究会，组织哈尔滨师范大学、齐齐哈尔大学理学院、牡丹江师范学院、佳木斯大学理学院四所本科师范院校的数学教育工作者，在多年教学实践基础上，集中对应用数学、计算机数学及数学教育等课程进行研讨，编写了“高等师范院校数学系列教材”，以适应高等师范教育发展的需要。

这套教材主要包括：形成体系的教材，如《数学建模（上、下册）》、《数学实验（上、下册）》、《离散数学》；具有师范特色的教材，如《中学数学教学论》、《中学数学方法论》、《中学数学解题方法》；融入教师教学体会和教学成果的专著性的教材，如《教学过程动力学》。这套教材，力求在保持师范特色的同时，突出应用数学和计算机数学，以期成为高等师范院校本科数学教育专业一套实用的教材，这是我们的主要目的。

我们清楚地知道，我们追求的目标不易达到，不过，通过我们的努力，引起共鸣，经过同仁的一起努力，目标总会到得早些。

黑龙江省高等师范院校
数学教育研究会理事长

王玉文
2002 年 3 月

前 言

近几年来,随着数学模型课程在大专院校教学中的不断普及,有不少优秀的数学模型教材问世,但这些教材大多是针对理工科学生编写的,对于高等师范院校的学生来讲,其中许多内容的专业性过强,学习和掌握起来比较困难,因此迫切需要有一本更适合于高等师范院校本科学生使用的数学建模教材。为此,受黑龙江省高等师范院校数学教育研究会的委托,我们几位多年从事数学模型教学工作的教师,总结多年的教学经验,在原有讲稿的基础上编写了这本《数学建模》教材。

本书上册是黑龙江省新世纪高等教育改革工程项目(B0310)研究成果,是作者在多年教学、科研及多次参加国内外大学生数学建模竞赛的基础上总结出来的数学建模的具体方法和步骤——八步建模法,称为数学建模通法(有助于发挥数学建模的灵活性),在教学过程中有助于开发学生智力、培养数学素质。本书在介绍数学建模方法的过程中紧密结合计算机建模和应用问题求解,既有助于解决过去数学教学中的应用问题求解的难题,又与现代教育技术接轨,非常便于教学。

上册内容包括:绪论;初等数学模型;图解法与最小二乘法建模;量纲分析法建模;微积分方法建模与微分方程模型;统计与试验设计模型;灰色系统理论与应用模型;Matlab 6.1 软件与计算机数学建模法。

本书第一章、第二章、第三章3.1、3.2、3.3、第四章、第五章、第六章6.2由白凤山编著,第三章3.4由么焕民编著,第六章6.1、6.3、6.4、6.5由施久玉、李春玲编著,第七章由沈继红、李春玲编著,第八章由白凤山、李春玲编著。全书由白凤山统编定稿。

作者特别感谢哈尔滨师范大学数学与计算机科学学院院长王玉文教授及佳木斯大学理学院院长陈永祺教授在本书编写过程中给予的热情帮助与支持。

由于作者水平有限,书中疏漏或不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

作　者

2003年1月

目　录

第一章 绪 论

- 实践、数学与数学模型
- 八步建模法
- 数学模型的分类
- 数学建模能力的培养

1.1 实践、数学与数学模型

“一门科学只有在成功地运用数学时，才算是达到了真正完善的地步”，这是马克思给我们留下的一条真理。

大千世界，浩瀚宇宙，绚丽多彩，变化万千；自然现象，社会现象，无穷无尽，无时无刻都在按照各自的规律、模式，运动、发展、变化。从古至今，人类在不断实践、探索、研究、揭示现实，形成了诸多理论学科。一切理论来源于实践，受实践的检验，在实践中得到发展和完善，数学也不例外，而各门学科的完善都将依赖于对数学成功的应用。

人们研究各种现象的一种重要方法是分门别类，这就形成了各门科学。还有一种重要的研究方法是为了某种目的建立研究对象的模型，即模型法。各门科学要成功地运用数学，首先应建立那门科学研究对象的数学模型，数学模型是各门科学运用数学的桥梁。要想弄清什么是数学模型，必须弄清什么是模型；要想知道什么是模型，必须先知道到什么是原型。

原型是客观存在的各种研究对象，既包括有形的对象，也包括

无形的、思维中的对象,还包括各种系统和过程等。为了更好地研究原型,可将原型加以分解,分成很多部分和层次。模型是为了某个特定的目的而构造的整个原型或其部分或其某一层面的替代物。模型可作如下的分类:

- 模型
  - 形象模型
    - 直观模型——实物模型
    - 物理模型——利用物理学的相似原理构造的模型
  - 抽象模型
    - 思维模型——人思维中的经验模型
    - 符号模型——利用特定的符号连接得到的模型
    - 数学模型——现实对象的数学表现形式

数学模型是既古老而又年轻的学科。说它古老,是由于在数学发展的初期就涉及到数学模型的问题,那时人们就对数学模型有了研究。但是,一直没有将数学模型作为一门学科加以系统地研究,建模理论和方法还很贫乏。直到20世纪七八十年代,由于计算机的迅速发展、普及和对数学模型强烈的需求,国际数学界才把数学模型作为一门数学学科来研究。今天,数学模型已经成为各门科学(包括人文、社会科学)不可缺少的工具。

目前,还没有一个人们公认的数学模型定义,有人定义数学模型是对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定的目的,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构。这里所说的数学结构,是指一段程序、图形、表格、各种数学表达式等。这种描述性的定义既说清了数学模型的本质,又给出了具体的建模步骤,有很好的实用性。但作为定义还欠精练。这里我们将数学模型定义为现实对象的数学表现形式。

数学建模是指建立研究对象的数学模型的全过程。

【例】 双层玻璃能阻止多少热量损失?

