职工中等专业学校试用教材学习指导书

解析几何

IEXIJIHE

XUEXI ZHIDAOSHU

32
12

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书

解 析 几 何

职工中等专业学校教材编写组 编

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书
解　析　几　何
职工中等专业学校教材编写组　编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号）
新华书店经销　　昆山县亭林印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/32　印张 2.75　字数 66,000
1987年8月第1版　1987年8月第1次印刷
印数：1—9500
统一书号：ISBN 7-80513-009-4/G·03
定价：0.70元
《科技新书目》148—273

编 写 说 明

这本学习指导书是根据职工中等专业学校数学教材《解析几何》编写的，主要供职工中等专业学校学员学习时使用，也可以供有关教师备课时参考。编写本书的目的，在于帮助学员解决学习时可能遇到的困难，使他们能重点地、系统地和较深入地领会教材内容。鉴于上述目的，编写时按教材顺序分章编写，采用了全面指导、重点解释的方法，使重点内容得到强化，难点转化为易，并着重引导解题方法，总结解题规律。各章还备有自我检查题，并附解答，供学员检查学习效果。

本册由何育成同志编写，初稿编成后，根据黄中元、项复民等同志的审阅意见，进行了充实、修改。由于时间和水平所限，书中错误、缺点之处敬请批评指正。

编 者 1986.7

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　直　　线

一、学 习 要 求

1．明确有向线段的概念，深刻理解、熟练掌握线段定比分点坐标公式、两点间距离公式。

2．明确直线的倾斜角、斜率和截距等概念，熟练掌握过已知两点的直线的斜率公式，以及直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般形式的方程，熟练掌握平行于坐标轴及坐标轴本身的直线方程，并能根据已知条件求出直线方程。

3．能正确运用直线的夹角公式、两直线平行和垂直的条件和点到直线的距离公式，会求两条相交直线的交点。

4．能基本上了解解析几何的基本思想，并能初步地用解析法研究几何问题。

二、学 习 指 导

本章是全书的基础，概念、公式较多，因此，正确理解每一个概念，每一个公式，并在理解的基础上记住这些公式，学会运用这些公式是学好本章的关键。

1．有向线段、定比分点

(1) 有向线段

在平面几何中，直线只是考虑它的位置，线段也只是考虑它的位置和长度，而不考虑它们的方向。但在解析几何中，我们常

常要明确直线和线段的方向，这样就产生了有向直线及有向线段这两个概念。

有向直线是规定了正方向的直线，有向线段是规定了起点和终点的线段，它们都具有方向性。有向线段的正、负是由它所在的有向直线或与它平行的有向直线的方向所决定的。

$|AB|$表示有向线段$\overline{AB}$的长度，它是非负数，AB表示有向线段$\overline{AB}$的数量，是$\overline{AB}$的长度前面加上正负号的实数，这是$|AB|$与AB两者的区别。而有向线段$\overline{AB}$的长度$|AB|$就是它数量AB的绝对值，这是二者之间的联系。

(2) 两点间的距离公式

两点间的距离公式：当$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

这是解析几何中的基本公式，它贯穿在整个教材中，应用的范围很广。因此，需要熟练地掌握。在求两点间的距离时，有下列几种特殊情况：

① 当$M_1(x_1, y_1)$与$M_2(x_2, y_2)$连结的线段与x轴平行时，由于$y_1=y_2$，于是

$$|M_1M_2| = |x_1-x_2|;$$

② 当M_1M_2与y轴平行时，由于$x_1=x_2$，于是

$$|M_1M_2| = |y_1-y_2|;$$

③ 点$M_0(x_0, y_0)$与原点的距离为

$$d=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\text{。}$$

(3) 线段的定比分点

有向线段的定比分点概念和定比分点公式，是本章的重点内容之一，由于λ表示的是两条有向线段的数量之比，λ可能为正，也可能为负。这与平面几何中，线段的比指的是它们长度之比有很大的区别。要逐步深化和掌握它，这部分内容要认真学

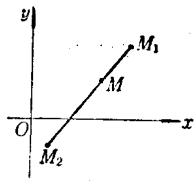
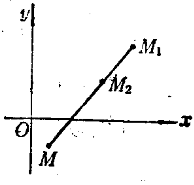
习，细心领会。

