21世纪 高等学校本科系列教材

总主编 吴中福

信号与系统分析基础

(27)

曾黄麟 余成波 主编

重庆大学出版社

信号与系统分析基础

曾黄麟　余成波　主编

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书主要研究信号、系统的某些特性，介绍信号与系统的基础分析方法。本书在编写时遵循逐步更新的精神，在保持教学大纲内容和要求的基础上，对内容体系作了某些改变的尝试。其特点：一是将连续系统与离散系统的内容并列安排学习；二是对信号重点强调频谱概念，对系统部分重点强调系统响应分析方法。全书内容包括：信号与系统分析概论、连续系统的时域分析、离散系统的时域分析、连续系统的频域分析、离散傅里叶变换及快速傅里叶变换、连续系统的复频域分析、离散系统的Z域分析。

本书适合于电气工程及其自动化、自动化、计算机科学与技术等专业本、专科生和其他专业的研究生学习，也可供相关专业、相关领域的研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统分析基础/曾黄麟，余成波主编．—重庆：重庆大学出版社，2001.10
计算机科学与技术专业本科系列教材
ISBN 7-5624-2363-6

Ⅰ．信…　Ⅱ．①曾…②余…　Ⅲ．①信号分析—高等学校—教材②信号系统—系统分析—高等学校—教材
Ⅳ．TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 066172 号

信号与系统分析基础
曾黄麟　余成波　主编
责任编辑　梁　涛
*
重庆大学出版社出版发行
新　华　书　店　经　销
重庆大学建大印刷厂印刷
*
开本：787×1092　1/16　印张：13.5　字数：337 千
2001 年 11 月第 1 版　　2001 年 11 月第 1 次印刷
印数：1～5 000
ISBN 7-5624-2363-6 /TN・47　定价：22.00 元

前言

随着现代社会、经济、科技、文化的发展和世界高等教育的发展，对我国高等教育面向21世纪人才培养提出了更高的要求，改革课程体系和更新教学内容已成为高等教育改革的一项十分迫切而重要的任务。

根据教育部组织实施的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，依据教学大纲的要求，并对《信号与线性系统分析》的内容进行了必要的修改和补充，编写为适合于电气工程及其自动化、自动化、计算机科学与技术等专业学习的《信号与系统分析基础》。

随着大规模集成电路、计算机的迅速发展，数字技术已渗透到科学技术的各个领域。为了适应新的发展变化，目前，信号、电路与系统的研究重点普遍注意转向离散的、数字的方面。本书在编写时遵循逐步更新的精神，在保持教学大纲内容和要求的基础上，对内容体系作了某些改变的尝试。为了有利于基本概念和基本方法的理解与掌握，我们将连续系统与离散系统的内容并列安排学习。考虑到当前的实际情况，在具体安排上，先讨论连续的信号、系统，再讨论离散的信号、系统。对信号部分重点强调频谱概念，对系统部分重点强调系统响应分析方法。教材按时域分析、变换域分析的次序划分章节，因此，第1章对信号与系统分析作一概述，第2章、第3章分别讨论连续系统、离散系统响应的时域分析方法，第4章、第5章重点强调连续、离散信号的频谱概念，第6章、第7章分别讨论连续系统、离散系统响应的变换域分析方法。这样既强调了连续系统与离散系统的共性，又突出了它们各自的特点。

全书共分7章，内容包括：信号与系统分析概论、连续系统的时域分析、离散系统的时域分析、连续系统的频域分析、离散傅里叶变换及快速傅里叶变换、连续系统的复频域分析、离散系统的Z域分析。建议课堂教学约60学时，由于课时的原因，本书略去了系统的状态变量分析法，对于需要学习这方面内容的读者，请根据实际情况，进行补充，不受本书的约束。

为使读者能较好地理解基本概念和分析方法，本书提供了较多的例题和习题，请酌情选用。

本书由曾黄麟教授编写第 2 章、第 3 章、第 5 章、第 6 章 6.4 节、第 7 章，并统稿全书，余成波教授编写第 1 章、第 4 章、第 6 章 6.1、6.2、6.3 节，武文跃在第 2 章的编写中给予了支持。在编写过程中，许多兄弟院校的老师提出了宝贵意见，他们有意无意地给了我们许多启示，这对内容安排和与相关课程的联系有很大帮助，在此一并表示衷心的谢意。

由于编者水平有限，书中一定有不少错误和不妥之处，敬请读者赐教。

编　者

2001 年 5 月

目录

第1章 信号与系统分析基本概念

随着现代科学技术的进步与发展，特别是高集成度与高速数字技术的飞跃发展，信息高速公路的建设，新材料、新工艺和新器件的不断出现，使各技术学科领域和现代化工业的面貌发生了深刻和巨大的变化。当今科技革命的特征是以信息技术为核心，促使社会进入信息时代，使信号与系统日益复杂，也促进了信号与系统理论研究的发展。

系统理论主要研究两类问题：分析与综合。系统分析是对给定的某具体系统，求出它对于给定激励的响应；系统综合则是在给定输入（激励）的条件下，为获得预期的输出（响应）去设计具体的系统。

