

传递过程原理

陈晋南 编著



化学工业出版社

传递过程原理



陈晋南 编著

化学工业出版社

·北京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

传递过程原理 / 陈晋南编著. — 北京: 化学工业出版社, 2003. 12
ISBN 7-5025-4943-9

I. 传… II. 陈… III. 传递-化工过程-理论 IV. TQ021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 106271 号

传递过程原理

陈晋南 编著

责任编辑: 白艳云

文字编辑: 丁建华

责任校对: 李 林

封面设计: 关 飞

*

化学工业出版社出版发行

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话: (010) 64982530

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

北京彩桥印刷厂印刷

三河市宇新装订厂装订

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 28 $\frac{3}{4}$ 字数 645 千字

2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-4943-9/TQ·1870

定 价: 58.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

前言

本书作者 1974 年毕业于北京化工学院机械系到北京工业学院任教。1986 年自费到美国纽约市立大学研究生院学习，1988 年获工学硕士学位，1994 年获物理学硕士学位及工学博士学位。1994 年作为博士后研究员在美国著名的约翰·霍普金斯大学化学工程系工作。1995 年底辞去美国的工作回到北京理工大学任教，现为北京理工大学化工与环境学院的教授、博士生导师。在美国攻读硕士和博士学位期间，系统地学习了动量、热量和质量传递的相关知识，在美国纽约市立大学参与了该课程本科生和硕士生的教学和辅导工作；工作期间，承担了 NASA（美国宇航局）关于太空失重条件下液滴运动规律的科研课题，并曾多次出席国际会议发表论文。回国后，在国家自然科学基金支持下，与企业合作进行高分子材料加工过程中的计算机仿真和数值模拟以及化学工程“三传”数值模拟研究。近年来，发表了科技学术论文 40 多篇，其中不少文章被三大检索收录。多年来从事化学工程的“动量、热量和质量传递”三传机理研究，传递过程的理论使作者在有关动量、热量和质量传递方面的大量科学研究工作中获益匪浅。

1995 年回国后，作者曾担任北京理工大学化工与材料学院的副院长，负责本科生和研究生的教学工作，讲授本科生《化工原理》、《流体力学》和研究生《高等流体力学》、《传递过程》、《化学化工数学》等课程。由于传递过程涉及内容繁多，在组织研究生课程教学过程中，作者认真拜读了国内市面上流行的传递过程的教科书，并与美国名牌大学的研究生的教学内容进行了比较，根据国家教育部研究生培养的要求，结合国外的教材和学习经验，在一定的理论深度上精选内容，编写了《传递过程原理》一书，并作为北京理工大学的化工与材料学院硕士生的内部讲义进行了多年的教学。为了满足广大工程技术人员的需要，在化学工业出版社大力支持下，正式出版该书。本书既可以作为化工、动力、机械、土建、电子、航天、环境和生物工程等专业研究生和教师的教学教材，也可以作为科研、设计和工程技术人员的参考用书。

本书从介绍“传递过程”的机理着手，试图阐明传递过程的基本物理现象、规律、概念以及处理问题的基本方法。对三类传递过程的分析方法是：首先，建立基本微分方程，进行无量纲分析，建立特殊情况下的控制方程；然后，应用分子传递理论、边界层理论对各类传递过程进行分析和求解；最后对结果的应用进行一定的讨论。在内容叙述时，尽量做到基本概念解释详尽、公式推导步骤清晰，并留给读者自学和思考的空间，有意识地将书中的有些问题留给读者在练习中完成，不少练习题是书中内容学习的延续，在讲解重点和难点理论概念时，附有例题以便于自学。每章末尾都附有一定数量的练习题，大部分给出了答案，以供读者学习和核对自己练习的结果，有的采用了少量的原版英文习题。期望读者尽可能多做练习，这是吸收和消化理论知识的最好方法。通过完成练习，可以加深对书中内容的理解，培养自己学习、思考和解决问题的能力，有意识地进行自身能力的培养。

