研究生入学考试力学试题精选详解

（下）

材料力学
结构力学
弹性力学
流体力学

吉林科学技术出版社

研究生入学考试
力学试题精选详解

（下）

大连工学院工程力学系芮又翘等 编

吉林科学技术出版社

研究生入学考试

力学试题精选详解

（下）

大连工学院工程力学系芮又翘等　编

吉林科学技术出版社出版　吉林省新华书店发行

桦甸县印刷厂印刷

787×1092毫米16开本　23.5印张　578,000字

1986年8月第1版　1987年6月第2次印刷

印数：2,405—7,585册

统一书号：13376·46　定价：4.80元

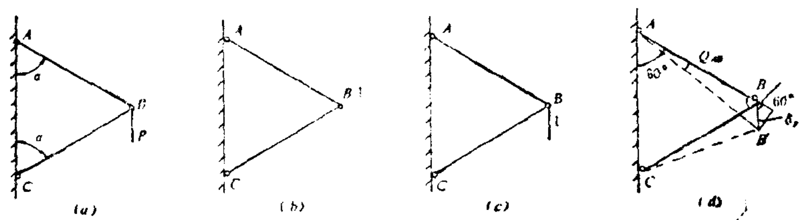
ISBN 7-5384-0037-0/N•[illegible]

目　录

第九章　用能量法计算变形

2-188图示桁架ABC，B点受垂直集中载荷P，两根杆的轴向刚度EA相等，已知$\alpha=60°$ AB杆和BC杆长为L。试求节点B的水平变位及AB杆的转角。

（郑州工学院、甘肃工业大学　1984）



题 2-188 图

解：杆的内力

$N_{AB}=P \qquad N_{BC}=-P$

1）求B点的水平位移。

在B点加一水平单位力，见图（b）。

$$N^0_{AB}=N^0_{AB}=\frac{1}{2\cos 30°}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\delta_H=\sum_{i=1}^{n}N_i^0\frac{N_iL_i}{EA}=\frac{1}{EA}[N^0_{AB}N_{AB}L+N^0_{BC}\cdot N_{BC}\cdot L]$$

$$=\frac{1}{EA}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot P\cdot L+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-P)L\right]=0$$

2）求AB杆的转角。

在B点加一铅直单位力，见图（c）。

$$N^0_{AB}=-N^0_{BC}=1$$

$$\delta_V=\frac{1}{EA}[N^0_{AB}\cdot N_{AB}\cdot L+N^0_{BC}\cdot N\cdot_{BC}\cdot L]$$

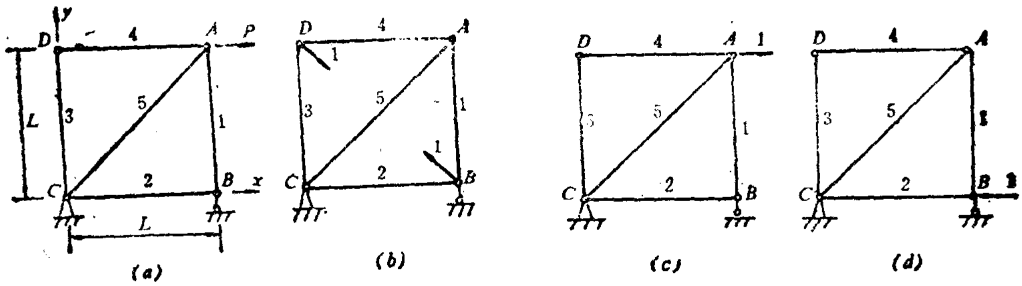
$$=\frac{1}{EA}[1\cdot P\cdot L+(-1)\cdot(-P)\cdot L]=\frac{2PL}{EA}$$

见图（d），由几何关系得AB杆转角

$$\theta_{AB}\approx \mathrm{tg}\theta_{AB}=\frac{\delta_V\sin 60°}{L}=\frac{2PL}{EAL}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}P}{EA}$$

2-189 正方形简单桁架的尺寸及支承如图示，各杆的抗拉刚度EA均相同，在节点A处作用有水平力P。求B与D两点的相对位移与AB杆的转角。

（上海交通大学）



题 2-189 图

解：在P作用下各杆的内力

$N_1=-P$　　　$N_5=\sqrt{2}P$　　　$N_2=N_3=N_4=0$

1）求B、D两点的相对位移。

在B、D两点分别加一对单位力，如图（b）所示。

$$N_1^0=N_2^0=N_3^0=N_4^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad N_5^0=1$$

$$\Delta_{B,D}=\sum_{i=1}^{n}N^0\frac{N_iL_i}{EA}=\frac{1}{EA}\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-P)\cdot L+\sqrt{2}P\times\sqrt{2}L\right]$$

$$=\frac{PL}{EA}\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2）求AB杆转角。

在A点加一水平单位力，如图（c）所示。

$N_1^0=-1$　　$N_2^0=N_3^0=N_4^0=0$　　$N_5^0=\sqrt{2}$

$$\Delta_{AX}=\frac{1}{EA}\left[(-P)(-1)\cdot L+\sqrt{2}P\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}L\right]$$

$$=\frac{PL}{EA}(1+2\sqrt{2})$$

在B点加一水平单位力，如图（d）所示。

$N_2^0=-1$　　$N_1^0=N_3^0=N_4^0=N_5^0=0$

$\Delta_{BX}=0$　　$\theta_{AB}\approx \mathrm{tg}\theta_{AB}=\dfrac{\Delta_{AX}}{L}=\dfrac{P}{EA}(1+2\sqrt{2})$