本书讨论的范围仅限于信号与非时变线性系统的分析。

1.1 信号的定义与分类

1.1.1 信号及其描述

人类在社会活动与日常生活中，无时无刻不涉及到信息的获取、存储、传输与再现。可以说上至天文，下至地理；大到宇宙，小到粒子核子的研究，乃至工农业生产、社会发展及家庭生活都离不开信息科学，故信息对每个人都赋予了特别重要的意义。何谓“信息”？信息是反映人们得到“消息”，即原来不知道的知识，信息是人类认识客观世界和改造客观世界的知识源泉。获取信息、传输信息和交换信息，自古至今一直是人类基本的社会活动。从公元前七百余年，祖先利用烽火传递警报，到现代的电话、电报、传真、无线广播与电视，其目的都是要把某些“消息（message）”借一定形式的信号从一个地方传递到另一个地方，给对方以信息（information）。即信息要用某种物理方式表达出来，通常可以用语言、文字、图画、数据、符号等来表达。也就是说，信息通常隐含于一些按一定规则组织起来的约定的“符号”之中，这种用约定方式组成的“符号”统称为消息。因此，消息中通常包含有大量的信息。但是，信息一般都不能直接地传送，它必须借助于一定形式的信号（光信号、声信号、电信号等），才能远距离快速传输和进行各种处理。因此，可以说信号是消息的载体，是消息的一种表现形式。

那么，什么是“信号（signal）”？广义地说，信号是带有信息的随时间变化的物理量或物理现象。例如，机械振动产生力信号、位移信号及噪声信号；雷电过程产生的声、光信号；大脑、心脏运动分别产生脑电和心电信号；电气系统随参数变化产生电磁信号等。在通信技术中，信号是消息的表现形式，它是传送各种消息的工具，是通信传输的客观对象。本书将只讨论应用广泛的电信号，它通常是随时间变化的电压或电流。由于信号是随时间而变化的，在数学上可以

用时间 t 的函数 $f(t)$ 来表示。

信号的特性可以从时间特性和频率特性两方面来描述，由于信号各自有不同的时间特性和频率特性，故信号的形式不同，但信号的时间特性和频率特性有着对应的关系，不同的时间特性将导致不同的频率特性的出现。

1.1.2 信号的分类

为了深入了解信号的物理实质，将其分类研究是非常必要的。对于各种信号，可以从不同的角度进行分类。下面讨论几种比较常见的分类方法。

(1)确定信号与随机信号

按时间函数的确定性划分，信号可分为确定信号与随机信号两类。

确定信号(determinate signal)是指一个可以用明确的数学关系式描述的信号，即可以表示为一个或几个自变量的确定的时间函数的信号。也就是预先可以知道它的变化规律，是时间的确定函数，即在给定的某一时刻，信号有确定的值，如正弦信号、周期脉冲信号等。随机信号(random signal)则与之不同，不能预知它随时间变化的规律，不是时间的确定函数，即不能用数学关系式描述，其幅值、相位变化是不可预知的，通常只知道它取某一些数值的概率，如噪声信号、汽车奔驰时所产生的振动信号等。但是在一段时间内由于它的变化规律比较确定，可以近似为确定信号。因此，为了分析方便，首先研究确定信号，在此基础上根据随机信号的统计规律再研究随机信号。本书只分析确定信号。

对于确定信号，它可以进一步分为周期信号、非周期信号与准周期信号。

周期信号(periodic signal)是指经过一定时间可以重复出现的信号，其表达式为

$$f(t)=f(t+nT) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.1.1}$$

满足此关系式的最小 T 值称为信号的周期。这种信号，只要给出任一周期内的变化规律，即可确定它在所有其他时间内的规律性。

非周期信号(aperiodic signal)在时间上不具有周而复始的特性，往往具有瞬变性，也可以看做为一个周期 T 趋于无穷大时的周期信号。

准周期信号是周期与非周期的边缘情况，是由有限个周期信号合成，但各周期信号的频率相互间不是公倍数的关系，其合成信号不满足周期条件。这种信号往往出现于通信。如信号

$$f(t)=\cos t+\cos\sqrt{2}t \tag{1.1.2}$$

(2)连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数取值的连续性，可划分信号为连续时间信号与离散时间信号，简称连续信号与离散信号。

连续信号(continuous signal)是指在所讨论的时间间隔内，除若干个第一类间断点外，对于任意时刻值都可给出确定的函数值，此类信号称为连续信号或模拟信号。通常用 $f(t)$ 表示，如图 1.1.1 所示。

离散信号(discrete signal)是指在所讨论的时间区间，只在某些不连续规定的时刻给出函数值，而在其他时刻没有给出函数，通常用 $f(t_k)$ 或 $f(kT)$［简写 $f[k]$］表示，由于它是由一组按时间顺序的观测值所组成，因此也称为时间序列或简称序列，如图 1.1.2 所示。离散信号又可分为两种情况：时间离散而幅值连续时，称为采样信号；时间离散而幅值量化时，则称为数字信号。

