数学分析概要二十讲

张从军

SHUXUE FENXI GAIY HIJIANG

安徽大学出版社

数学分析概要二十讲

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析概要二十讲/张从军．—合肥：安徽大学出版社，2000.8
ISBN 7-81052-350-3

Ⅰ．数…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学分析-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 28243 号

数学分析概要二十讲　　张从军

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**印　刷**	合肥五里岗印刷装订厂
		照　排	合肥劲松激光照排社
联系电话	总编室 0551-5107719	**开　本**	850×1168　1/32
	发行部 0551-5107784	**印　张**	8.25
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**字　数**	190 千
责任编辑	谈　菁	**版　次**	2000 年 8 月第 1 版
封面设计	孟献辉	**印　次**	2000 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-81052-350-3/O·23　　**定价** 15.00 元

序

《数学分析概要二十讲》一书，是张从军教授在多年教学实践的基础上，为理工科学生报考硕士研究生所编的复习用书，曾作为选修课教材长期使用.

本书对整个数学分析内容经过概括、综合、提炼、加工，以不大的篇幅，引导学生全面系统地复习与提高，尤其注重整体内容的融汇贯通与深化. 通过本书的学习，相信学生可以为硕士研究生考试打下坚实的基础.

本书集诸多教材和相关参考书之精华，充分挖掘数学分析各部分之间的内在联系. 与同类资料相比，明显具有"精、新、深"之特点，复习指导的实用性甚强.

张从军教授多年潜心教学与科研，不断探索，获得了许多项教学科研成果，精神可嘉. 在本书即将出版之际，我高兴地为之作序.

孙经先

于山东大学

1996.5.8

前　　言

《数学分析概要二十讲》是为理工科学生报考硕士研究生等所编的复习用书，曾作为选修课教材使用多年.编者意在将整个数学分析内容概括、综合、提炼、加工到不大的篇幅，用以引导学生对该课程进行全面、系统地复习与提高.编写中，尤其注重通过对该课程内容整体的融会贯通与深化，促进学生对所学内容“由厚到薄”的转化.

我们从大量的硕士研究生入学考试考题和分析许多教材与参考文献中，精选了一些例题与习题.这些题目以证明题偏多，借以帮助同学加深理解基本理论，培养其分析推理能力.题目大多具有一定难度，但都紧扣内容，并限于分析基本知识范围之内，不超过近年基础数学专业的研究生考题难度.《数学分析概要二十讲》作为复习用书，在每讲内容之后，对较难习题给出了解答或思路提示.

编者期望，本书对准备参加数学分析考试的同学，准备报考硕士研究生的同学，希望打好数学分析知识基础的同学，以及对有关专业教师，会有所裨益.

山东大学博士生导师孙经先教授审阅了书稿并为本书作序，煤炭工业出版社吕代铭编审提出了宝贵的修改意见，安徽大学出版社对本书的出版给予了大力支持，值此书稿付梓之际，编者谨向他们表示衷心感谢！

限于编者水平，本书疏漏不足之处，恳请广大读者和专家不吝赐教.

目　　次

第一讲　求极限的各种方法

本讲介绍求极限的主要方法，有关极限的定义和基本定理请参考常用的分析教材，此处从略.

求极限的主要方法如下：

1. 利用定义验证
2. 利用“迫敛性”
3. 利用“单调有界定理”
4. 利用变量替换
5. 利用已知的极限结果
6. 利用取对数的方法
7. 利用有关等式与不等式
8. 利用“斯笃兹”(Stolz)定理
9. 利用求等价量的方法
10. 利用定积分、导数、连续等概念
11. 利用洛比塔法则
12. 利用台劳展式
13. 利用级数的定义与性质
14. 利用压缩映射(不动点)定理

例 1(方法 1)　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$$

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，所以存在 $M>0$，使 $|a_n|<M$，$|b_n|<M$，$n=1,2,\cdots$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$，$|b_n-b|<\varepsilon$. 所以当

$n,m>N$ 时，

$$|a_nb_m-ab|\leqslant|a_nb_m-ab_m|+|ab_m-ab|$$
$$\leqslant|a_n-a|M+|b_n-b|M$$
$$<2M\varepsilon$$

而当 $n>2N$ 时，

$$\left|\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}-ab\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{a_1b_n+\cdots+a_Nb_{n+1-N}}{n}\right|+\left|\frac{a_{n+1-N}b_N+\cdots+a_nb_1}{n}\right|$$
$$+\left|\frac{a_{N+1}b_{n-N}+\cdots+a_{n-N}b_{N+1}}{n}-ab\right|$$
$$\leqslant\frac{M(|b|+\varepsilon)N}{n}+\frac{M(|a|+\varepsilon)N}{n}$$
$$+\left|\frac{(a_{N+1}b_{n-N}-ab)+\cdots+(a_{n-N}b_{N+1}-ab)}{n}-\frac{2Nab}{n}\right|$$
$$\leqslant\frac{M(|b|+\varepsilon)N}{n}+\frac{M(|a|+\varepsilon)N}{n}+\frac{2M\varepsilon}{n}(n-2N)+\frac{2Nab}{n}$$