本书第十三章汇集了作者发表在国内外核心期刊上有关胶体液滴输运现象的部分论文，文中基本保留原文风格体系，有些论文是英语版没有翻译成中文，读者可以直接用英语学习本专业的知识，提高阅读专业外文资料的水平。限于篇幅，本书没有介绍紊流的时均流理论。全书采用国际标准 SI 制。

在文字录入和绘图工作中得到了研究生彭炯、刘敏、胡冬冬等多位同学以及学院苏小勇等同志的大力协助，在此表示衷心地感谢！由于水平和能力有限，且本书的全部编写工作是利用节假日和周末进行的，因此，难免存在某些不足或不妥之处，殷切希望读者在使用过程中不断提出宝贵意见，以便进一步修改和完善。

本书承蒙同济大学李佟茗教授对原稿进行了认真审阅，提出了宝贵的建议。李佟茗教授在美国著名的西北大学（Weston Univ.）学习获得博士学位，她多年来从事传递过程领域的科学研究和教学工作。她的导师 John C. Slattery 教授在传递过程领域是著名的权威，是《连续介质中动量和质量传递过程》一书的著者。在此对李佟茗教授的帮助表示衷心感谢！同时我还要感谢我的家人对我工作的全力支持。

陈晋南

2003年8月20日于北京理工大学

目 录

绪论	1
第一章 矢量分析和场论初步	3
第一节 矢量函数	3
一、矢量函数的概念	3
二、矢端曲线	4
三、矢量函数的极限和连续性	5
第二节 矢量函数的导数与微分	5
一、矢量函数的导数	5
二、矢量函数的微分	6
三、矢量函数的导数公式	7
四、矢量函数的积分	8
第三节 数量(标量)场与矢量场	8
一、数量场	8
二、矢量场	13
第四节 工程中常用的矢量场	21
一、有势场	21
二、管形场(无源场)	23
三、调和场	23
第五节 场论在工程中的应用	26
一、描述流体运动的两种方法	26
二、物理量的质点导数	31
三、工程中系统机理模型的建立	33
四、场论在工程中的应用	35
五、初始条件和边界条件	41
第一章 练习题	45
第一章 主要参考文献	46
第二章 动量、热量与质量传递导论	47
第一节 动量、热量与质量传递的类似性	47
一、牛顿黏性定律(Newton's Viscosity Law)	47

二、傅里叶定律 (Fourie's Law)	48
三、费克定律 (Fick's Law)	49
第二节 动量通量、热量通量与质量通量	49
第三节 涡流通量	51
第三章 总质量、总能量和总动量衡算	53
第一节 总质量衡算	53
一、简单几何体的质量衡算	53
二、通用的总质量衡算方程	56
第二节 总能量衡算	58
一、总能量衡算方程	58
二、机械能衡算	61
第三节 总动量衡算	64
一、通用的总动量衡算方程	64
二、动量方程式的应用	67
练习题	69
第二章~第三章 主要参考文献	70
第四章 流体动力学基本方程	71
第一节 连续性方程	72
一、积分形式的连续性方程	72
二、微分形式的连续性方程	73
三、特定条件下的连续性方程	75
第二节 运动方程	77
一、积分型运动方程	77
二、用应力表示的微分型运动方程	78
三、应力与形变速率之间的关系	80
四、奈维-斯托克斯方程	88
第五章 流体运动方程的若干解	93
第一节 流线和流函数 ψ	93
一、流函数	93
二、轨迹和流线	94
第二节 势流和势函数 ϕ	96
一、理想流体	96
二、有势流动	99
第三节 运动方程的势流解	103
一、基本流动	103
二、几种简单平面有势流动的叠加	110
第四节 奈维-斯托克斯方程的若干精确解	119
一、单向流动	119
二、二维的单向流动	120
三、非定常的单向流动	125
四、爬流	129
练习题	137
第四章~第五章 主要参考文献	140
第六章 边界层流动	141