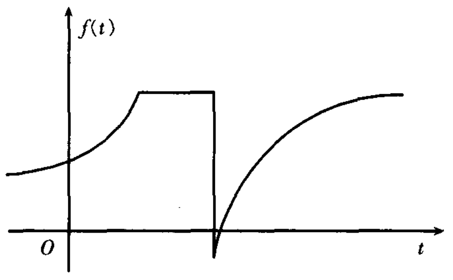


图 1.1.1　连续时间信号

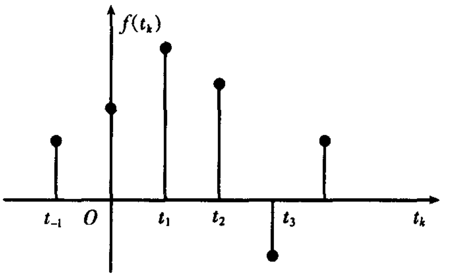


图 1.1.2　离散时间信号

(3)能量信号与功率信号

信号按时间函数的可积性划分，可以分为能量信号、功率信号和非功率非能量信号。

信号可以看做是随时间变化的电压或电流，信号平方的无穷积分总表加到 1Ω 电阻上的能量，简称为信号能量 E，即

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}f^{2}(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.3}$$

其平均功率定义为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f^{2}(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.4}$$

若信号 $f(t)$ 的能量有界，即 $0<E<\infty$，此时 $P=0$，则称此信号为能量有限信号，简称能量信号(energy signal)。

若信号 $f(t)$ 的功率有界，即 $0<P<\infty$，此时 $E=\infty$，则称此信号为功率有限信号，简称功率信号(power signal)。

值得注意的是，一个信号不可能同时既是功率信号，又是能量信号，但可以是一个既非功率信号，又非能量信号，如单位斜坡信号就是一个例子。一般来说，周期信号都是功率信号；非周期信号则可能出现 3 种情况：能量信号、功率信号、非功率非能量信号。如：持续时间有限的非周期信号为能量信号，如图 1.1.3(a)所示脉冲信号；持续时间无限、幅度有限的非周期信号

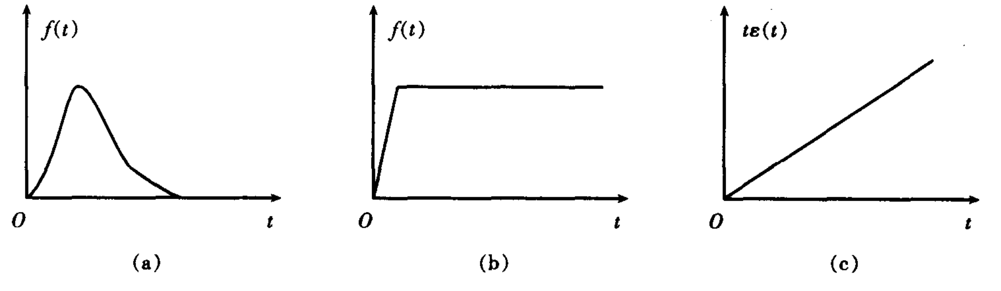


图 1.1.3　3 种非周期信号

为功率信号，如图 1.1.3(b)所示；持续时间、幅度均无限的非周期信号为非功率非能量信号，如图 1.1.3(c)所示。

(4)时限与频限信号

时域有限信号是在有限区间(t_1,t_2)内定义，而其外恒等于零，例如，矩形脉冲、三角脉冲、余弦脉冲等。而周期信号、指数衰减信号、随机过程等，则称为时域无限信号。

频域有限信号是指信号经过傅里叶变换，在频域内占据一定带宽(f_1,f_2)，其外恒等于零。例如，正弦信号、限带白噪声等，为时域无限频域有限信号；函数、白噪声、理想采样信号等，则

为频域无限信号。

时间有限信号的频谱，在频率轴上可以延伸至无限远。由时频域对称性可推论，一个具有有限带宽的信号，必然在时间轴上延伸至无限远处。显然，一个信号不能在时域和频域都是有限的。

(5)物理可实现信号

物理可实现信号是指满足条件：$t<0$ 时，$f(t)=0$，即在时刻小于零的一侧全为零，信号完全由时刻大于零的一侧确定，故又称为单边信号。在实际中出现的信号，大量的是物理可实现信号，因为这种信号反映了物理上的因果律。实际中所能测得的信号，许多都是由一个激发脉冲作用于一个物理系统之后所输出的信号。所谓物理系统是指具有这样的性质，当激发脉冲作用于系统之前，系统是不会有响应的。换句话说，在零时刻之前，没有输入脉冲，则输出为零。

