历届高考数学试题归类分析

臧海亭 编

西北工业大学出版社

历届高考数学试题归类分析

臧海亭 编

西北工业大学出版社

内 容 简 介

本书收集了1949～1988年间高考数学试题 709 道，基本上是建国以来高考数学试题的总汇集，有收藏价值。

本书对历届试题逐类分析解答。既有思路、方法、技巧，还指出共易犯错误.除了标准答案外,还介绍了刊物上一些名家的优秀解法．对一些试题的出处、有关历史以及前人的研究成果作了介绍。

本书可供高考复习用,也可供高中师生参考.是图书馆的必要藏书.

历届高考数学试题归类分析

编　　者　臧海亭

责任编辑　刘彦信

责任校对　钱伟峰

*

西北工业大学出版社出版发行

（西安市友谊西路 127 号）

陕西省新华书店经销

西北工业大学出版社印刷厂印装

ISBN 7-5612-0132-X/G·18

*

开本 787×1092　1/32　16 印张　340 千字

1989 年 3 月第 1 版　1989 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—15500册　　定价：4.90 元

前　言

本书收录了建国以来高考数学试题共709道，其中包括外国高考数学试题10道。少数与现在高考无关的试题，未予收录。所以，本书基本上是建国以来高考数学试题的总汇集。

全书分为五章。第一章为简答题和填空题，这些试题较简单。为了避免概念性的错误，题后多附有[易犯错误]一栏。第二章为选择题，这是从1983年才有的新题型，试题之前介绍了一些作选择题的方法供参考。第三、第四、第五章分别为立体几何、解析几何、代数试题专类。各章又根据试题的性质进行了归类分析。

在题型上，分例题、附题和类题三种，例题为各色题型，与例题有关的列作附题，与例题相类似的列作类题。全书有例题545道，附题37道，类题127道。对类题只写答案，不作解答，可以作为读者的练习题。每个题后都附有年代或出处。

对各个试题着墨多少并不一样，有的解答详尽，有的淡淡一提。有40多道试题有四种以上不同解法，有的试题的解法多至七八种或十余种，但并非全是“席上之珍”，似有石玉不分、沙金杂糅之嫌。各试题的解答，多数是原试题的标准答案，有些是从刊物上选来的优秀解答。以上解答基本上全豹照搬。有些解答是由笔者给出的。

有的试题后面附有[注]或[附]，是因为这些试题在解答之外还有话要说，或注释、繁衍发展及有关历史，或有未意尽之言，这部分杂有笔者的有关论文或研究成果，这些材料有的在刊物上登载过。

前车之辙，后车是鉴。透过这些试题可以窥探命题人的心扉；可以看到试题的结构及各成分的深浅程度；可以看清所要考察的知识点和范围；还可以掌握近几年试题的稳定成分和重点的转移等.再则，试题的解答中渗有各名家的解题技巧和卓绝智慧．孔子曰："得一善则拳拳服膺，而弗失之矣。"有心者，必定能从中得到启示。

