

美国关于气动彈性問題的 專家會議資料

国 际 航 空 杂 志 社

1960. 10.

北 京

目 录

1. 最近在小展弦比机翼颤振分析方面的一些发展	(1)
2. 利用由核函数方法获得的非定常空气作用力的一般平面形状机翼 的颤振分析的发展	(34)
3. 对亚音速振盪气动力影响系数的一种测量方法的研究	(47)
4. 颤振现象的基本原理	(61)
5. 颤振设计原理	(69)
6. 用低速颤振模型试验和趋向曲线建立颤振边界	(78)
7. 利用导纳测量的主形态激振方法	(82)
8. 自振形态分析的刚度矩阵法	(90)

最近在小展弦比机翼颤振分析

方面的一些发展

Pao-Tan Hsu

美国麻省理工学院气动弹性和结构研究试验室研究工程师

引 言

成功的颤振分析在很大程度上决定于准确地确定升力面上的空气载荷。很多年来在预测振荡机翼上的亚音速空气动力方面成功的分析工作絕大多數都局限于二元气流,而对有限翼展的机翼,主要工作是研究不可压缩流中的情况(参考文献1—3)。在对亚音速可压缩流的研究中,下列几篇論文是值得注意的:Merbt和Landahl的論文(参考文献9),他們將小展弦比的理論推广到包括M数效应的情况;Reissner的論文(参考文献10),他对Mathieu函数在亚音速可压缩流中的应用作了评价;W. P. Jones的論文(参考文献11)和Lehrman(参考文献12)研究了大展弦比的情况。

在 $0 \leq M < 1$ 的范围内简谐机翼运动的綫性化边界值問題可以用速度势,或用加速度(或压力)势的公式表示。后一种形式的优点是:积分方程式只需要翅及机翼面积,因为横跨尾流的压力跃变为零。通常不可能获得积分方程式的解析解,只有对如椭圆形或圆形等特殊平面形状(这种情况可用可分离的坐标)才能获得解析解,虽然如此,但一般問題仍可借助于高速计算机作数值的处理。

几年以前,Watkins, Runyan和Woolston(参考文献13)以及Voss, Zartarian和Hsu(参考文献14)同时列出了表示任意平面形状机翼的压力和上洗分佈之間的关系的积分方程式,并研究了所得到的核函数的性质。Harvard計算試驗室計算出了此函数在M数(M)和减縮頻率(k)的广泛范围内的数值表(参考文献15)。还曾經提出了几种求此积分方程式数值解的方法。早期的方法(参考文献14, 16)是将机翼平面形状分成若干小面积或“小格”。在每一小面积內假設为一简单的压力分佈,計算出其对于总上洗积分的影响,这样就导出了一組以位于小格中心的处压力值为未知数的代数方程式,其解可提供所需的压力分佈,結果的准确度则大概决定于所选择的网格的精細程度。曾經用此方法計算过某些非箭形机翼在亚音速时的情况并获得了滿意的結果(参考文献16)。但是根本性的非議(参考文献17)使得此法被放棄了。值得注意的是在超音速流中应用一种类似的“小格”方法获得了滿意的結果。根据压力在整个机翼平面形状上作連續变化的假設 Runyan和Woolston(参考文献18)及本文作者在不久以前(参考文献17)以几种不同的形式发展了一种对超音速流更好的求解方法。

Multhopp(参考文献19)和Richardson(参考文献20)发表了用类似的方法对問題研究的結果。Runyan和Woolston繼續了早期Watkins所进行的工作,而Runyan和Woolston(参考

文献18) 并将其应用到任意平面形状的机翼。在他们的方法中, 弦向压力分布是用一系列根据 Falkner (参考文献21) 所用的概念提出的当量载荷来代替。在翼展方向, 载荷线被分为20段, 而对每一段作数值积分。Multhopp 的方法是基于用解一组线性方程式的方法计算弦向一些分点处的局部升力和力矩。沿展向积分的技术采自同一作者推导出的升力线理论。Richardson 的概念和 Multhopp 的概念相似, 并将其更推广到包括音速和超音速的情况。