冬天,北方室外温度低,室内温度高,为了节约能源,防止室内温度向室外的流失,常将单层玻璃窗改为双层玻璃窗。当建筑物室内外的热传递处于一个热力学平衡状态时,双层玻璃窗究竟能

比单层玻璃窗阻止多少热量损失？两层玻璃之间的距离多少为好？我们可通过下述数学模型给予定量的描述。

下面给出建立这个对象的数学模型的具体步骤。

一、问题的提出

众所周知，为了保温，玻璃窗要做成双层玻璃。那么，双层玻璃是怎么保温的？保温效果怎样？两层玻璃之间的距离多少为好？此问题是双层玻璃窗这一研究对象在保温层面上的表现，如果不建立数学模型，就无法定量地说清楚。这个问题的已知条件是室内温度高于室外温度，室内外有温度差；窗子的玻璃是双层的，热传导处于平衡状态。其结论是保温效果和两层玻璃之间应取的距离，其目的是通过建立其数学模型得出这些结论。

二、量的分析

为了解决这个问题，首先应想到这是一个属于哪个领域里的问题？应涉及哪些数学知识和相关领域里的知识？此属于传热学的问题，涉及到传热学的理论。通过回忆传热学知识或查找传热学的资料容易知道，热量由高温传向低温，即热量由室内传向室外。为了比较单、双层玻璃的保温效果，可只考虑室内、外温度衡定的情况。这时，热量流经空间的每一点处的温度都是衡定的，热量的流动呈稳定状态，即稳流。这也使我们很容易联想到热量从室内流向室外就像水在管子里流一样不会产生堆积。再由所查找的传热学公式可知，此问题用初等数学知识即可解决。这为我们进行下面的思考乃至于整个数学模型的建立都是必要的基础性工作。在此基础上考虑我们的研究对象所涉及的量。通过分析，可知所涉及的量有温度 T 、热量 Q 、介质(包括玻璃、空气) 的材质、密度 δ、厚度 d、面积 S、玻璃的导热系数 k_1、空气的导热系数 k_2、热容 C、时间 t、外部的风向、风速 v 等常量或变量。根据建模目的和所用的传热学的理论知识可从这些量中区分出哪些是主要量，哪

些是次要量。舍去次要量,留下主要量,使问题得到简化,再去建立数学模型。这里的主要量是:温度、材质的厚度、导热系数和热量,其他量都是次要量,舍去。我们的目的是将流失的热量 Q 写成其他变量的函数或表达式。又由于只要考虑单、双层玻璃之间的比较,所以可只考虑单位时间流经单位面积玻璃上的热量,即

$$Q = f(T, d, k_1, k_2)$$

根据热传导的公式,可初步给出上述主要变量之间的关系,即单位时间内由温度高的一侧向温度低的一侧通过介质单位面积的热量与介质两侧的温度差成正比,与介质的厚度成反比,比例系数为该介质的热传导系数。其表达式为