2-190 图示杆系由线弹性材料制成，三根杆的材料、截面均相同，其截面面积为A，弹性模量为E，图中几何尺寸L、β及载荷P均为已知，试将杆系的应变能表示为D点的竖直位移δ的函数，并用卡氏定理求三根杆的内力和P力作用点D处的竖直位移。

（大连工学院　1984）

解： 1）拉伸的应变能

$$U=\frac{1}{2}N\cdot\Delta L=\frac{1}{2}\Delta L\frac{\Delta L\cdot EA}{L}=\frac{\Delta L^2\cdot EA}{2L}$$

如图示，杆 2 的应变能

$$U_2=\frac{\delta^2 EA}{2L}$$

杆 1 和杆 3 的应变能

$$U_1=U_3=\frac{(\delta\cos\beta)^2 EA}{\frac{2L}{\cos\beta}}=\frac{\delta^2\cos^3\beta\cdot EA}{2L}$$

杆系的应变能

$$U=U_2+2U_1=\frac{\delta^2 EA}{2L}+2\frac{\delta^2\cos^3\beta\cdot EA}{2L}$$

$$=\frac{\delta^2 EA}{2L}(1+2\cos^3\beta)$$

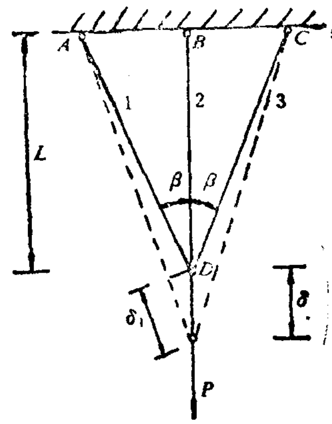
2）D点位移和三杆内力：

由卡氏第一定理知 $P=\frac{\partial U}{\partial\delta}$　　$\therefore$　$P=\frac{\delta EA}{L}(1+2\cos^3\beta)$

得　$\delta=\frac{PL}{EA\ (1+2\cos^3\beta)}$ 又由于　$N=\frac{\Delta LEA}{L}$

杆 2 的内力　　$N_2=\frac{\delta EA}{L}=\frac{P}{1+2\cos^3\beta}$

杆 1 和杆 3 的内力　　$N_1=N_3=\frac{\delta\cos\beta\cdot EA}{\frac{L}{\cos\beta}}=\frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$



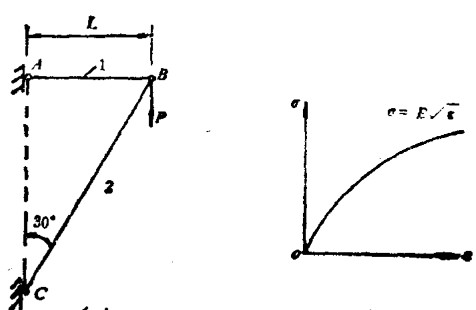
题 2-190 图

2-191图示支架，AB、BC 二杆横截面面积相同、均为 A，材料相同，其应力与应变关系均为 $\sigma=B\sqrt{\varepsilon}$，$B$ 为弹性常数，试求B点的垂直位移(用克罗第-恩格塞定理)。

解： 由平衡关系知杆 1 和杆 2 的内力

$$N_1=\frac{P}{\sqrt{3}},\ N_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}P$$

$$\therefore\ \sigma_1=\frac{P}{\sqrt{3}\,A},\sigma_2=-\frac{2P}{\sqrt{3}\,A}$$



题 2-191 图

单位体积内的余能

$$u^*=\int_0^\sigma \varepsilon d\sigma=\int_0^\sigma \frac{\sigma^2}{B^2}d\sigma=\frac{\sigma^3}{3B^2}$$

$$\text{AB杆：}\quad u_1^*=\frac{\sigma_1^3}{3B^2}=\frac{P^3}{9\sqrt{3}B^2A^3}$$

$$\text{BC杆：}\quad u_2^*=\frac{\sigma_2^3}{3B^2}=\frac{8P^3}{9\sqrt{3}B^2A^3}$$

全支架的余能

$$U^*=u_1^*LA+u_2^*\cdot 2LA$$

$$=\frac{P^3}{9\sqrt{3}B^2A^3}\cdot L\cdot A+\frac{8P^3}{9\sqrt{3}B^2A^3}\cdot 2L\cdot A$$