【例 1.1.1】 如图 1.1.4 所示信号，判断其是否为能量信号与功率信号。

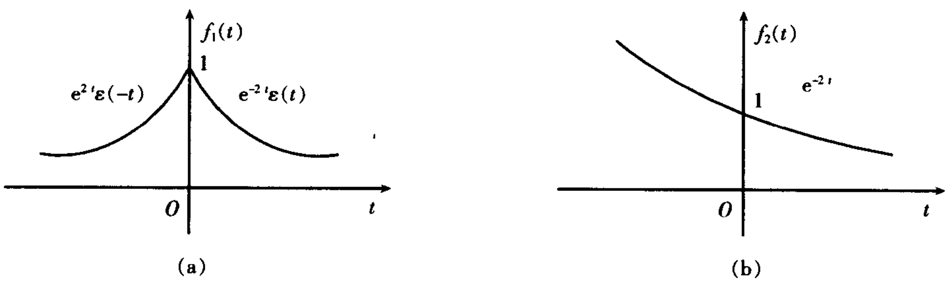


图 1.1.4 例 1.1.1 题图

解 图 1.1.4(a)的信号 $f_1(t)=e^{-2|t|}$

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(e^{-2|t|})^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}e^{4t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}e^{-4t}\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\infty}e^{-4t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

$$P=0$$

因此该信号为能量信号。对于图 1.1.4(b)所示信号 $f_2(t)=e^{-2t}$，则有

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}(e^{-2t})^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-4T}-e^{4T}}{4}\right]=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{E}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T}-e^{-4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T}}{8T}=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{4T}}{2}=\infty$$

所以该信号既非能量信号又非功率信号。由此可见，按能量信号与功率信号进行分类时，从理论上讲尚未包括所有的信号。

1.2 基本的连续时间和离散时间信号

本节将要介绍几种特别重要的连续时间和离散时间信号。主要原因：一是因为这些信号经常遇到，二是实际中复杂的信号可以由这些基本信号组合而成，并且这些信号对线性系统产生的响应，对分析系统和了解系统的性质起着主导作用，具有普遍意义。

1.2.1　单位阶跃信号(unit step function)与单位冲激信号(unit impulse function)

(1)连续时间单位阶跃信号和离散时间单位阶跃序列

连续时间单位阶跃信号和离散时间单位阶跃序列分别用 $u(t)$,$u[n]$表示,其定义为:

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \quad 和 \quad u[n]=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1.2.1}$$

其波形分别如图 1.2.1(a),(b)所示,对于 $u(t)$该信号在 $t=0$ 处发生跃变,数值 1 为阶跃的幅度,若阶跃幅度为 A,则可记为 $Au(t)$。若单位阶跃信号跃变点在 $t=t_0$ 处,则称为延迟单位阶跃信号,它可表示为

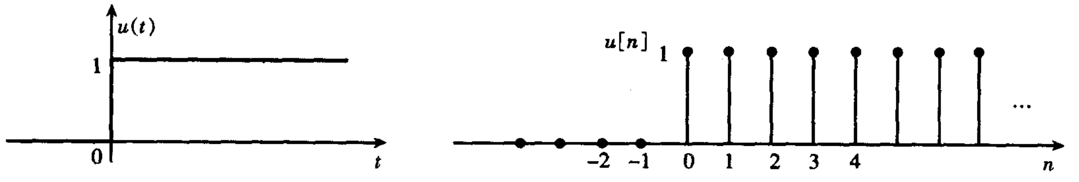
$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases} \tag{1.2.2}$$

其波形如图 1.2.2(a)所示。

对于单位阶跃序列 $u[n]$,则有

$$\begin{aligned}u[n-k]&=\begin{cases}1, & n\geqslant k\\ 0, & n<k\end{cases}\\ f[n]u[n-k]&=\begin{cases}f[n], & n\geqslant k\\ 0, & n<k\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

$u[n-k]$的波形如图 1.2.2(b)所示,同时具有截取特性,这种特性常用来表示分段描述的序列。单位阶跃序列 $u[n]$与连续信号 $u(t)$的形状相似,但 $u(t)$在 $t=0$ 发生跃变,其数值通常不予定义或定义为$[u(0^-)+u(0^+)]/2=1/2$;而 $u[n]$在 $n=0$ 处的值明确定义为 1。



(a)　　　　　(b)

图 1.2.1　连续时间和离散时间单位阶跃信号的波形

(a)连续时间单位阶跃信号　　(b)离散时间单位阶跃序列

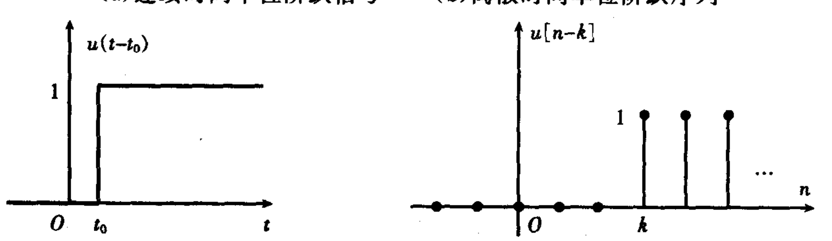


图 1.2.2　连续时间和离散时间延时单位阶跃信号的波形

(2)连续时间单位冲激信号和离散时间单位冲激序列

比单位阶跃信号或序列更为重要、基本的信号是单位冲激信号或序列,连续时间单位冲激信号和离散时间单位冲激序列分别用 $\delta(t)$和 $\delta[n]$表示。连续时间单位冲激信号 $\delta(t)$是 1930 年由英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac)首先提出的,故又称狄拉克函数或 δ 函数,它不能用普通的函数来定义,其工程定义是:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1.2.4}$$