第一节 边界层的基本概念	142
第二节 层流边界层的微分方程	144
第三节 边界层动量积分方程	147
一、边界层动量积分方程	147
二、平板层流边界层的近似计算	149
三、平板紊流边界层的近似解	152
四、平板混合边界层的近似计算	154
第四节 曲面边界层的分离现象	156
一、边界层的分离	156
二、卡门涡街	158
三、阻力系数	159
第六章 练习题	164
第六章 主要参考文献	165
第七章 热量传递概论与能量方程	166
第一节 热量传递方式	167
一、热传导	167
二、对流传热	168
三、辐射传热	169
四、同时进行导热、对流传热及辐射传热的热过程	170
第二节 能量方程	172
一、能量方程的推导	172
二、能量方程的特定形式	178
第八章 热传导	181
第一节 热传导的初始和边界条件	181
第二节 一维稳态热传导	184
一、平壁一维稳态热传导	185
二、筒壁一维稳态导热	186
三、球壳一维稳态导热	188
第三节 多维稳态热传导	188
一、概述	188
二、多维热传导问题的解析解	190
三、非齐次边界条件时的分离变量法	196
四、含有热源的热传导	196
第四节 非稳态热传导	201
一、无量纲数和变量	201
二、集总热容法	202
三、一维非稳态热传导	203
四、使用图表法解热传导问题	209
第九章 对流传热	212
第一节 对流传热机理	212
一、对流传热机理	212
二、温度边界层	213
三、对流传热系数	214
第二节 对流传热控制方程	216

第三节 无量纲方程和无量纲数	218
一、无量纲方程	219
二、无量纲数	221
第四节 层流下的热量传递	222
一、控制方程	222
二、半无限长平板层流传热精确解	225
三、流体层流流过平板壁面传热的近似解	231
四、管内层流传热	236
第五节 紊流下的热量传递	240
一、流体 $Pr=1$ 的情况	241
二、流体 $Pr\neq 1$ 的情况	242
第七章~第九章 练习题	244
第七章~第九章 主要参考文献	247
第十章 质量传递概论	248
第一节 质量传递的基本方式和公式	248
一、分子扩散	248
二、对流传质	249
三、分子扩散的速度与通量	250
四、扩散通量与主体流动通量	252
第二节 质量传递微分方程	255
一、质量传递微分方程	255
二、传质微分方程的特定形式	257
三、在正交坐标系中对流扩散方程的形式	258
四、传质过程中的初始条件与边界条件	259
第十一章 分子传质	262
第一节 气体中的分子扩散	263
一、组分 A 通过停滞组分 B 的稳态扩散	263
二、组分 A 通过停滞组分 B 的拟稳态扩散	265
三、等分子反方向稳态扩散	266
四、气体扩散系数	267
第二节 液体中的分子扩散	269
一、液体中的稳态分子扩散速率方程	269
二、组分 A 通过停滞组分 B 的稳态扩散	269
三、等分子反方向稳态扩散	270
四、液体中的扩散系数	270
第三节 固体中的分子扩散	273
一、与固体结构无关的稳态扩散	274
二、多孔固体中的稳态扩散	275
三、与固体结构无关的不稳态扩散解析解	279
四、与固体结构无关的多维稳态扩散的解析解	282
第十二章 对流传质	284
第一节 对流传质系数	284
第二节 层流下的质量传递	287
一、浓度边界层	287

二、平板壁面上层流传质的精确解	289
三、平板壁面上层流传质的近似解	295
四、管内层流传质	298
第三节 紊流下的质量传递	300
一、质量、热量与动量传递之间的类似律	300
二、平板壁面上紊流边界层质量传递的近似解	305
第四节 两相界面间的质量传递	307
一、停滞膜模型	308
二、溶质渗透模型	308
三、表面更新模型	311
练习题	311
第十章~第十二章 主要参考文献	313
第十三章 胶体液滴输运现象	314
第一节 胶体液滴输运现象概述	314
一、热毛细运动	314
二、扩散型毛细运动	315
主要参考文献	317
第二节 液滴在管中轴对称热蠕动	318
第三节 表面活性剂对液滴热毛细迁移运动的阻碍	355
第四节 一串变形液泡在管中的流动	381
主要参考文献	389
第五节 液滴在管中的热变形迁移	390
主要参考文献	401
第六节 在表面活性剂控制吸附下的液滴的速度	402
第七节 液滴速度的 Marangoni 减速: 表面活性剂的物理化学作用	412
第八节 应用 Frumkin 吸附模型求解液滴的运动	434
主要参考文献	440
第九节 电解质溶液中表面活性剂控制吸附下液滴的速度	440
主要参考文献	448