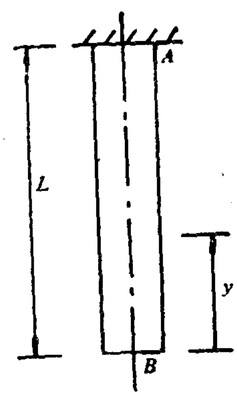
$$=\frac{17P^3L}{9\sqrt{3}B^2A^2}$$

B点的垂直位移

$$\delta=\frac{\partial U^*}{\partial P}=\frac{17P^2L}{3\sqrt{3}B^2A^2}=3.27\frac{P^2L}{B^2A^2}$$

2-192 有一悬挂的杆，假设该杆材料的应力-应变关系为 $\sigma^n=B\varepsilon$，式中的B和n均为常数。杆的长度为 L，单位体积的重量为 r，横截面面积为 A。试求该杆在自重作用下所产生的伸长量（采取求杆的余能和运用克罗第-恩格塞定理去求其伸长）。

（北京航空学院）



题 2-192 图

解： 任意高度y处，由自重引起的横截面上的轴力和正应力

$$N=\gamma\cdot A\cdot y\qquad \sigma=\gamma y$$

又 $\varepsilon=\dfrac{\sigma_n}{B}$

则单位体积内的余能

$$u^*=\int_0^\gamma \varepsilon d\sigma=\int_0^\sigma \frac{\sigma^n}{B}d\sigma=\frac{\sigma^{n+1}}{(n+1)B}$$

全杆的余能：

$$U^*=\int_0^L u^*Ady=\int_0^L\frac{\sigma^{n+1}}{(n+1)B}Ady$$

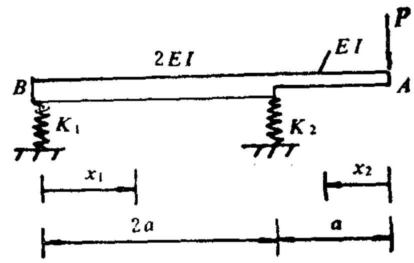
用克罗第-恩格塞定理求 B 点位移，即全杆的伸长量

$$\delta=\frac{\partial U^*}{\partial N}=\int_0^L\frac{\partial}{\partial N}\left[\frac{\sigma^{n+1}}{(n+1)B}A\right]dy=\int_0^L\frac{d}{d(\gamma Ay)}\left[\frac{(\gamma y)^{n+1}}{(n+1)B}A\right]dy$$

$$=\int_0^L\frac{\gamma^n y^n}{B}dy=\frac{\gamma^n L^{n+1}}{(n+1)B}$$

2-193 已知梁的抗弯刚度 EI 和支座的弹簧刚度 K_1 及 K_2（引起单位变形所需要的力），试用卡氏定理求 A 点挠度。

（甘肃工业大学　1984）



题 2-193 图

解：支反力

$$R_B=\frac{P}{2}(\downarrow)\qquad R_C=\frac{3}{2}P(\uparrow)$$

弹簧支座变形

$$\delta_B=\frac{R_B}{K_1}=\frac{P}{2K_1}\quad \delta_C=\frac{R_C}{K_2}=\frac{3P}{2K_2}$$

支座变形能

$$U_B=\frac{1}{2}\delta_B\cdot R_B=\frac{1}{2}\frac{P}{2K_1}\cdot\frac{P}{2}=\frac{P^2}{8K_1}$$

$$U_C=\frac{1}{2}\delta_C R_C=\frac{1}{2}\cdot\frac{3P}{2K_2}\cdot\frac{3}{2}P=\frac{9P^2}{8K_2}$$

梁的弯矩方程，如图所示。

$$M(x_1)=-\frac{P}{2}x_1$$

$$M(x_2)=-Px_2$$

梁的变形能 $U_{AB}=\dfrac{1}{2\times 2EI}\displaystyle\int_0^{2a}\left(-\frac{P}{2}x_1\right)^2dx_1$

$$+\frac{1}{2EI}\int_0^a(-Px_2)^2dx_2$$

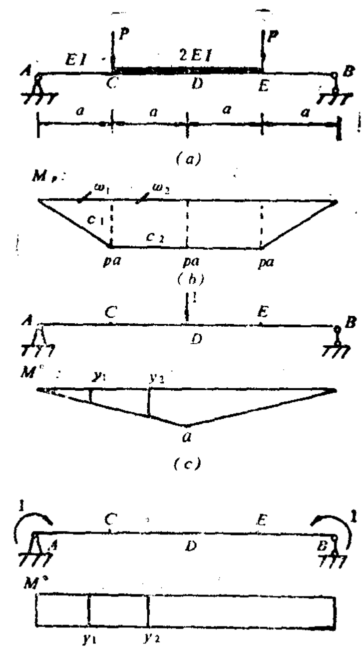
$$=\frac{P^2a^3}{6EI}+\frac{P^2a^3}{6EI}=\frac{P^2a^3}{3EI}$$

总变形能 $U=U_{AB}+U_B+U_C=\dfrac{P^2a^3}{3EI}+\dfrac{P^2}{8}\left(\dfrac{1}{K_1}+\dfrac{9}{K_2}\right)$