上述定义表明，$\delta(t)$是在$t=0$瞬间出现又立即消失的信号，且幅值为无限大；在$t\neq 0$处，它始终为零，并且具有单位面积（常称为$\delta(t)$的强度）。

直观地看，这一函数可以设想为一列窄脉冲的极限。图 1.2.3(a)是一矩形脉冲$P(t)$，宽度为τ，高度为$1/\tau$，其面积为1，若此脉冲宽度继续缩小至极限情况，即当$\tau\to 0, 1/\tau\to\infty$，这时高度无限增大，但面积始终保持为1。单位冲激信号波形难以用普通方式表达，通常用一个带有箭头的单位长度线表示，如图 1.2.3(b)所示。若强度不为1，而为A的冲激信号记为$A\delta(t)$，

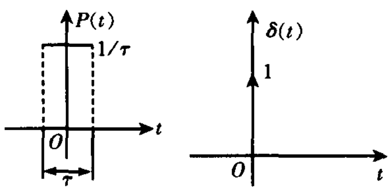


图 1.2.3　连续时间单位冲激信号

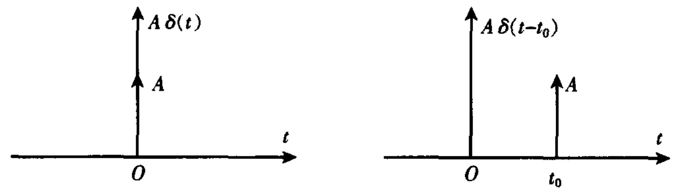


图 1.2.4　延迟连续时间单位冲激信号

在用图形表示时，可将强度A标注在箭头旁（如图 1.2.4(a)）。延迟t_0出现的冲激信号可记为$\delta(t-t_0)$，其波形如图 1.2.4(b)所示，它的定义为

$$\begin{cases}\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, & t\neq t_0\\ \infty, & t=t_0\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1\end{cases} \tag{1.2.5}$$

相比起来，离散时间单位序列$\delta[n]$（又称单位函数）其定义式为

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.2.6}$$

且有

$$\begin{aligned}\delta[n-k]&=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k\end{cases}, \quad k>0\\ \delta[n+k]&=\begin{cases}1, & n=-k\\ 0, & n\neq -k\end{cases}, \quad k>0\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

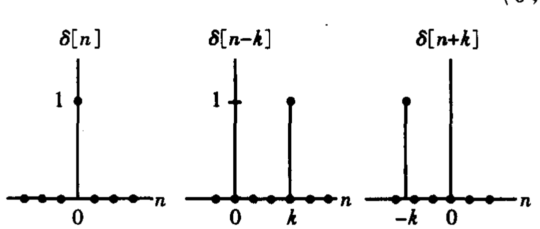


图 1.2.5　离散时间单位冲激序列

其波形如图 1.2.5 所示，该信号也称为单位脉冲序列或单位样本序列。值得注意的是单位序列$\delta[n]$与冲激函数$\delta(t)$有本质的不同，$\delta[n]$在$n=0$处有确定幅度值为1，而不像$\delta(t)$在$t=0$时的幅度值为∞。

(3) 单位冲激和单位阶跃之间的关系

首先看一下连续时间中$\delta(t)$和$u(t)$的关系。由单位冲激信号$\delta(t)$的定义可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0^-}\delta(t)\mathrm{d}t+\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t+\int_{0^+}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=$$

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

故有
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

根据单位阶跃信号 $u(t)$ 的定义，可得

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2.8}$$

上式表明：单位冲激信号的积分为单位阶跃信号；反之，单位阶跃信号的导数应为单位冲激信号，即

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2.9}$$

相比起来，在离散域 $\delta[n]$与 $u[n]$之间存在类似的差分与累加的关系，即

$$\begin{aligned} &\delta[n]=u[n]-u[n-1] \\ &u[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\cdots+\delta[n-m]+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-m] \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

令 $k=n-m$，则

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k] \tag{1.2.11}$$

式(1.2.11)的成立是很明显的，式(1.2.11)的正确性在于 $\delta[k]$仅在 $k=0$ 时为 1，其余 k 取为 0，所以当 $n<0$ 时，求和式为零；而当 $n\geqslant 0$ 时，求和式为 1。

1.2.2　**正弦型信号**(sine signal)**与正弦型序列**(sine time sequence)

(1)连续时间正弦型信号

一个正弦信号可描述为：

$$f(t)=A\sin(\omega_0 t+\varphi)=A\cos\left(\omega_0 t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right) \tag{1.2.12}$$