对 $\dfrac{M(|b|+\varepsilon)N}{n}$，$\exists N_1>2N$，当 $n>N_1$ 时，有

$$\frac{M(|b|+\varepsilon)N}{n}<\varepsilon$$

对 $\dfrac{M(|a|+\varepsilon)N}{n}$，$\exists N_2>2N$，当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{M(|a|+\varepsilon)N}{n}<\varepsilon$$

而 $\dfrac{2M\varepsilon}{n}(n-2N)<2M\varepsilon$

对 $\dfrac{2Nab}{n}$，$\exists N_3>2N$，当 $n>N_3$ 时，$\dfrac{2Nab}{n}<\varepsilon$

取 $N_0=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则当 $n>N_0$ 时，有

$$\left|\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}-ab\right|<\varepsilon+\varepsilon+2M\varepsilon+\varepsilon$$
$$=(2M+3)\varepsilon$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}=ab$$

例 2(方法 2) 证明若$\{x_n\}$收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^n}{n!}=0$$

证明 因为$\{x_n\}$收敛,所以存在$M>0$,使对任何n,$|x_n|<M$,从而$|x_n|^n<M^n$.因此,取自然数$k>M$,则有

$$0\leqslant\left|\frac{(x_n)^n}{n!}\right|\leqslant\frac{M^n}{n!}\leqslant\frac{M^k}{k!}\cdot\frac{M}{k+1}\cdot\frac{M}{k+2}\cdots\frac{M}{n}$$
$$\leqslant\frac{M^k}{k!}\left(\frac{M}{k+1}\right)^{n-k}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M^k}{k!}\left(\frac{M}{k+1}\right)^{-k}\left(\frac{M}{k+1}\right)^n=0$$

由迫敛性

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^n}{n!}=0$$

注 1:本题也证明了$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$,$a$为常数.

例 3(方法 3) 设$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$, $n=0,1,2,\cdots$且$a>0$,$a_0=0$,证明$\{a_n\}$收敛,且极限就是方程$x^2=x+a$的一个正根.

证明 先用数学归纳法证明$\{a_n\}$的单调性.

因为$a_2=\sqrt{a+a_1}=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=a_1$,设$a_n>a_{n-1}$,则$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}>\sqrt{a+a_{n-1}}=a_n$,所以$\{a_n\}$单调增.

方程$x^2=x+a$有正根,设其为c,则有

$$a_{n+1}^2-c^2=(a+a_n)-(a+c)=a_n-c \tag{1}$$

若$a_1<c$,据(1)式利用数学归纳法可证$a_n<c$, $n=1,2,\cdots$若$a_1>$

c，则由 $a_{n+1}-c>a_n-c$ 及

$$(a_{n+1}+c)(a_{n+1}-c)=a_n-c$$

知，对$\forall n$，$a_n>c$，且 $a_{n+1}+c=\dfrac{a_n-c}{a_{n+1}-c}<1$，故 $a_{n+1}<1-c$

可见，无论何种情况，$\{a_n\}$都有上界，由单调有界定理可知，$\{a_n\}$收敛.

设$\{a_n\}$收敛于 b，在 $a_{n+1}^2=a+a_n$ 两边取极限，有 $b^2=b+a$. 再由极限的保号性，显然 $b=c$.

注 2：这类仅给出数列中 a_n 与 a_{n+1}关系的极限题，大多可用单调有界定理先证明极限的存在性，再通过解方程求出具体极限值，有时也用柯西收敛准则证明极限的存在性.

例 4(方法 4)　求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}}{2}$$

解　因为

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}}}{2}$$

所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}\cdot\frac{2}{\pi}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2}{\pi}$$

注 3：在求 n 个因子之积或 n 项之和的极限时，一般可利用三角恒等式、数列求和公式、拆项、乘除某个因式、变量替换等手段，将其转化为一项，然后再求极限.