在学习中要注意下面三点：

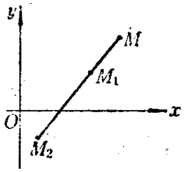
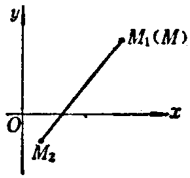
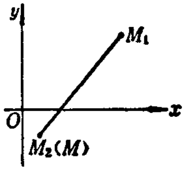
① 点 M 分 $\overline{M_1M_2}$ 所成的比，指的是点 M 分 $\overline{M_1M_2}$ 为两有向线段的数量之比而不是长度之比，这一点要特别细心领会，不可混淆。

② 在式子 $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$ 中，要注意 $\overline{M_1M}$ 是以 M_1 为起点，M 为终点。$\overline{MM_2}$ 是以 M 为起点，M_2 为终点。从分子到分母有 $M_1\to M$，$M\to M_2$ 的顺序，不管点 M 是内分点还是外分点同样如此，这是不能弄错的。当点 M 为内分点时，λ 为正；当 M 为外分点时，λ 为负($\lambda\neq-1$)。λ 的取值与分点 M 的位置之间的关系见表 1 所示。

表 1

分点位置		图示	$\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$
内分点			$\lambda>0$
外分点	M 在 M_1M_2 的延长线上		$\lambda<-1$

(续表)

<table>
<tr><th colspan="2">分　点　位　置</th><th>图　示</th><th>$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$</th></tr>
<tr><td>外
分
点</td><td>M 在 M_2M_1
的延长线上</td><td>
</td><td>$-1<\lambda<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">分点与一
端重合</td><td>M 与 M_1 重合</td><td>
</td><td>$\lambda=0$</td></tr>
<tr><td>M 与 M_2 重合</td><td>
</td><td>λ 不存在</td></tr>
</table>

③ 在公式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

中，与 λ 相乘的是有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 的终点 M_2 的坐标。

当 $\lambda=1$ 时，可得到线段中点坐标公式：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

这是解析几何中的基本公式之一，应用也十分广泛，我们应熟练地掌握这个公式。

2．直线方程

直线方程是本章的重点，在充分理解"直线的方程"和"方程的直线"这两个概念的基础上，要熟练地掌握直线方程的几种特殊形式，及这几种形式与直线方程的一般形式之间的相互转化，并能根据已知条件，求出直线的方程。为达到后一个目的，需要我们对直线方程的几种特殊形式的结构特点，使用的条件和范围都要熟练地掌握，并能灵活运用，做到这一点，有时也是不太容易的，要下一定功夫才行。

(1) 直线的方程和方程的直线

直线是由无数多个点组成的，如果直线上每一个点的坐标都能满足某一个方程（二元一次方程），就是说，直线上每一个点的坐标都是方程的一组解；反过来，坐标满足这个方程的点，都在这条直线上，就是说，以方程的解作为坐标的点都在直线上。这时我们说，这个方程叫做直线的方程，而这条直线叫做这个方程的直线。

这样，我们就把几何中的直线与代数中的二元一次方程建立起对应关系，研究直线性质的几何问题就转化为研究方程的代数问题了。

(2) 直线的倾斜角和斜率

直线的倾斜角和斜率都是反映直线相对于 x 轴正方向倾斜程度的。用斜率来研究直线相对于 x 轴的倾斜程度及直线的其它性质更加方便。同时，斜率还是直线方程各种形式的基础，也是研究两条直线位置关系的基础。因此，它是重要的概念，经过两点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率公式：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

也是重要的公式之一，必须熟练地掌握。

倾斜角的数值范围是 $0\leqslant\alpha<180°$，这是由定义所决定的。且每条直线都有它的倾斜角。

直线的斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha$，当直线与 x 轴垂直时，即 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，此时直线的斜率不存在。所以，不是任何一条直线都有斜率的。

斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，分子中的纵坐标和分母中的横坐标可同时分别交换，即 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$。公式还告诉我们，虽然直线的斜率是它倾斜角的正切，但并不需要知道直线倾斜角，通过公式就能求出它的斜率。

(3) 直线方程的几种形式

① 直线方程的几种形式是本章的核心，在直线方程的四种特殊形式中，以点斜式为基础。

已知直线上一点 (x_0, y_0)，斜率为 k，那末该直线的方程为

$$y-y_0=k(x-x_0)。$$

这就是直线方程的点斜式。如果直线经过的点是 $(0, b)$，由点斜式可得直线的方程为

$$y=kx+b$$

这就是直线方程的斜截式。可以说，直线方程的斜截式是点斜式的特殊情况。

直线方程的两点式是由点斜式推出来的(见课本)。若知道直线与坐标轴的交点坐标 $(a, 0)$ 及 $(0, b)$，由两点式可推出直线的截距式。因此，可以认为截距式是两点式的特殊情况。