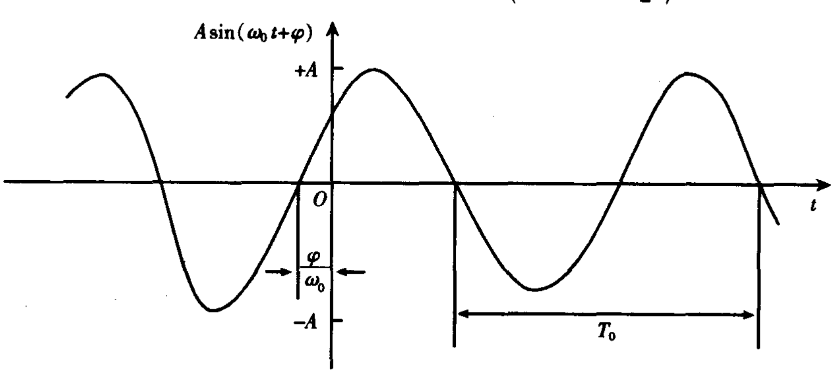


图 1.2.6

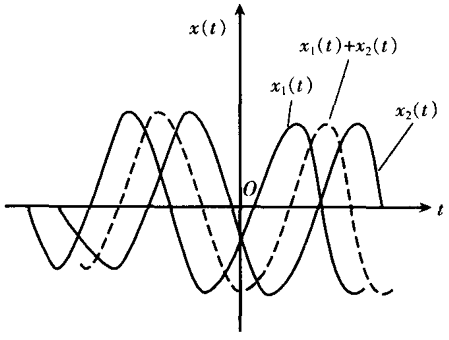
式中 A 为振幅，ω_0 为角频率(rad/s)，φ 为初始角(rad)，如图 1.2.6 所示。正弦信号是周期信号，周期为 $T(T=2\pi/\omega_0)$。由于余弦信号与正弦信号只是在相位上相差 $\pi/2$，因此将它们统称为正弦型信号。

正弦型信号具有非常实用的性质：

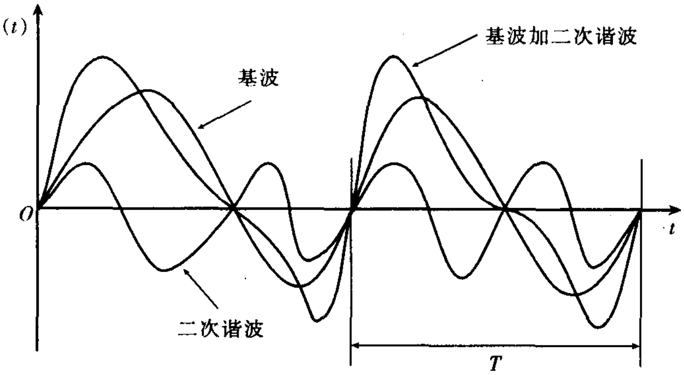
①两个频率相同的正弦信号相加，即使其振幅与相位各不相同，但相加后结果仍然是原频

率的正弦信号。

②若一个正弦信号的频率是另一个正弦信号频率的整数倍时，则合成信号是一个非正弦周期信号，其周期等于基波的周期（如图 1.2.7）。



(a)



(b)

图 1.2.7

(a)两个同频率正弦信号的合成　(b)不同频率正弦信号的合成

③正弦信号对时间的微分或积分仍然是同频率的正弦信号。

(2)正弦型序列

通常正弦型序列是从正弦时间函数或余弦时间函数经取样后得来的，正弦序列的表达式为

$$f[k]=A\sin(\Omega_0 k+\varphi) \tag{1.2.13}$$

这里幅值 A、初相 φ 的含义与模拟正弦信号相同，但正弦序列的数字角频率 Ω_0 的含义与一般模拟信号角频率 ω_0 的概念不同。由于离散信号定义的时间为 kT，显然有 $\Omega_0=\omega_0 T$，单位为弧度，它表示相邻两个样值间弧度的变化量。

对于周期序列其定义为：$f[k+N]=f[k]$，其中 N 为序列的周期，只能为任意整数。与模拟正弦信号不同，离散正弦序列是否为周期信号主要取决于 $2\pi/\Omega_0$ 是正整数、有理数还是无理数。若比值 $2\pi/\Omega_0$ 是正整数，则正弦序列为周期序列，其周期为 N，这是因为它符合 $f[k+N]=f[k]$所给出的定义，即

$$\begin{aligned}A\sin[\Omega_0(k+N)+\varphi]&=A\sin\left[\Omega_0\left(k+\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)+\varphi\right]=\\&A\sin(\Omega_0 k+2\pi+\varphi)=A\sin(\Omega_0 k+\varphi)\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

若比值 $2\pi/\Omega_0$ 不是正整数而是有理数，即 $2\pi/\Omega_0=N/m$，则正弦序列仍为周期序列，其周期为 $N=m(2\pi/\Omega_0)$。若比值 $2\pi/\Omega_0$ 为无理数，此时正弦序列就不是周期序列，但其包络仍为正弦函数。对于余弦序列与上述正弦序列相类似。