本文将阐述参考文献17中发展的解法, 并附有一些数值实例。此方法和上述的研究工作有很多相似之处。主要不同点在于沿展向积分的技术。适当选择一系列相互交叉的上洗和展向分点, 用简单地略去核函数中二阶奇異点的方法可以获得正确的积分结果。在翼弦方向, 找到了最有利的上洗位置和积分点, 这些位置和 Richardson 用于亚音速情况中的完全相同。弦向分点的数目不限于2个 (如 Multhopp 提出的情况), 用这些分点很明显比 Runyan 和 Woolston 所用的 Falkner 方法更有效。

问题的表示式

在参考文献14和16中给出了代表亚音速可压缩流中振盪升力面上压力和上洗之间关系的积分方程式。此式可写成如 F 的形式:

$$-W(x, y, 0) = \iint_A \frac{\partial \bar{p}(\xi, \eta)}{\partial \eta} D(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta + \iint_A \bar{p}(\xi, \eta) [F(x-\xi, y-\eta) + H(x-\xi, y-\eta)] d\xi d\eta \quad (2.1)$$

式中

$$W(x, y, 0) = 4\pi\rho U \bar{w}_a(x, y) = 4\pi\rho U^2 \left(\frac{\partial z_a}{\partial x} + i k z_a \right)$$

所有的长度都是用半翼根弦长 b 。除后所获得的无因次量。W 为上洗的幅值, 并规定它具有压力的因次。

在上述表示式中 D 和 F 都是核的奇異部分, 而 H 为核的非奇異部分。很明显, D 和 F 可以写成:

$$D(x-\xi, y-\eta) = e^{-ik(x-\xi)} \frac{1}{y-\eta} \left[1 + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(y-\eta)^2}}{x-\xi} \right] \quad (2.2)$$

$$F(x-\xi, y-\eta) = e^{-ik(x-\xi)} \left[\frac{ik}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(y-\eta)^2}} - \frac{k^2}{2} \ln |\sqrt{(x-\xi)^2 + \beta^2(y-\eta)^2} - (x-\xi)| \right] \quad (2.3)$$

可以注意到, F 中的奇異点为可积分的, 而 D 中的奇異点和 $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ 结合形成非正常积分, 应取其 Cauchy 主值。如果暂时我们不考虑 D 中有奇異点存在, 并对第一个积分沿展向用分部积分法积分, 可得

$$\iint_A \frac{\partial \bar{p}(\xi, \eta)}{\partial \eta} D(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta$$

$$= \int \bar{p}(\xi, \eta) D(x-\xi, y-\eta) d\xi - \int_A \bar{p}(\xi, \eta) \frac{\partial D}{\partial \eta} d\eta d\xi \quad (2.4)$$

当前缘为非后掠时，由于在两侧翼尖处的压力为零，方程式(2.4)的第一部分将等于零。方程式(2.4)的第二部分为奇异积分，可用取其“有限部分”的方法计算。当前缘为后掠时，对一和前缘相交的展向片条，偏积分为非正常积分，因为在方程式(2.4)的两部份都将出现奇异点。将方程式(2.4)代入方程式(2.1)，可得：

$$\begin{aligned} -W(x, y, 0) &= \int_A \bar{p}(\xi, \eta) \left[-\frac{\partial D}{\partial \eta} + F + H \right] d\xi d\eta \\ &= \int_A \bar{p}(\xi, \eta) K(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.5)$$

方程式(2.5)中的量值 K 是压力—上洗积分的依惯例的核函数，但是由于其奇异特性，在计算方程式(2.5)时应特别小心。

在参考文献14和16中描述了原提出的方程式(2.1)对任意机翼的解。曾经计算出很多数值的实例。结果的准确度各有不同，而沿弦向片条的压力分佈呈现出显著的波动，虽然总的升力和力矩的结果还是相当的好。