用卡氏定理求A点挠度

$$y_A=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{2Pa^3}{3EI}+\frac{P}{4}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{9}{K_2}\right)\ (\downarrow)$$

2-194 图示变截面梁，长度 a、载荷 P 以及刚度 EI 均为已知。试求 D 点处的挠度和 A 截面的转角。



题 2-194 图

解：用图乘法。作 P 引起的弯矩图，如图（b）所示。

得　$\omega_1=\frac{1}{2}Pa\cdot a=\frac{1}{2}Pa^2\qquad \omega_2=Pa\cdot a=Pa^2$

1）求 D 点挠度。在 D 点加一单位力，作弯矩图 M^0，如图（c）所示。

得　$y_1=\frac{1}{3}a\qquad y_2=\frac{3}{4}a$

$$y_D=2\left\{\frac{1}{EI}\cdot\omega_1\cdot y_1+\frac{1}{2EI}\omega_2 y_2\right\}=\frac{2}{EI}\ \frac{1}{2}Pa^2\cdot\frac{1}{3}a+\frac{2}{2EI}\cdot Pa^2\cdot\frac{3}{4}a$$

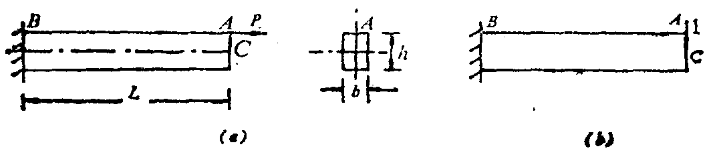
$$=\frac{13Pa^3}{12EI}$$

2）求A截面转角，利用对称性，在A、B两截面加一对转向相对的单位力偶，作弯矩图M^0，如图（d）所示。

得 $y_1=y_2=1$

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\omega_1y_1+\frac{1}{2EI}\omega_2y_2=\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}Pa^2=\frac{1}{2EI}\cdot Pa^2=\frac{Pa^2}{EI}$$

2-195 图示悬臂梁。尺寸L、b、h，材料弹性模量E和作用于A点的载荷P均为已知。试求：1）上层纤维AB的伸长量；2）用能量法求C点的铅直位移。



题 2-195 图

解： 1）AB层上各点正应力相同

$$\sigma=\frac{P}{A}+\frac{P\cdot\frac{h}{2}}{W}=\frac{P}{bh}+\frac{P\frac{h}{2}}{\frac{bh^2}{6}}=\frac{4P}{bh}$$

$$\Delta L_{AB}=\varepsilon L=\frac{\sigma}{E}L=\frac{4PL}{Ebh}$$

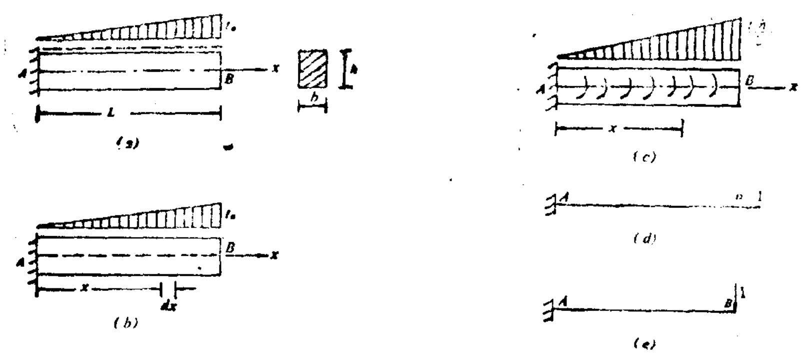
2）在C点加一铅垂方向单位力，如图（b）所示。

$$M=-P\frac{h}{2},\qquad M^0=-x$$

$$\delta=\frac{1}{EI}\int_0^L(-P\frac{h}{2})(-x)dx=\frac{PhL^2}{4EI}=\frac{3PL^2}{Ebh^2}$$

2-196 图示悬臂梁的上层表面作用有线性分布剪切力，若L、b、h、t_0和材料的弹性模量E均为已知。求梁自由端B点的位移。

（中国科技大学 1983）



题 2-196 图

解： 把载荷 t 简化到梁的轴线上，得一个三角形分布的轴向载荷，如图（b）所示，和一个三角形分布的分布力偶，如图（c）所示。

1）求 B 点水平位移，梁承受轴向力如图（b）所示，用单位力法，在 B 点加一水平单位力，如图（d）所示。

$$N(x)=\left(t_0+\frac{t_0}{L}x\right)\cdot\frac{1}{2}(L-x)=\frac{t_0}{2L}(L^2-x^2)\quad N^0(x)=1$$

$$\delta_H=\int_0^L\frac{1}{EA}N(x)\cdot N^0(x)dx=\int_0^L\frac{1}{EI}\cdot\frac{t_0}{2L}(L^2-x^2)dx$$