当直线的斜率不存在时，就不能用点斜式、斜截式、两点式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

及截距式求它的方程，这时直线方程为 $x=x_0$，它是一条与 y 轴平行的直线。在知道直线与坐标轴围成的图形的面积、周长等时，常用截距式求出直线的方程。

通过对直线方程四种形式的学习，我们可以得出：直线方程都是关于 x、y 的一次方程。

② 直线方程的一般式

$$Ax+By+C=0 \quad (A,\ B\text{ 不同时为零}),$$

当 $B\neq 0$ 时，直线的斜率是 $-\frac{A}{B}$，在 y 轴上的纵截距是 $-\frac{C}{B}$；当 $B=0$ 时，由于 $A\neq 0$，方程化为

$$x=-\frac{C}{A}$$

它是一条与 y 轴平行的直线，通过对直线方程一般形式的讨论，我们可以得出：关于 x、y 的一次方程都表示一条直线。一般说来，在求出直线方程之后，都要将其化成一般式。

现将上面讨论的结果列成表 2 所示。

表 2

名称	方程	说明	附注
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	$(x_0,\ y_0)$ 是已知点坐标，k 为直线斜率	斜率不存在的直线不可用
斜截式	$y=kx+b$	k 为直线斜率 b 为纵截距	同上
两点式	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	(x_1,y_1)，(x_2,y_2) 为已知点坐标	平行于坐标轴的直线不可用
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a，b 分别为直线的横、纵截距	平行于坐标轴或过原点的直线不可用

（续表）

名　称	方　　程	说　　明	附　　注
一般式	$Ax+By+C=0$	$-\frac{A}{B}$为直线的斜率 $(B\neq0)$ $-\frac{C}{A}$、$-\frac{C}{B}$分别为直线的横、纵截距 $(A,B\neq0)$	A、B不同时为零
与x轴平行的直线	$y=y_0$	y_0是直线上任意一点的纵坐标	x轴本身的方程是$y=0$
与y轴平行的直线	$x=x_0$	x_0是直线上任意一点的横坐标	y轴本身的方程是$x=0$

③ 直线的横截距指的是直线与x轴交点的横坐标，直线的纵截距指的是直线与y轴交点的纵坐标。因此，它们的数值可能为正，也可能为负。不要误认为截距是直线与坐标轴交点到原点的距离，把其数值也误认为都应该是正数。

3. 两条直线的位置关系

两条直线的位置关系也是本章的重点之一，这是由本节的内容所决定的。

(1) 两条直线的夹角

两条直线相交可形成四个角，为研究方便起见，书中给出公式

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$$

中的θ是指两直线相交形成的四个角中的锐角，并称作为两条直线的夹角。而另一对钝角的度数是$180^\circ-\theta$。因此，在使用公式时，首先要对两直线的夹角作出准确的判断。当θ接近90°时，很容易判断错误，所以，这时要格外小心。另外，在利用公式

时，有可能涉及到绝对值的一些运算规律。不清楚时，要及时复习。

(2) 两直线的平行和垂直

两直线的平行和垂直是比较重要的内容。在两条直线均有斜率的情况下，若斜率相等，则两线平行；反之，若两线平行，则斜率相等。若两条直线的斜率互为负倒数，则两线垂直；反之，若两直线垂直，则它们的斜率互为负倒数。

在特殊情况下，当两条直线的斜率均不存在时，则两线平行，反之亦然。若一条直线的斜率不存在，另一条直线斜率为零，则两直线垂直，反之亦然。

(3) 点到直线的距离

已知点 $M_0(x_0, y_0)$ 和直线 $Ax+By+C=0$，点 M_0 到直线的距离为：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}。$$

这个公式是解析几何中的基本公式之一，是求动点轨迹及解决有关距离等问题常用到的公式，必须熟练地掌握它。

若 $A=0$ 或 $B=0$ 时，公式虽然也是适用的，不过，这时不需要利用这个公式，就可以直接求出点到直线的距离，如

① 求点 $(1, -3)$ 到直线 $y=-4$ 的距离。

$$d=|-3+4|=1;$$

② 求点 $(-2, 3)$ 到直线 $x=5$ 的距离。

$$d=|-2-5|=7。$$

三、解 题 引 导*

例 1 求证三点 $A(3, 4)$、$B(0, 1)$、$C(-2, -1)$ 在同一条

* 例题中的有些解法所涉及到的知识，可能阅读时尚未学到，待以后学到时，回头再阅读。

直线上(图 1-1)。

证法一 $\because \quad |AB|=\sqrt{3^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2};$