例 5(方法 5) 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \quad (a,b>0)$$

解 令

$$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}=1+\frac{x_n}{n}$$

则

$$\begin{aligned} x_n &= n\left[\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\sqrt[n]{a}-1)\Big/\frac{1}{n}+(\sqrt[n]{b}-1)\Big/\frac{1}{n}\right] \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}[\ln a+\ln b]=\ln\sqrt{ab}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})^n}{2^n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}=\sqrt{ab} \end{aligned}$$

注 4:在求形如$(a_n+b_n)^n$这类极限时,首先可考虑能否利用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$这个极限,其他常用到的已知极限还有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \quad (a>0,a\neq 1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x=e^t \quad 等.$$

例 6(方法 6) 求

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x} \quad (x>0)$$

解 令 $y=x^{\sin x}$，取对数有 $\ln y=(\sin x)\ln x$，因为

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot x\cdot \ln x=0$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln x}=e^0=1$$

注 5：在求 0^0 型未定式的极限或有关幂指函数的极限时，常利用先取对数的方法.

例 7(方法 7) 求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

解 此题可利用如下公式，这是编者在解此类问题时总结得到的一个结果，有兴趣的读者可自行证明.

设 $\{a_n\}$ 是一等差数列，公差为 d，$\{b_n\}$ 是一等比数列，公比为 $q(|q|<1)$，则

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{a_1b_1(1-q)+b_1qd}{(1-q)^2}$$

本题中，$\{a_n\}=\{2n-1\}$，公差为 $d=2$，$\{b_n\}=\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，公比为 $q=\frac{1}{2}$，于是 $S=3$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$$

例 8(方法 7) 设 $x_0=a,x_1=b,x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad(n\geqslant 2)$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 因为 $x_1-x_0=b-a,x_n-\dfrac{x_{n-1}}{2}=\dfrac{x_{n-2}}{2}$

$$x_n-x_{n-1}=-\frac{x_{n-1}}{2}+\frac{x_{n-2}}{2}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$$

令 $y_n=x_n-x_{n-1}$，则$\{y_n\}$是等比数列，公比为$-\frac{1}{2}$，从而

$$\sum_{i=1}^{n} y_i=\frac{(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i=\frac{2}{3}(b-a)$$

此外

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} y_i &=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\\ &=x_n-x_0=x_n-a\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}$$

下面介绍一个对求数列极限很有用的斯笃兹(Stolz)定理.

斯笃兹定理(见[1])

(1) $\frac{0}{0}$型

设$\{a_n\}$是趋于零的数列，$\{b_n\}$是递减趋于零的数列，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$存在(可以是$\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

(2) $\frac{\infty}{\infty}$型

设$\{y_n\}$自某项后单调递增趋于$+\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在(可以是$\pm\infty$)，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

例 9(方法 8) 证明柯西定理:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

其中 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 称为 n 个数 $a_1\ a_2\cdots\ a_n$ 的算术平均.

证明 令 $x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $y_n=n$,则由斯笃兹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n-(n-1)}=a$$

例 10(方法 8) 设 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

证明 令 $y=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,则 $\ln y=\frac{1}{n}(\ln a_1+\cdots+\ln a_n)$,由斯笃兹定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=e^{\ln a}=a$$

注 6:$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$称为 n 个正数的几何平均,还可以证明,若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则 n 个数的调和平均以 a 为极限,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$$

注 7:斯笃兹定理与洛比塔法则是数学分析中处理$\frac{\infty}{\infty}$及$\frac{0}{0}$型极限的两个重要工具,它们分别适用于变量为“离散”和变量为“连续”的两种情形.

例 11(方法 9) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^4+x^3}{\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^3}$

解 因为$\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^3\sim\left(\frac{1}{2}x\right)^3\quad(x\to 0)$
所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{\left(\sin\frac{1}{2}x\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}=8$$

注 8:在许多求极限的情况下,往往可以把其中的无穷小量用等价无穷小量来替代. 常见的等价无穷小量有:当$x\to 0$时,

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)$$

$$e^x\sim 1\sim\arcsin x\sim\arctan x$$

但应注意,不是乘或除的情形,不能随便替代,如$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}=1$,这时显然不能用$\frac{1}{n}$代替$\frac{1}{n+1}$.

例 12(方法 10) 设函数$f(x)$在a可导,且$f(a)\neq 0$,计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$

解 不妨设$f(a)>0$,故当n充分大时,$f\left(a+\frac{1}{n}\right)>0$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)\right]\Big/\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\exp\{[\ln f(x)]'|_{x=a}\}=\exp\left\{\frac{f'(a)}{f(a)}\right\}$$

例 13(方法 10) 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}\quad(k\geq 0)$$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$

例 14（方法 11） 求证

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[3]{abc}\quad(a>0,b>0,c>0)$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[(a^x+b^x+c^x)/3]}{x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\ln a}{3}a^x+\frac{\ln b}{3}b^x+\frac{\ln c}{3}c^x\right)\Big/1\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)\right\}$$

$$=\sqrt[3]{abc}$$

例 15（方法 12） 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]-x}{x\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}+o(x^6)}=0$$

注 9:常用的几个台劳展开式有

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n-1}(x)$;

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n}(x)$;

$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$;

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$;