$$=\frac{tL^2}{3EA}=\frac{tL^2}{3Ebh}\quad(\rightarrow)$$

2）求 B 点的铅直位移，梁承受分布弯曲力偶。如图（c）所示。在 B 点加一铅垂方向单位力，如图（e）所示。

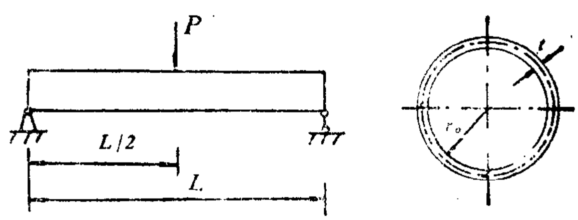
$$M(x)=-\int_x^L\frac{t_0h}{2}\ \frac{x}{L}dx=-\frac{t_0h}{4L}\ (L^2-x^2)\quad M^0(x)=-(L-x)$$

$$\delta_V=\int_0^L\frac{1}{EI}M(x)M^0(x)=\int_0^L\frac{1}{EI}\left[-\frac{t_0h}{4L}(L^2-x^2)\right]\left[-(L-x)\right]dx$$

$$=\frac{5ht_0L^3}{48EI}=\frac{5t_0L^3}{4Ebh^2}\quad(\downarrow)$$

2-197 简支梁跨中受集中力 P 作用，如图所示。该梁的横截面为薄壁圆环。载荷 P，梁跨长 L，截面平均半径 r_0，壁厚 t 以及材料的弹性模量 E 与剪切弹性模量 G 均为已知。试推导考虑弯曲和剪切时梁中点的挠度 δ 的表达式。

（南京航空学院　1982）



题 2-197 图

解： 用单位力法

$$\delta=\int_0^L\frac{MM^0}{EI}\ dx+\int_0^L\frac{Q\alpha_sQ^0}{GA}dx$$

对薄壁圆环截面 $\alpha_s=2$

因为结构和交力对称，只取左半梁计算。

$$M=\frac{1}{2}Px\qquad M^0=\frac{x}{2}\qquad Q=\frac{1}{2}P\qquad Q^0=\frac{1}{2}$$

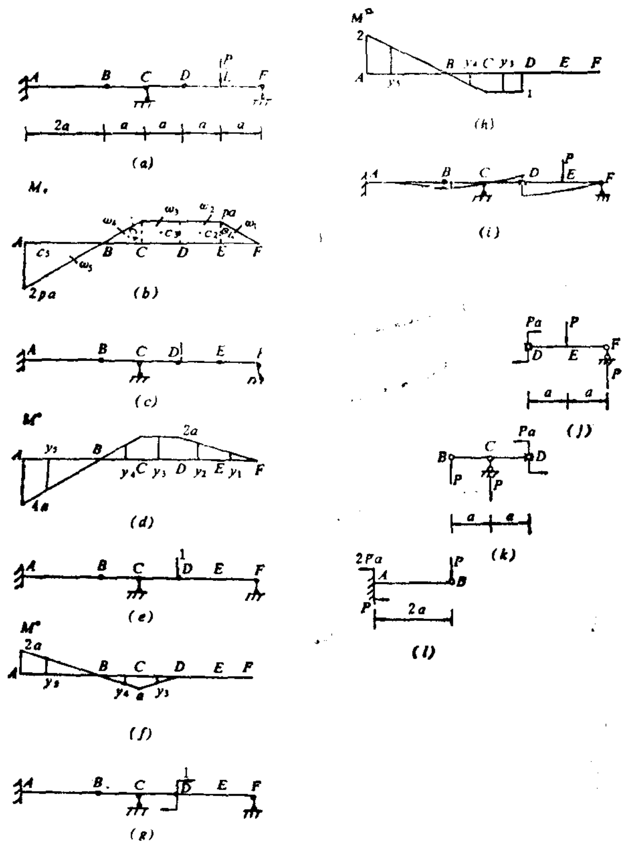
$$\delta=\frac{2}{EI}\int_0^{L/2}\frac{P}{2}x\cdot\frac{x}{2}dx+\frac{2\alpha_s}{GA}\int_0^{L/2}\frac{1}{2}P\cdot\frac{1}{2}dx$$

$$=\frac{PL^3}{48EI}+\frac{\alpha_sPL}{4GA}=\frac{PL^3}{48E\cdot\pi r_0{}^3t}+\frac{\alpha_sPL}{8G\pi r_0t}=\frac{PL^3}{48E\pi r_0{}^3t}\left(1+\frac{6\alpha_sEr_0{}^2}{GL^2}\right)$$

α_s 为截面系数

$$\left[\alpha_s=\frac{A}{I^2}\int_A\frac{S^2}{b^2}dA\quad 对薄壁圆环\alpha_s=2\right]$$