$$Q = k\frac{\Delta T}{d} \tag{1.1}$$

为了更好地分析这些变量之间的关系,我们将借助于图形加以分析,如图 1.1 所示。设室内温度为 T_1,室外温度为 T_2。

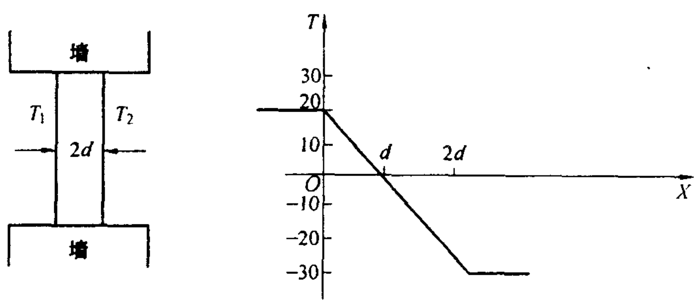

图 1.1 室内温度为 20℃、室外温度为 - 30℃ 时单层玻璃的温度分布图

三、模型假设

为了简化建模问题,以适应所用的数学工具,现给出建模的已知条件和前提。

假设 1 设双层玻璃窗的玻璃厚度为 d,单层玻璃窗的玻璃厚度为 $2d$,玻璃材料是均匀的,如图 1.2 所示。双层玻璃之间的空

气是干燥的，厚度和密度是均匀的，玻璃和空气的导热系数是常数，分别为 k_1 和 k_2。

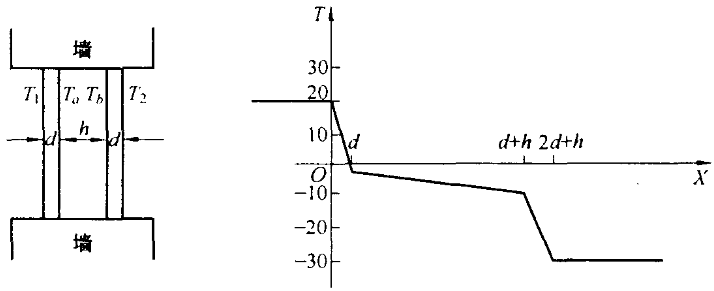

图 1.2 室内温度为 20℃、室外温度为 - 30℃ 时双层玻璃的温度分布图

假设 2 玻璃窗的密封性是很好的，两层玻璃之间的空气是不流动的。热量的传播过程只有传导，不考虑对流和辐射。

假设 3 设室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持衡定，热传导过程已处于稳定状态。即沿热传导方向、单位时间通过单位面积的热量是常数。

四、模型建立

在以上三步的基础上就可进行模型的建立了。通过图 1.1 和图 1.2 的启发，再结合热传导的相关理论，我们很自然地联想到室内热量流向室外的过程就像河中的水从地势较高处流向较低处一样，单位时间流经各处横截面积的水量都是相同的，即在各点处都不会有堆积现象。水在流动过程中，降低了高度，释放了能量。热量在通过玻璃窗流失中室内降低了温度，释放了热量。

通过以上的分析，结合公式(1.1)，对于双层玻璃窗，易得单位时间内流经各处单位横截面积的热量为

$$Q = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{h} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d} \tag{1.2}$$

其中 T_a 为内层玻璃的外侧温度；T_b 为外层玻璃的内侧温度。

这就是双层玻璃窗热量流失的数学模型。

解上面的方程组,可得

$$Q = \frac{k_1(T_1 - T_3)}{d(s+2)} \tag{1.3}$$

其中

$$s = \lambda \frac{k_1}{k_2} \qquad \lambda = \frac{h}{d}$$

对于厚度为 $2d$ 的同样材质的单层玻璃窗,同样可得到热量流失的数学模型

$$Q' = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d} \tag{1.4}$$

因此,得到单位时间、单位面积双层玻璃窗比单层玻璃窗减少热量流失的量为

$$\Delta(s) = 1 - \frac{Q}{Q'} = \frac{s}{s+2} \tag{1.5}$$

这就是双层玻璃窗比单层玻璃窗减少热量流失的数学模型。

五、模型求解

玻璃在室温下的导热系数为($(4 \sim 8) \times 10^{-4}$W/(cm · ℃),干燥空气在室温下的导热系数为(2.5×10^{-5}W/(cm · ℃)。由此可见,k_1/k_2 在 16 ~ 32 之间,这里我们取其最小值 $k_1/k_2 = 16$。

我们定义 $\lambda = h/d$ 为双层玻璃之间空气的厚度 h 与玻璃厚度 d 之比, 则由式(1.5)有

$$\Delta(s) = \Delta(\lambda) = \frac{8\lambda}{8\lambda + 1} \tag{1.6}$$

下面用 $\Delta(\lambda)$ 关于 λ 的图形(图 1.3)来说明随着双层玻璃窗之间的空气厚度 h 与玻璃厚度 d 的比 λ 的增加,$\Delta(\lambda)$ 的变化情况。

六、模型分析

从图 1.3 明显地看出,随着这个比值 λ 的增加,$\Delta(\lambda)$ 的值逐渐

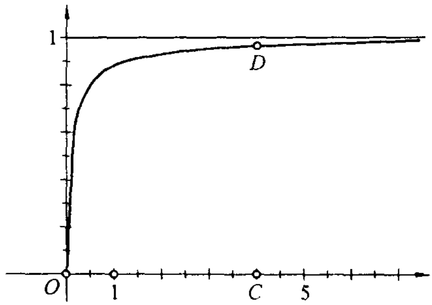

图 1.3 $\Delta(\lambda)$ 与 λ 的关系

增加,且越来越靠近 1,说明减少热量流失的效果较好。这与我们平常想到的是一致的,但是,这个比值大于 4 以后效果就不明显了,所以一般取 4 倍,这就大大地节省了空间和造价,同时采光效果也有显著的提高。一举好几得,完全得益于数学模型。

七、模型检验

可以实际测量一些数据进行模型检验,这里留给读者。

八、模型应用

所建模型具有非常好的实用价值,制造双层玻璃窗虽然工艺复杂,但不会增加造价,且由此而减少的热量损失是十分显著的。在实际应用中取 $\lambda = 3 \sim 4$ 即可,这样能减少热量流失 96% ~ 97%。

1.2 八步建模法

由于数学模型涉及的范围极广,各领域、各学科、各行各业,时时刻刻都有数学模型,而又不能套用现成的定理和公式去建立数学模型,所以,数学建模有很大的灵活性。数学建模是难度较大的思维活动,而数学建模这门课程基本上没有一个定理和公式,这就