绪论

研究化工动量传递、热量传递和质量传递，俗称三传 (Momentum, Heat and Mass Transfer) 或传递现象 (Transport Phenomena)。它的形成和出现标志化学工程学科又发展到一个新的高度，表明人们对化学工程学科的认识从“单元操作”上升到研究各单元操作之间存在的共性。

回顾化学工程学科发展的历史，远在化学工程学科开始被重视之前，已有不少化学工业建立起来。那时，每一类化学工业的工艺，均被看做一门专门知识。后来，人们发现各类不同化学工艺的物理过程，几乎都是由性质类似的“单元操作” (unit operation) 组成。例如，在制糖工业中和肥料工业中，都会遇到由溶液蒸发溶剂的操作，于是蒸发成为最早提出的单元操作之一。在 21 世纪前半期，人们把流体流动、传热、干燥、吸收、萃取、结晶、过滤等单元操作作为研究的主要内容。在 20 世纪 20 年代世界上有了第一部“化工原理”教科书，将千变万化的工艺过程概括成“单元操作”，这是生产力发展到一定水平的反映。化工单元操作原理促进了化学工业的发展，可以认为“单元操作”是化学工程学科发展的第一个概括。

随着工业和科学的发展，人们发现了各单元操作之间存在着共性。如过滤只是流体流动的一个特例；蒸发不过是传热的一种形式；萃取、吸收都包含着质量的传递；干燥与蒸馏是包含传热和传质同时进行的过程，流体流动是动量传递过程。所以对于单元操作的任何深入研究，最终都归结为动量、热量和质量传递。从 20 世纪中期以来，人们开始用统一的观点来研究上述三种传递过程。1960 年美国威斯康辛大学 (Univ. Wisconsin) 的 R. B. Bird 等出版了“Transport Phenomena”一书，首次把三种传递现象用统一的观点来处理，并研究动量、热量和质量传递之间的类似性。传递过程理论对化工学科的发展起着重要的作用，标志着人们对化工学科的研究又上了一个台阶。与“化工热力学”不同，“传递过程”是一门探讨传递速率的课程。

现代工程技术人员无论从事化工新产品、新工艺的研究还是进行过

程设计、机械设计和制造、自动控制，都需要应用动量、热量和质量传递的知识。传递过程的理论对过程开发、过程设计、生产操作、优化控制及过程机理研究都有重要的实用意义。通过本书内容的学习，可帮助工程科学技术人员深入地了解各“传递过程”的机理，对于改进各类传递过程，进行新设备的设计、操作和控制提供理论基础；学习对所研究的问题建立数学模型的方法，为利用现代计算方法和成熟计算机软件包进行传递过程的数值模拟打下必要的理论基础。通过对传递现象机理的研究，在过程开发和设计中可以大大减少实验工作量和实验费用，缩短开发周期，并可以从事设备设计、生产操作的优化以及技术改造工作。本书所介绍的内容相当部分已成功地用于工程生产实际中了。

对传递现象的研究，不仅是化学工程的重要基础，同时在生物工程、机械、航天、土木、冶金、电子工程、农业与食品工程等工程学科和技术领域也具有重要的意义。随着科学技术的发展，对工程技术人员认识与掌握基本物理现象提出了越来越高的要求，使“传递过程”成为工程专业公用的一门技术基础课，只是各专业侧重点不同而已。

第一章 矢量分析和场论初步

动量、质量和能量传递理论是研究化学工程和各类工程重要的理论基础，而研究一个系统中的传递现象时，矢量分析和场论的知识是必不可少的。矢量分析是研究其他学科的一个重要的数学工具，也是场论的基础知识。借助于矢量分析这个重要工具，可将三维空间坐标中的控制方程写成既简单又有意义的形式。场论是研究标量场及矢量场数学性质的一门数学分支。不少读者在这之前并没有接触或学过这方面的知识，本章介绍矢量分析和场论的初步知识^[1~4]，将结合物理现象的描述、数学模型的建立和求解过程向读者介绍这部分数学内容，以便为后面章节的学习打下必要的基础。