2-198 图示多跨静定梁，B处为无弯矩约束，D处为无剪力约束，梁上荷载为P。若



题 2-198 图

梁处于线弹性状态，试求D处的挠度和转角。规定由莫尔定理求解。

（湖南大学1982）

解： 作由载荷P引起的弯矩图，如图（b）所示。并得各段弯矩图面积：

$$\omega_1 = \frac{1}{2}Pa^2 \qquad \omega_2 = Pa^2 \qquad \omega_3 = Pa^2$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2}Pa^2 \qquad \omega_5 = 2Pa^2$$

在DF梁的D截面加一单位力，如图（c）所示，作此单位力引起的弯矩图，如图（d）所示。

M_P图各段面积形心所对应的M^0值

$$y_1 = \frac{2}{3}a \qquad y_2 = \frac{3}{2}a \qquad y_3 = 2a \quad y_4 = \frac{4}{3}a \qquad y_5 = \frac{8}{3}a$$

DF梁的D截面挠度

$$\delta_{D右} = \frac{1}{EI}[\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4 + \omega_5 y_5)$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}Pa^2 \cdot \frac{2}{3}a + Pa^2 \cdot \frac{3}{2}a + Pa^2 \cdot 2a + \frac{1}{2}Pa^2 \cdot \frac{4}{3}a\right.$$

$$+2Pa^2\cdot\frac{8}{3}a\Big]=\frac{59Pa^3}{6EI}\quad(\downarrow)$$

在BD梁的D截面加一单位力，如图（e）所示，此单位力引起的弯矩图，如图（f）所示。

M_P图各段面积形心所对应的M^0值

$$y_1=y_2=0\qquad y_3=\frac{a}{2}\qquad y_4=\frac{2}{3}a$$

$$y_5=\frac{4}{3}a$$

BD梁的D截面挠度

$$\delta_{D左}=-\frac{1}{EI}\left[Pa^2\cdot\frac{a}{2}+\frac{1}{2}Pa^2\cdot\frac{2}{3}a+2Pa^2\cdot\frac{4a}{3}\right]=-\frac{7Pa^3}{3EI}\quad(\uparrow)$$

在D处加一单位力偶，如图（g）所示，由此产生的弯矩图如图（h）所示。

$$y_1=y_2=0\qquad y_3=1$$

$$y_4=\frac{2}{3}\qquad y_5=\frac{4}{3}$$

D截面的转角

$$\theta_D=-\frac{1}{EI}\left[Pa^2\cdot1+\frac{1}{2}Pa^2\cdot\frac{2}{3}+2Pa^2\cdot\frac{4}{3}\right]=-\frac{4Pa^2}{EI}\quad(\nearrow)$$

多跨梁变形后挠曲线大致形状如图（i）所示。

本题还可用初参数法求解：

三段梁的结构及受力如图（j）、（k）、（e）所示。

AB梁： $EIy_B=-\frac{2Pa(2a)^2}{2}+\frac{P(2a)^3}{6}=-\frac{8}{3}Pa^3$

BD梁：$EIy_C=EIy_B+EI\theta_B\cdot a+\frac{Pa^3}{6}=0$

$$EI\theta_B\cdot a=-EIy_B-\frac{Pa^2}{6}=\frac{8}{3}Pa^3-\frac{Pa^3}{6}=\frac{15}{6}Pa^3\qquad EI\theta_B=\frac{15}{6}Pa^2$$

$$EI\theta_D=EI\theta_B+\frac{P(2a)^2}{2}-\frac{Pa^2}{2}=\frac{15}{6}Pa^2+2Pa^2-\frac{1}{2}Pa^2=4Pa^2$$

得D截面转角 $\theta_D=\frac{4Pa^3}{EI}\quad(\nearrow)$

又 $EIy_D=EIy_B+EI\theta_B(2a)+\frac{P(2a)^3}{6}-\frac{Pa^3}{6}$

$$=-\frac{8}{3}Pa^2+\frac{15}{6}Pa^2(2a)+\frac{8Pa^3}{6}-\frac{Pa^3}{6}=\frac{7}{2}Pa^3$$

得D截面挠度 $y_{B左}=\frac{7Pa^3}{2EI}\quad(\uparrow)$

LF梁：$EIy_F=EIy_D+EI\theta_D(2a)+\dfrac{Pa(2a)^2}{2}-\dfrac{Pa^3}{6}=0$

$$EIy_D=-EI\theta_D+(2a)-\frac{Pa(2a)^2}{2}+\frac{Pa^3}{6}$$

$$=-4Pa^2(2a)-2Pa^3+\frac{Pa^3}{6}=-\frac{59}{6}Pa^3$$

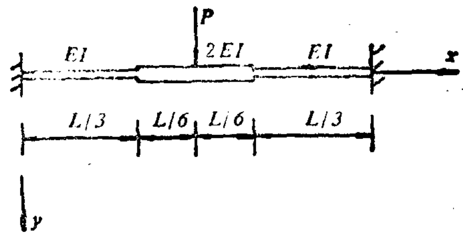
得D截面挠度　$y_{D右}=-\dfrac{59Pa^3}{6EI}$ (↓)