本书是一部较完备的资料，对高中数学教师和高中学生有一定的参考价值。

书中错误在所难免，恳望高者赐教。

臧海亭

1988年8月

目　　录

第一章　简答试题……………………………………1

第一节　立体几何试题……………………………………1

第二节　解析几何试题……………………………………6

1．求距离试题……………………………………7

2．圆锥曲线中的简答题……………………………………7

第三节　代数试题……………………………………9

1．集合论中的简答题……………………………………9

2．求定义域的简答题……………………………………10

3．有关绝对值的简答题……………………………………14

4．有关不等式的简答题……………………………………14

5．复数中的简答题……………………………………16

6．指数方程和对数方程的简答题……………………………………19

7．三角中的简答题……………………………………22

8．求极限的简答题……………………………………26

9．二项式中的简答题……………………………………29

10．排列与组合中的简答题……………………………………33

11．最值问题中的简答题……………………………………35

第二章　选择题……………………………………38

第一节　代数试题……………………………………38

1．函数试题……………………………………38

2．三角试题……………………………………45

3. 集合论试题……53
4. 有关充分条件和必要条件的试题……56
5. 不等式试题……57
6. 复数试题……58
7. 二项式试题……60
8. 排列组合试题……61
9. 整数问题试题……62
第二节 立体几何试题……63
1. 概念试题……64
2. 有关充分条件和必要条件的试题……65
3. 计算试题……66
4. 证明试题……67
第三节 解析几何试题……70
1. 直线与圆试题……70
2. 圆锥曲线试题……87
第三章 立体几何试题……100
第一节 线面关系试题……101
1. 平面的性质试题……101
2. 简单射影试题……102
3. 基线测量试题……104
4. “三大角”试题……109
5. 证明题和计算题……117
第二节 面积和体积试题……132
1. 简单计算题……132
2. 截面试题……144
3. 证明题与计算题……146
第三节 定值试题……151

第四节　截体试题…………………………………… 152
第五节　极值试题…………………………………… 157
第六节　应用题……………………………………… 161
第七节　作容器试题………………………………… 163
第八节　用积分方法求体积试题…………………… 167
第九节　有关纬度的试题…………………………… 168

第四章　解析几何试题……………………………… 170

第一节　解析法解题试题…………………………… 171
第二节　抛物线试题………………………………… 172
第三节　椭圆试题…………………………………… 215
第四节　双曲线试题………………………………… 246
第五节　直线与圆试题……………………………… 258
第六节　曲线与方程试题…………………………… 282
第七节　极坐标方程试题…………………………… 295
第八节　综合题……………………………………… 299

第五章　代数试题…………………………………… 303

第一节　数与式试题………………………………… 304
1. 数字运算试题……………………………………… 304
2. 代数式化简试题…………………………………… 307
3. 对数式化简试题…………………………………… 311
4. 因式分解试题……………………………………… 315
5. 部分分式试题……………………………………… 316
6. 行列式与方程组试题……………………………… 319
第二节　集合论试题………………………………… 325

第三节　对数方程试题…………………………… 329
第四节　应用题试题…………………………… 330
第五节　极值试题……………………………… 335
第六节　画图象试题…………………………… 342
第七节　排列与组合试题……………………… 346
第八节　不等式试题…………………………… 349
1. 不等式的解法试题 ………………………………… 349
2. 不等式的证明试题 ………………………………… 355
第九节　三角试题……………………………… 360
1. 求值题 ……………………………………………… 360
2. 解三角形试题 ……………………………………… 372
3. 证明题 ……………………………………………… 382
4. 化简题 ……………………………………………… 394
5. 不等式试题 ………………………………………… 397
6. 三角极值试题 ……………………………………… 401
7. 化三角函数式为乘积形式试题 …………………… 402
8. 解三角方程试题 …………………………………… 403
第十节　函数试题……………………………… 415
第十一节　复数试题…………………………… 425
第十二节　数学归纳法试题…………………… 447
第十三节　数列与极限试题…………………… 452
1. 求通项试题 ………………………………………… 452
2. 求和试题 …………………………………………… 453
3. 求极限试题 ………………………………………… 459
4. 计算题 ……………………………………………… 460
5. 证明题 ……………………………………………… 470
6. 综合题 ……………………………………………… 475

第一章 简答试题

高考数学试题的题型从 1983 年开始变化较大， 1983 年开始有选择题，1984 年开始有简答题. 有了这两种题型之后，数学试题的阵容基本上固定下来了。

选择题和简答题主要考查学生的基础知识，考查教材的基本内容和学生的基本能力.所以难度较小.这些题目的特点是起点低、卡子少，是送分题. 其中简答题只要求写出答案,不要求写出过程。选择题和简答题在试题中所占的份量是很大的，从分数上看，1985年占35分,1986年占54分,1987年占分52，1988年占65分，有逐年上升的趋势. 这些试题有的直接选自课本，有的是从课本上的题目改编来的. 所以引导学生重视课本上的基础知识是十分重要的。