第一节 矢量函数

一、矢量函数的概念

在工程实际中，经常遇到既有大小又有方向的量，例如一个物体运动的速度。数学上用矢量 \vec{A} 表示这样的量。在矢量代数中，模和方向都保持不变的矢量称为常矢量。零矢量的方向为任意，可作为一个特殊的常矢量。模和方向或其中之一不断变化的矢量称为变矢量。为了研究变矢量与某个标量的关系，引入矢量函数，其定义如下。

定义：如果对于数性变量在某个范围内的每一个数值，变矢量 \vec{A} 都有一个确定的矢量与它对应，则称 \vec{A} 为数性变量 t 的矢量函数。记作

$$\vec{A} = \vec{A}(t) \quad (1-1)$$

矢量函数 $\vec{A}(t)$ 写成直角坐标表示式为

$$\vec{A} = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k} \quad (1-2)$$

式中， $A_x(t)$ 、 $A_y(t)$ 和 $A_z(t)$ 为 $\vec{A}(t)$ 在 $Oxyz$ 坐标系中的三个坐标， \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 为沿三个坐标轴正向的单位矢量。一个矢量函数和三个有序的

数量函数构成一一对应的关系。

二、矢端曲线

本章介绍的矢量均为自由矢量。当两个矢量的模和方向都相同时，就认为两个矢量是相等的。用图形可以直观地描述矢量函数 $\vec{A}(t)$ 的变化状态。

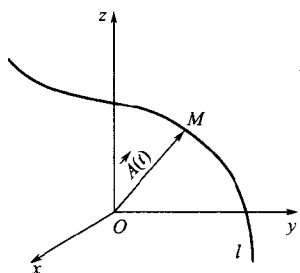


图 1-1 矢端曲线

把 $\vec{A}(t)$ 起点取在坐标原点，当 t 变化时，矢量 $\vec{A}(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l ，如图 1-1 所示，这条曲线叫做矢量函数 $\vec{A}(t)$ 的矢端曲线。方程式 (1-1) 和式 (1-2) 为此曲线的矢量方程。当把 $\vec{A}(t)$ 的起点取在坐标原点时， $\vec{A}(t)$ 是其终点 $M(x, y, z)$ 的矢径， $\vec{A}(t)$ 的三个坐标就对应地等于其终点 M

的三个坐标 x, y, z ，即有

$$x=A_x(t), y=A_y(t), z=A_z(t) \quad (1-3)$$

此式是曲线 l 的以 t 为参数的参数方程。

例 1-1 设有直角三角形的纸片，它的一锐角为 α ，将此纸片卷在一正圆柱面上，使角 α 的一边与圆柱的底圆周重合，角的另一边则在圆柱面上盘旋上升形成的一条空间曲线，该曲线称为圆柱螺旋线，其参数方程为