1.2.3 **指数型信号**(exponential signal)**与指数型序列**(exponential sequence)

(1)连续时间实指数信号和离散时间实指数序列

连续时间实指数信号(real exponential signal)可表示为

$$f(t)=Ae^{at} \tag{1.2.15}$$

式中 A，a 均为实常数。若 $a<0$，则 $f(t)$随着时间 t 的增加按指数衰减；若 $a>0$，则 $f(t)$随着

时间 t 的增加按指数增长；若 $a=0$，则 $f(t)$ 为直流信号（如图 1.2.8）。

离散时间实指数序列为

$$f[n]=a^n, \quad a\in R \tag{1.2.16}$$

图 1.2.9 中画出了当实数取不同值时，几种不同的实指数序列。如果限于 $a>0$，它呈现出单调增长的实指数序列（$a>1$），常数序列（$a=1$）和单调衰减的实指数序列（$a<1$），分别如图 1.2.9(a)、(b)和(c)所示，并分别对应着连续时间实指数信号的 3 种形式；而当 $a<0$ 时，$a=|-a|$，它在增长或衰减的同时，还交替地改变序列值的符号，分别如图 1.2.9(d)、(e)和(f)所示。严格地说，这是一种振荡的特性，在连续时间实指数信号中不出现此现象。

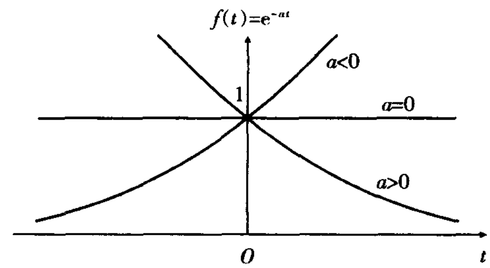


图 1.2.8　连续时间实指数信号

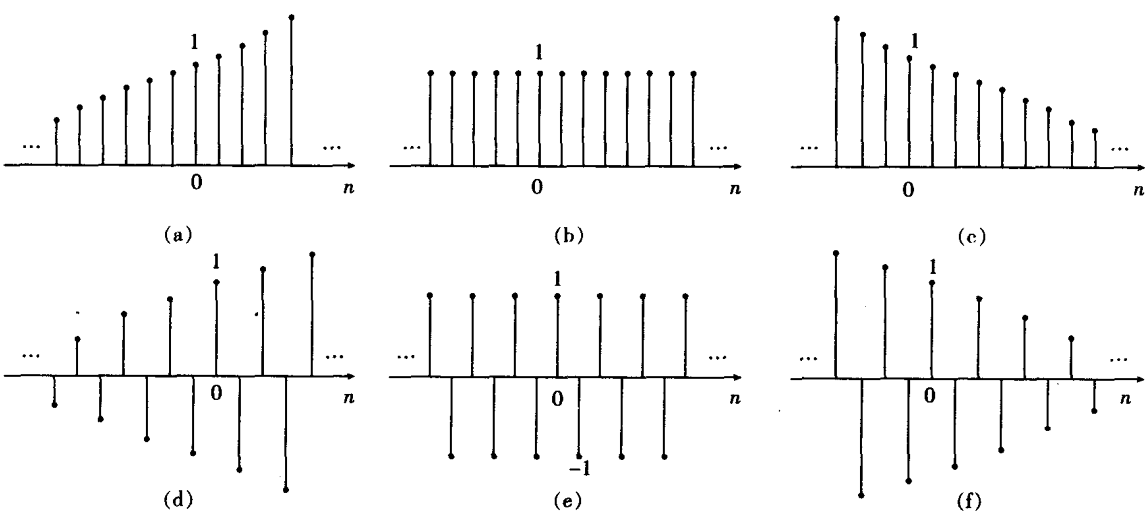


图 1.2.9　在实数 a 不同取值时的实指数序列

(a)$a>1$　(b)$a=1$　(c)$0<a<1$

(d)$a<-1$　(e)$a=-1$　(f)$-1<a<0$

(2)连续时间复指数信号和离散时间复指数序列

通常连续时间复指数信号（complex exponential signal）表示为

$$f(t)=Ae^{st} \qquad s=\alpha+j\omega \tag{1.2.17}$$

s 称为复频率。根据欧拉公式可得

$$e^{st}=e^{\alpha t}\cos\omega t+je^{\alpha t}\sin\omega t \tag{1.2.18}$$

因此，通常复指数信号为

$$\begin{aligned} f(t) &= Ae^{\alpha t}\cos\omega t + jAe^{\alpha t}\sin\omega t = \\ &\mathrm{Re}[x(t)] + j\mathrm{Im}[x(t)] \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