本章的简答题也包括填空题和日本的填框题。

第一节 立体几何试题

立体几何中的简答题为数不多。解答立体几何中简答题一要概念清楚，要牢记各个定义和公式；二要计算正确，不能粗心；三要正确表述。

【例 1】 正多面体有几种？其名称是什么？（1952 年）

［答］ 正多面体共有五种。其名称为正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体。

【例2】 写出二面角的平面角的定义。（1955年）

［答］ 从二面角的棱上任意一点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所夹的角叫做二面角的平面角。

［注］ 二面角的平面角的另一个定义在解题时十分方便，这个定义为：过二面角棱上任意一点，作棱的垂面，该垂面与两个面的交线所夹的角叫做二面角的平面角。

【例3】 已知圆柱的侧面展开图是边长为2与4的矩形，求圆柱的体积。（1984年）

［答］ $\frac{4}{\pi}$或$\frac{8}{\pi}$。

［易犯错误］ 要分两种情况。以矩形的长为母线和以宽为母线所得的结果是不一样的。

【例4】 （1）斜线和平面所成的角是这条斜线和这条斜线在平面内的射影所成的____角。

（2）空间中的两条直线如果没有公共点，则它们可能是____直线也可能是____直线。（1985年广州试题）

［答］ （1）锐。（2）异面，平行。

【例5】 在xoy平面上，四边形$ABCD$的四个顶点坐标依次为(0,0)、(1,0)、(2,1)及(0,3)。求这个四边形绕x轴旋转一周所得到的几何体的体积。（1986年）

［答］ $\frac{25}{3}\pi$。

［解］ 由图1-1知，所得到的旋转体是由一个圆台减去一个圆锥而成，故有算式。

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot2(1^2+1\cdot3+3^2)-\frac{1}{3}\cdot1^2\cdot\pi\cdot1=\frac{25}{3}\pi.$$

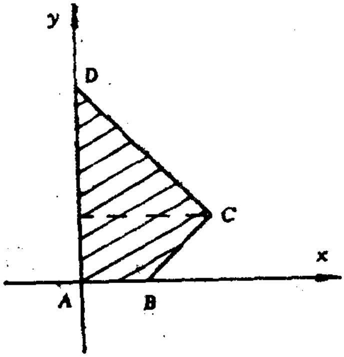

图 1-1

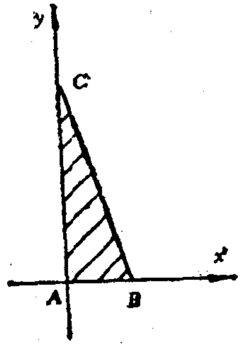

图 1-2

【附题 1】 在 xoy 平面内，$\triangle ABC$的三个顶点坐标依次为 (0,0)，(1,0)，(0,3)，将这个三角形绕 x 轴旋转一周，求所得到的几何体的体积。（1986年文科试题）

[解] $V=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 3^2\pi=3\pi$。

【例 6】圆锥底面面积为3π，母线与底面所成的角为60°，求它的体积。（1987年文科）

[答] 3π。

[分析] 由 $\pi r^2=3\pi$ 得 $r=\sqrt{3}$。由母线与底面所成的角为 60° 可以推知母线与高的夹角必为 30°，所以高为 3，高的$\frac{1}{3}$为 1，体积为3π立方单位。

【例 7】一个正三棱台的下底和上底的周长分别是30cm和 12cm，而侧面积等于两底面积之差，求斜高。（1987年）

[分析] 由公式 $S_{下底}-S_{上底}=S_{侧}\cdot\cos\theta$（$\theta$ 为侧面与底面所成的二面角）知$\cos\theta=1$，所以 $\theta=0°$，于是此棱台的上、下底面和侧面共在一个平面内，不能成为棱台。这是一