2-199　试用瑞利-里兹法求图示两端固定的阶梯形变截面梁跨中点处的挠度δ。

设位移函数：$y=A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$

$(0\leqslant x\leqslant\dfrac{L}{2})$

(华南工学院　1983)



题 2-199 图

解：由于结构和受力对称，取半跨梁计算。

已知：$y=A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4$

按边界条件定式中各常数

$x=0$时　　$y=0$，　　$y'=0$

得　$A_3=A_4=0$　　　$x=\dfrac{L}{2}$时　　$y'=0$，$y=\delta$

得　$A_1=-\dfrac{16\delta}{L^3}$　　　$A_2=\dfrac{12\delta}{L^2}$

得挠曲线方程式

$$y=-\frac{16\delta}{L^3}x^3+\frac{12\delta}{L^2}x^2=\frac{4\delta x^2}{L^3}(3L-4x)$$

$$y''=\frac{24\delta}{L^3}(L-4x)$$

总势能　　$\Pi=U+V$

$$=2\left[\int_0^{L/3}\frac{M^2(x)}{2EI}dx+\int_{L/3}^{L/2}\frac{M^2(x)}{2\times2EI}dx\right]-P\delta$$

$$=2\left[\int_0^{L/3}\frac{1}{2}EI(y'')^2dx+\int_{L/3}^{L/2}EI(y'')^2dx\right]-P\delta$$

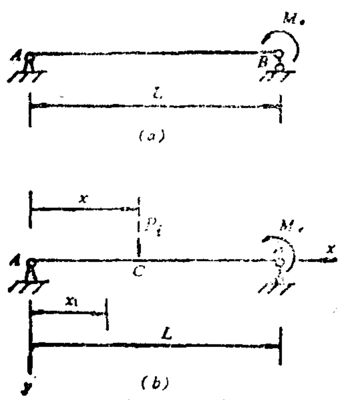
$$=2EI\left[\int_0^{L/3}\frac{24^2\delta^2}{2L^6}(L-4x)^2dx+\int_{L/3}^{L/2}\frac{24^2\delta^2}{L^6}(L-4x)^2dx\right]-P\delta$$

$$=142.2\frac{EI\delta^2}{L^3}-P\delta$$

按最小势能原理

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta}=0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta}=284.4\frac{EI\delta}{L^3}-P=0$$

得梁跨中点挠度 $\delta=0.00352\dfrac{PL^3}{EI}$



题 2-200 图

2-200 图示简支梁的右端作用一力偶 Me，试用卡氏定理求该梁的挠曲线方程式。梁的EI为已知。

（北京航空学院）

解：在梁的任意横截面 x 处，暂加一竖向集中载荷 P_i，如图（b）所示。

支反力 $R_A=\dfrac{M_e}{L}+P_i\left(1-\dfrac{x}{L}\right)$ （↑）

$R_B=\dfrac{M_e}{L}-\dfrac{x}{L}P_i$ （↓）

AC 段：$M(x_1)=\dfrac{M_e}{L}x_1+P_i\left(1-\dfrac{x}{L}\right)x_1$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial P_i}=\left(1-\frac{x}{L}\right)x_1$$

CB段 $M(x_1)=\dfrac{M_e}{L}x_1+P_i\left(1-\dfrac{x}{L}\right)x_1-P_i(x_1-x)$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial P_i}=\left(1-\frac{x}{L}\right)x_1-(x_1-x)$$

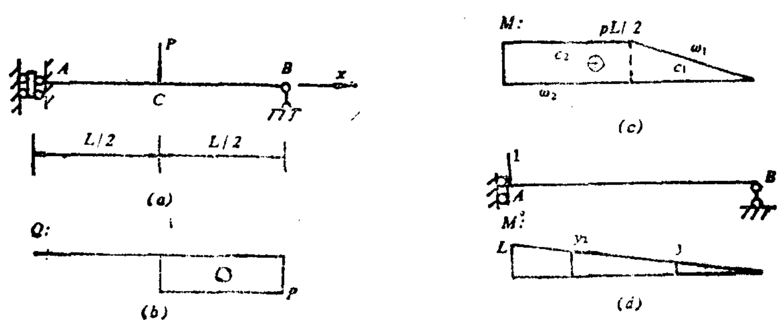
C点挠度，（令$P=0$） $y=\dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^x\frac{M_e}{L}x_1\left(1-\frac{x}{L}\right)x_1dx_1$

$$+\frac{1}{EI}\int_x^L\frac{M_e}{L}x_1\left[\left(1-\frac{x}{L}\right)x_1-x_1+x\right]dx_1$$

$$y=\frac{M_ex}{6EIL}(L^2-x^2)$$

因为C点是任取的，所以此式即为AB梁的挠曲线方程式。

2-201 图示AB梁，A端固定在滑块上，在跨中 C 截面处承受集中载荷P的作用，梁的抗弯刚度 EI为常量。1）试作出梁的剪力和弯矩图。2）计算截面A的垂直位移。3）写出用积分法求解时的边界条件和连续条件。