$$x=acost, y=asint, z=bt$$

则其矢量方程可写为

$$\vec{r}=acost \vec{i} + asint \vec{j} + bt \vec{k}$$

设正圆柱的半径为 a ，角 α 的顶点 L 在圆柱底圆周上的位置为 A ，而 A 为底圆周与 x 轴的交点，取坐标系如图 1-2 (a) 所示。

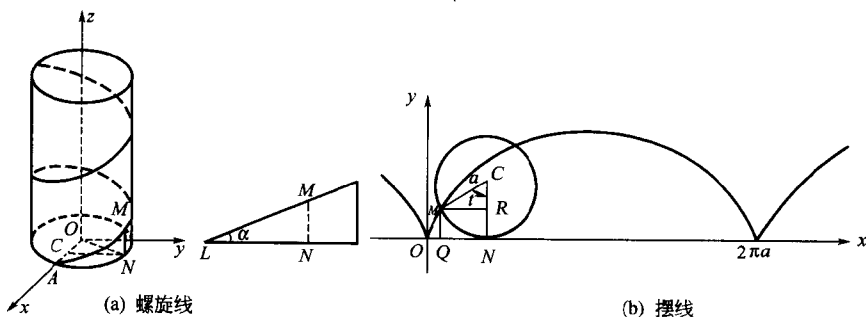


图 1-2 例 1-1 附图

又如一圆沿定直线滚动时，圆周上一定点所描述的轨迹称为摆线，如图 1-2 (b) 所示。摆线的参数方程为

$$x=a(t-sint), y=a(1-cost)$$

则其矢量方程可写为

$$\vec{r} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$$

三、矢量函数的极限和连续性

由于一个矢量函数和三个有序的数量函数构成一一对应的关系，由此可知，矢量函数的极限定义与数量函数的极限定义完全相类似，可以将数量函数中的一些极限运算的法则用于矢量函数极限的运算。这里不做详细地介绍，仅给出矢量函数连续性的定义。

矢量函数连续性的定义：若矢量函数 $\vec{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，而且有 $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}(t_0)$ ，则称 $\vec{A}(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续。若矢量函数 $\vec{A}(t)$ 在某个区间内每一点处连续，则称它在该区间内连续。矢量函数 $\vec{A}(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $\vec{A}_x(t)$ 、 $\vec{A}_y(t)$ 和 $\vec{A}_z(t)$ 都在 t_0 处连续。

第二节 矢量函数的导数与微分

由于一个矢量函数和三个有序的数量函数构成一一对应的关系，由此可知，矢量函数导数和微分的定义与数量函数的导数和微分的定义完全类似，可以将数量函数中的一些导数和微分运算的法则用于矢量函数导数和微分的运算。这里不进行详细地介绍和讨论，仅给出导数和微分的基本定义、几何意义以及常用的运算公式。

一、矢量函数的导数

矢量函数 $\vec{A}(t)$ 对数量 t 的导数定义：矢量 $\vec{A}(t)$ 在点 t 的某一邻域内有定义，并设 $t + \Delta t$ 也在这邻域内，若 $\vec{A}(t)$ 对应于 Δt 的增量 $\Delta \vec{A}$ 与 Δt 之比，在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，其极限存在

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \quad (1-4)$$

则称此极限为矢量函数 $\vec{A}(t)$ 在点 t 处的导数（简称导矢量），记作 $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 或 $\vec{A}'(t)$ ，即

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \quad (1-5)$$

在直角坐标系中，若矢量函数 $\vec{A}(t)$ 表达式为 $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$ ，且函数 $A_x(t)$ 、 $A_y(t)$ 和 $A_z(t)$ 在点 t 可导，把求矢量函数的导数归结为求三个数量函数的导数，则有

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta A_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta A_y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta A_z}{\Delta t} \vec{k} \right) \\ &= \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} \end{aligned} \quad (1-6)$$

$$\text{即} \quad \vec{A}'(t) = A'_x(t)\vec{i} + A'_y(t)\vec{j} + A'_z(t)\vec{k} \quad (1-7)$$

导矢量的模为

$$\left| \frac{d\vec{A}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dA_x}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dA_y}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dA_z}{dt} \right)^2} \quad (1-8)$$

导矢量的几何意义 导矢量 $\vec{A}'(t)$ 不为零时, 是在点 M 处的切线上, 其方向恒指向对应 t 值增大的一方, 如图 1-3 所示, 故导矢量在几何上为一矢端曲线的切向矢量。如曲线上点的速度矢量。