由此可见，复指数信号可分解为实部和虚部两部分，它们分别代表余弦和正弦振荡信号，且其波形是随 s 的不同而异。当 $s=0$ 时，信号为直流信号；当 $\omega=0$ 时，信号变成为一个单调增长或衰减的实指数信号，如图 1.2.10 所示；当 $\alpha=0$ 时，信号实部是一个等幅余弦信号，虚部是一个等幅正弦信号。如图 1.2.11。在通常情况下，复指数信号的实部是一个增幅（$\alpha>0$）或减幅（$\alpha<0$）的余弦信号，虚部是一个增幅（$\alpha>0$）或减幅（$\alpha<0$）的正弦信号，如图 1.2.11 所示。

由于复指数信号能概括多种情况，所以可利用它来描述多种基本信号，故它是信号与系统分析中经常遇到的重要信号。

离散时间复指数序列是信号分析中最常用的基本序列，可表示为

$$f[n]=e^{j\omega_0 t}\Big|_{t=nT_0}=e^{j\omega_0 nT_0}=e^{j\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\omega_0 T_0 \tag{1.2.20}$$

如同正弦序列一样，若复指数序列是一个以 N 为周期的周期序列，则有 $e^{j\Omega_0 n}=e^{j\Omega_0(n+N)}$，因此 $\Omega_0 N=2\pi m$，m 为整数，即 $2\pi/\Omega_0=N/m$，为有理数，其周期为 $N=m(2\pi/\Omega_0)$。

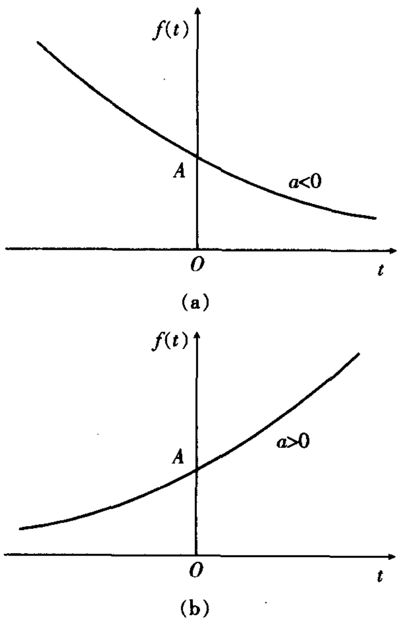


图 1.2.10

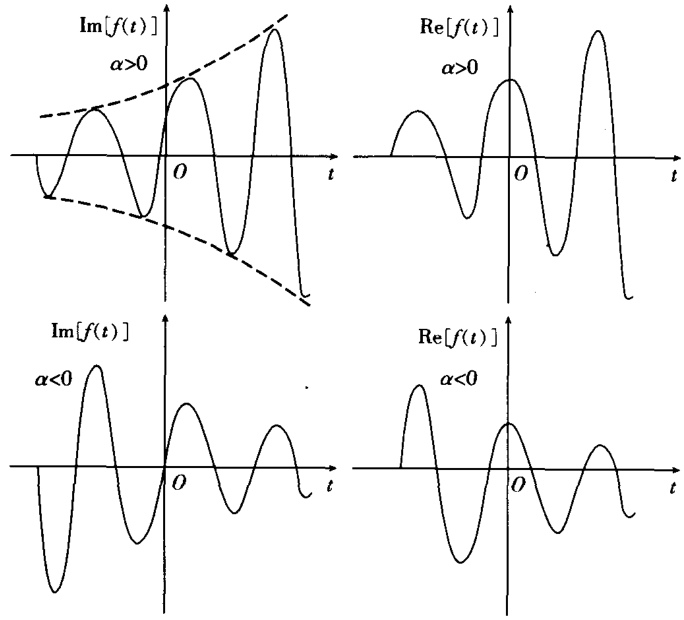


图 1.2.11

由比较正弦型信号、复指数信号与正弦型序列、复指数序列的表达式可见，虽然它们都是周期信号，但对连续时间信号来说，ω 取值可以在 $-\infty<\omega<\infty$，而且任意选择 ω_0 都具有周期性，其周期为 $T_0=2\pi/\omega_0$。而对离散时间信号来说，由于 $e^{j\Omega_0 n}=e^{j(\Omega_0\pm k2\pi)n}$，$k$ 为正整数，表示在数字频率上相差 2π 整数倍的所有离散时间复指数序列（正弦序列）都是一样的。也就是说，离散域的频率 Ω 的有效取值是在 $0\leqslant\Omega\leqslant 2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 的任一间隔为 2π 的范围。

由此可知，将正弦型信号与复指数信号从连续域变换到离散域，相当于把无限的频率范围映射到有限的频率范围。这一基本区别在今后进行数字信号与数字系统的频率特性分析时非常有意义，即数字频率 Ω 仅在 $0\leqslant\Omega\leqslant 2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$ 范围内取值，而且意味着 $\Omega=\pm\pi$（或 π 的奇数倍）是序列在频率域最高频率；$\Omega=0$ 及 2π（或 π 的偶数倍）是序列在频率域的最低频率。

1.3 信号的基本运算与波形变换

众所周知，信号经过任何一种运算和变换都将产生于不同于原信号的新信号。而且在信号与系统中经常要对信号进行运算和波形变换，研究信号通过系统各部件后的变形变化。例