个错误的试题。

【例 8】 一个直角三角形的两条直角边的长分别为 3cm 和 4cm，将这个直角三角形以斜边为轴旋转一周。求所得旋转体的体积。（1988年文科）

［答］ $\frac{48}{5}\pi \text{cm}^3$。

［分析］ 由图 1-3 知 $AB = 5\text{cm}$，$CD = \frac{12}{5}\text{cm}$，$AD + DB = 5$。所以所求的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot AD + \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot DB$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)(AD + DB)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{144}{25} \cdot 5$$

$$= \frac{48}{5}\pi (\text{cm}^3)。$$

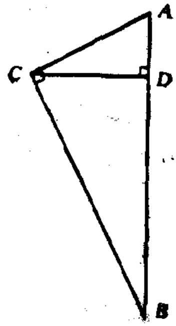

图 1-3

［易犯错误］ 不必要去算 AD 和 DB 之值，注意到它们之和等于 5 就行了。

【例 9】 如图 1-4，四棱锥 S-$ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形，侧棱 SB 垂直于底面，并且 $SB = \sqrt{3}$，用 α 表示 $\angle ASD$，求 $\sin\alpha$ 的值。（1988年）

［答］ $\frac{\sqrt{5}}{5}$。

［分析］ 在图 1-4 中，因为 SB 是平面 AC 的垂线，所以 AB 为 SA 在平面 AC 内的射影，又因为 $AD \perp AB$，所以

由三垂线定理知 $AD\perp SA$，于是 $\triangle SAD$ 为直角三角形。在 $\mathrm{Rt}\triangle SAD$ 中，可算得 $SA=2$，$SD=\sqrt{5}$，所以

$$\sin\alpha=\sin\angle ASD=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【附题 2】 在下列 $\boxed{}$ 中，填上适当的数字，考虑如图 1-5 那样的立体图形，三边 AB、DC、EF 相互平行，$ABCD$ 是长方形，设 $AB=9$，$BC=8$，$EF=3$，$EA=ED=FB=$

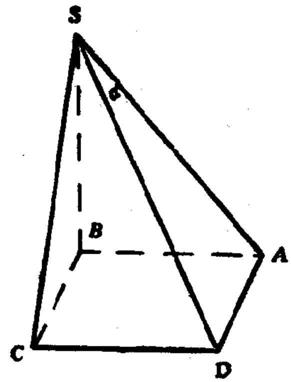

图 1-4

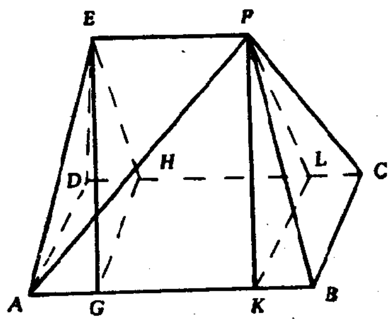

图 1-5

$=FC=13$，这时，这个立方体的体积为 $\boxed{}$；四边形 $ABFE$ 的对角线 AF 的长度是 $\boxed{}$；这个四边形的面积是 $\sqrt{\boxed{}}$；若 $\angle AFC=\alpha$ 时，则 $\cos\alpha=\boxed{}$。（1977 年日本东京大学试题）

［答］ 336；14；5760；$\frac{55}{91}$。

［分析］ 日本和苏联的立体几何题多为计算题。这一点

与我国古代数学中的几何题相类似，即形不离数，数不离形。这是我国古代数学的特点之一。图 1-5 中的几何体是个楔形，需要用分割法（我国现代一些数学家称之为“出入相补原理”）便可求得其解。略解如下：