题 2 20. 图

解：支反力　　$R_B = P$　　$M_A = \frac{1}{2}PL$

1）作Q、M图，见图（b）、（c）。

2）用图乘法求y_A，见图（c）、（d）

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\times\frac{P}{2}L\cdot\frac{L}{2} = \frac{PL^2}{8} \qquad \omega_2 = \frac{P}{2}L\cdot\frac{L}{2} = \frac{PL^2}{4}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}L = \frac{L}{3} \qquad y_2 = \frac{3L}{4}$$

$$y_A = \frac{1}{EI}[\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^2}{8}\cdot\frac{L}{3} + \frac{PL^2}{4}\cdot\frac{3L}{4}\right] = \frac{11PL^3}{48EI} \quad (\downarrow)$$

3）边界条件和连续条件

微分方程　　$EIy_1'' = \frac{1}{2}PL$

$$EIy_1' = \frac{1}{2}PLx + C_1 \qquad EIy_1 = \frac{1}{4}PLx^2 + C_1x + D_1$$

$$EIy_2'' = \frac{1}{2}PL - P\left(x - \frac{L}{2}\right) \qquad EIy_2' = \frac{1}{2}PLx - \frac{1}{2}P\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + C_2$$

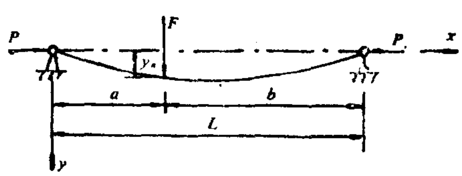
$$EIy_2 = \frac{1}{4}PLx^2 - \frac{1}{6}P\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 + C_2x + D_2$$

确定积分常数的边界条件和连续条件

在$x_1 = 0$处　　$y_1' = 0$　　在$x_2 = L$处　　$y_2 = 0$

在$x_1 = x_2 = \frac{L}{2}$处　　$y_1' = y_2'$　　$y_1 = y_2$

2-202　假定图示纵横弯曲杆(梁柱)的挠曲轴方程式可以近似地用正弦曲线$y = \delta\sin\frac{\pi x}{L}$代替，试用能量法证明其挠曲轴最终表达式是：



题 2-202 图

$$y = \frac{\delta_0}{1 - \frac{P}{P_K}}\sin\frac{\pi x}{L} \qquad (1)$$

在式（1）中，$P_K = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$，E及$I$分别是弹性模量和惯性矩。$\delta_0$是当$P = 0$时的横向形变

$$\delta_0 = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi a}{L}$$

如果$a = b = L/2$，并采用$\delta_0 = \frac{FL^3}{48EI}$，试证明其最大法向应力绝对值

$$|\sigma_{max}| = \frac{P}{A} + \frac{FL}{4W}\left(1 + \frac{0.822\,\frac{P}{P_K}}{1-\frac{P}{P_K}}\right) \tag{2}$$

式中A及W为杆的横截面积及抗弯截面模量。 （重庆大学1983）

解： 1）挠曲线方程式的证明

用最小势能原理求解

即 $\Pi = U - \sum_{i=1}^{n} P_i \delta_i \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0$

已知 $y = \delta \sin \frac{\Pi x}{L}$

故 $y' = \delta \frac{\Pi}{L} \cos \frac{\Pi x}{L} \qquad y'' = -\delta \frac{\Pi^2}{L^2} \sin \frac{\Pi x}{L}$

杆的变形能

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(EIy'')^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2}\int_0^L (y'')^2 dx$$

$$= \frac{EI}{2}\int_0^L \delta^2 \frac{\Pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\Pi x}{L} dx = \frac{\Pi^4 EI}{4L^3}\delta^2$$

杆a处的横向变形 $y_a = \delta \sin \frac{\Pi a}{L}$

杆的纵向变形

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_0^L (y')^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L \delta^2 \frac{\Pi^2}{L^2} \cos^2 \frac{\Pi x}{L} dx = \frac{\Pi^2}{4L}\delta^2$$

总势能 $\Pi = U - F\cdot y_a - P\Delta$

$$= \frac{\Pi^4 EI}{4L^3}\delta^2 - F\delta \sin \frac{\Pi a}{L} - P\frac{\Pi^2}{4L}\delta^2$$

由于 $\frac{d\Pi}{d\delta} = 0 \qquad \frac{\Pi^4 EI}{2L}\delta - F \sin \frac{\Pi a}{L} - P\frac{\Pi^2}{2L}\delta = 0$

得 $$\delta = \frac{F\cdot \sin \frac{\Pi a}{L}}{\frac{\Pi^4 EI}{2L^3} - P\cdot\frac{\Pi^2}{2L}} = \frac{2FL \sin \frac{\Pi a}{L}}{\Pi^2\left(\frac{\Pi^2 EI}{L^2} - P\right)}$$

$$= \frac{2FL \sin \frac{\Pi a}{L}}{\pi^2 (P_K - P)} = \frac{2FL^3 \sin \frac{\Pi a}{L}}{\pi^4 EI\left(1 - \frac{P}{P_K}\right)}$$