$$|BC|=\sqrt{2^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2};$$

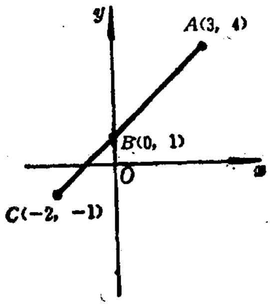


图 1-1

$$|AC|=\sqrt{(3+2)^2+(4+1)^2}=5\sqrt{2},$$

$$\therefore \quad |AC|=|AB|+|BC|。$$

即 A、B、C 三点在同一条直线上。

证法二

$$\because \quad k_{AB}=\frac{1-4}{-3}=1;$$

$$k_{BC}=\frac{-1-1}{-2}=1,$$

$$\therefore \quad k_{AB}=k_{BC}。$$

且点 B 是 AB、BC 的公共点，故 A、B、C 三点在同一条直线上。

证法三 设点 $M(0,y)$ 是 $\overline{AC}$ 上的一个分点。

$$\because \quad 0=\frac{3-2\lambda}{1+\lambda} \quad \lambda=\frac{3}{2},$$

$$\therefore \quad y=\frac{4+(-1)\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=1。$$

即点 M 的坐标是 (0, 1)，点 M 与点 B 重合。又因为点 M 在 $\overline{AC}$ 上，所以 A、B、C 三点在同一条直线上。

证法四 先求出直线 AB 的方程

$$y-4=x-3$$

即 $$x-y+1=0$$

∵ 点 $C(-2,\ -1)$ 的坐标满足上面的方程，即点 C 在直线 $x-y+1=0$ 上。

∴ A、B、C 三点在同一条直线上。

注 证明三点在同一条直线上，我们列举了四种证法，证法一是从"距离"概念出发的；证法二是从"斜率"概念出发的；证法三是从"定比分点"概念出发的；证法四是从"直线的方程"概念出发的，证法一和证法二是一般常用的证法。

例 2 已知三角形顶点是 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,\ y_3)$，求$\triangle ABC$ 重心的坐标(图1-2)。

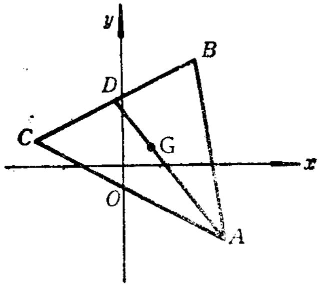


图 1-2

分析 因为三角形的重心与顶点的距离等于它与对边中点的距离的两倍，所以在图 1-2 中设 D 为 BC 中点，G 为$\triangle ABC$ 的重心，把重心 G 看作 $\overline{AD}$ 的内分点，则有

$$\lambda=\frac{AG}{GD}=2$$

将 $\lambda=2$ 代入定比分点公式，即可得到点 G 的坐标。

解 如图 1-2，设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，D 为 BC 边的中点，则点 D 的坐标是

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2};\qquad y'=\frac{y_2+y_3}{2}$$

又因为 AD 是 BC 边上的中线，点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，于是

$$\frac{AG}{GD}=2$$

所以点 G 的坐标是

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ \\ y=\dfrac{y_1-2\cdot\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$$

例3 已知点 $A(-1,\ 2)$、$B(2,\ -2)$、$C(6,\ 1)$和 $D(3,\ 5)$，求证四边形 $ABCD$ 是菱形(图 1-3)。

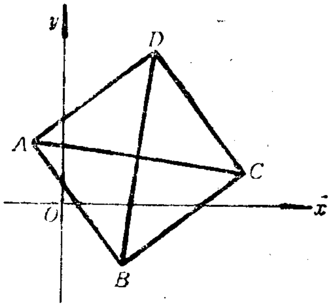


图 1-3

证法一 $\because$ $|AD|=\sqrt{(3+1)^2+(5-2)^2}=5$

$|AB|=|BC|=|CD|=5$

故四边形 $ABCD$ 是菱形。

证法二 $k_{AD}=\dfrac{5-2}{3-(-1)}=\dfrac{3}{4}$

$k_{BC}=\dfrac{1-(-2)}{6-2}=\dfrac{3}{4}$

由此可知， $k_{AD}=k_{BC}$

$\therefore$ $AD//BC$

同理 $AB//CD$

又 $\because$ $|AD|=|AB|=5$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com