现分割图形为四棱锥 $E\text{-}AGHD$、$F\text{-}KBCL$ 及三棱柱$FKL\text{-}EGH$。则

$$V_{E-AGHD}=V_{F-KBCL}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 8\cdot\sqrt{(13^2-4^2)-3^2}$$

$$=96,$$

$$V_{\text{柱}FKL-EGH}=\sqrt{(13^2-4^2)-3^2}\cdot 8\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=144,$$

$$V_{\text{楔形}}=2\times 96+144=366;$$

$$AF=\sqrt{6^2+13^2-3^2}=14;$$

$$S_{ABFE}=\frac{1}{2}\cdot(3+9)\cdot\sqrt{13^2-3^2}=\sqrt{5760};$$

$$\cos\alpha=\frac{14^2+13^2+(9^2+8^2)}{2\cdot 14\cdot 13}=\frac{55}{91}.$$

第二节　解析几何试题

解析几何试题并非年年都有。随着中学数学教学大纲的变动，解析几何也就时有时无。1949 年至 1952 年的高考试题有解析几何的题目，1953 年至 1964 年没有，1965 年有，1977年到现在每年都有。不管怎样，解析几何试题多年来一直十分活跃，它在高考试题中的比重仅次于代数试题。

要解好解析几何中的简答题，除了弄懂课本上的基本概

念、公式和数学规律外，还必须掌握好三角和平面几何中的基础知识。

1. 求距离试题

【例 10】 求$A(7,5)$和$B(1,-3)$两点间的距离。（1977年广西试题）

［答］ 10。

【例 11】 求出$A(-3,3)$，$B(0,-1)$，$C(1,0)$三点中每两点的距离，并指出以这三点为顶点的三角形ABC是什么样的三角形。（1977年辽宁试题）

［答］ $|AB|=5$，$|AC|=5$，$|BC|=\sqrt{2}$。三角形ABC为等腰三角形。

2. 圆锥曲线中的简答题

【例 12】 求圆锥曲线$3x^2-y^2+6x+2y-1=0$的离心率。（1985年文科）

［答］ 2。

［分析］ 变曲线方程为

$$(x+1)^2-\frac{(y-1)^2}{3}=1,$$

所以 $a^2=1$，$b^2=3$，$c^2=a^2+b^2=1+3=4$，$c=2$。所以

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2.$$

【例 13】 求曲线$y^2=-16x+64$的焦点。（1985年）

［答］ $(0,0)$。

［分析］ 变曲线方程为$y^2=-16(x-4)$，令

$$\begin{cases} x'=x-4, \\ y'=y \end{cases} \quad \text{则} \quad y'^2=-16x', \quad \begin{cases} x=x'+4, \\ y=y'. \end{cases}$$

所以抛物线焦点在新坐标系里的坐标为（$-4,0$），代入

$$\begin{cases} x=x'+4, \\ y=y' \end{cases}$$ 中得焦点坐标为$(0,0)$。

［易犯错误］ 不注意抛物线的开口方向，由$(4,0)$得到$(8,0)$，就错了。

【例 14】 已知方程$\frac{x^2}{2+\lambda}-\frac{y^2}{1+\lambda}=1$ 表示双曲线，求 λ 的范围。（1987 年）。

［答］ $\lambda<-2$，或$\lambda>-1$。

【例 15】 已知椭圆的两个焦点是$F_1(0,-1)$和$F_2(0,3)$，并且点$A(2,1)$在该椭圆上，那么，这个椭圆的方程式是____。（1987年广东试题）

［答］ $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{8}=1$。

［分析］ 由两个焦点的坐标可以求得焦距$2c=4$，所以$c=2$，椭圆的中心为F_1和F_2的中点，坐标为$(0,1)$。又因为焦点所在的直线与y轴平行，所以，设椭圆的方程为。

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{(y-1)^2}{a^2}=1.$$

以点$A(2,1)$代入，得$\frac{4}{b^2}=1, b^2=4$。又由$a^2-b^2=c^2=4$得 $a^2=8$。

［易犯错误］ 如果将椭圆方程设为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{或} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$$