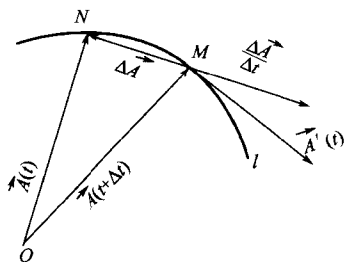


图 1-3 导矢量

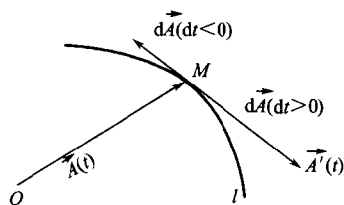


图 1-4 矢量函数的微分

二、矢量函数的微分

设有矢量函数 $\vec{A}(t)$, 则

$$d\vec{A} = \vec{A}'(t) dt \quad (1-9)$$

称为矢量函数 $\vec{A}(t)$ 在 t 处的微分。由于微分 $d\vec{A}$ 也是导矢量 $\vec{A}'(t)$ 与增量 Δt 的乘积, $d\vec{A}$ 也是矢量, 而且和导矢量 $\vec{A}'(t)$ 一样, 也在点 M 处与 $\vec{A}(t)$ 的矢端曲线 l 相切, 但其指向: 当 $dt > 0$, $d\vec{A}$ 与 $\vec{A}'(t)$ 方向一致; 当 $dt < 0$, $d\vec{A}$ 与 $\vec{A}'(t)$ 方向相反, 如图 1-4 所示。其直角坐标的表达式为

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= A'_x(t) dt \vec{i} + A'_y(t) dt \vec{j} + A'_z(t) dt \vec{k} \\ &= dA_x \vec{i} + dA_y \vec{j} + dA_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$|d\vec{A}| = \sqrt{(dA_x)^2 + (dA_y)^2 + (dA_z)^2}$$

对矢径函数 $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, 其微分为

$$d\vec{r} = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k} \quad (1-10)$$

$$|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

若在规定了正向的曲线 l 上, 取定一点 M_0 作为计算弧长 s 的起点, 并将 l 的正向取作 s 增大的方向, 在 l 上任一点 M 处, 弧长的微分是

$$ds = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

按下述办法取右端符号, 以点 M 为界, 当 ds 位于 s 增大一方时取正号;

反之, 取负号, 如图 1-5 所示, 可见

$$|d\vec{r}| = |ds| \quad (1-11)$$

也就是说, 矢量函数微分的模, 等于其矢端曲线弧微分的绝对值, 因此有

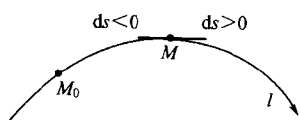


图 1-5 曲线 l 的弧微分

$$|d\vec{r}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} ds \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| |ds|$$

有

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1 \quad (1-12)$$

结合导矢量的几何意义, 可以知道, 矢径函数对其矢端曲线弧长 s 的导数 $\frac{d\vec{r}}{ds}$ 在几何上为一切向单位矢量, 恒指向 s 增大的一方。

三、矢量函数的导数公式

若矢量函数 $\vec{A} = \vec{A}(t)$, $\vec{B} = \vec{B}(t)$ 及数量函数 $u = u(t)$ 在 t 的某个范围内可导, 有下列公式在该范围内成立。

$$(1) \frac{d}{dt} \vec{C} = 0 \quad (\vec{C} \text{ 为常数})$$

$$(2) \frac{d}{dt} (\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$(3) \frac{d}{dt} (k \vec{A}) = k \frac{d\vec{A}}{dt} \quad (k \text{ 为常数})$$

$$(4) \frac{d}{dt} (u \vec{A}) = \frac{du}{dt} \vec{A} + u \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$(5) \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B}, \text{ 特例 } \frac{d}{dt} \vec{A}^2 = 2\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}, \text{ 其中 } \vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

$$(6) \frac{d}{dt} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}$$

$$(7) \text{ 若 } \vec{A} = \vec{A}(u), u = u(t), \text{ 则有 } \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{du} \frac{du}{dt}$$

这些公式可用类似于微分中数量函数证明方法和矢量的基本运算来证明。

例 1-2 证明矢量函数 $\vec{A} = \vec{A}(t)$ 的模不变的充要条件是

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

证明: 假定 $|\vec{A}| = \text{常数}$, 则有 $\vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = \text{常数}$, 两端对 t 求导, 得到

$$\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

反之, 若有 $\vec{A} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$, 则有 $\frac{d}{dt} \vec{A}^2 = 0$, 从而 $\vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = \text{常数}$, 即 $|\vec{A}| = \text{常数}$ 。

此例子说明, 若矢量 \vec{A} 的模一定而方向是变化的, 则 \vec{A}^2 就是一个常数。定长矢量 $\vec{A}(t)$ 与其导矢量互相垂直。如匀速圆周运动就是一例, 其加速度垂直于瞬时速度。