压力的波动似乎是伴随“小格”方法而引起的。甚至对相当简单的平面形状(如二元翼型)都会发生此种波动。有鉴于此，显然“小格”的概念本身还应慎重研究。确实，可以证明，在亚音速区，对有限上洗分佈，压力分佈的不连续性是不容许的。这意味着，对平滑的连续上洗分佈，相应的压力分佈也必须是平滑和连续的，除前缘处的方根奇异点外。这就说明，象前面“小格”方法中所用的非连续的压力分佈本来就是不合适的。

为了更明显的说明此问题，我们将研究最简单的情况，即二元定常不可压缩流的情况。对此情况，核函数和积分方程式简化为

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, y-\eta) d\eta = \frac{2}{x-\xi} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} -W(x) &= -4\pi\rho U \bar{w}_a(x) \\ &= \oint \frac{2\bar{p}(\xi)}{x-\xi} d\xi \end{aligned} \quad (2.7)$$

方程式(2.7)的解为熟知的Söhlgen 反逆公式：

$$\bar{p}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{W(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (2.8)$$

当根据参考文献14中提出的方法解方程式(2.7)时，弦向区间 $(-1, 1)$ 应分为若干个(例如6个)“小格”。在每一“小格”内假设为某种简单的压力分佈，小格的中点同时取为积分点和配置点，可以写出一组右边各项为小格中心处上洗的六个联立方程式。对不变的上洗，其结果如参考文献14图5所示。虽然结果按平均说是好

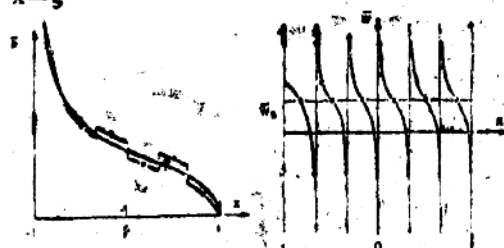


图1. 根据参考文献14的解绘制的在定常非压缩流中翼型的压力和上洗分佈
—— 正確值 - - - 6个小格

的,但沿弦向有显著的局部变化。如果将问题中压力和上洗分佈二者繪成曲綫如图1,由此曲綫可观察到下列事实:

- (1) 压力分佈的不連續性的結果是在相应分点处的上洗为无限大。
- (2) 选择均匀的“小格”大小不一定是合适的。
- (3) 由于在上洗中出现了奇異点,上洗配置点的位置是很值得推敲的。
- (4) “小格”中心不一定是最好的上洗配置点。

由上述很明显,“小格”方法对超音速流問題是更不适当的。問題的本質要求所假設的压力分佈在整个机翼上为連續的。但是不論压力分佈采取什么形式,都必須滿足一些基本的边界条件,即:(1)压力随和前緣的距离的平方根趋于无限大,(2)压力随和后緣的距离的平方根趋于零,(3)在两个翼尖处的压力为零。在压力分佈中每一項的弦向表示式可以最方便地由二元理論組合展向表示式求得,結果为一有限二重級数,每一項前面的系数将为需要根据一系列已知上洗分佈来确定的未知数。

压力分佈的表示式可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\xi, \eta) &= \bar{p}(\xi, \eta) \\ &= \frac{4\rho U^2}{h(\eta)} \sin \sqrt{1-\eta^2} \left\{ \left[a_{00} + a_{01}\eta + a_{02}\eta^2 + \dots \right] \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \right. \\ &\quad + \left[a_{10} + a_{11}\eta + a_{12}\eta^2 + \dots \right] \sqrt{1-\xi^2} \\ &\quad \left. + \left[a_{20} + a_{21}\eta + a_{22}\eta^2 + \dots \right] \xi \sqrt{1-\xi^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

式中 ξ 和 η 分别为正规化无因次的弦向和展向坐标。坐标变换将在后一节內討論。此表示式和参考文献18中所用的相同。

直到这里我們只指出了“小格”法的不合适之处。实际問題是如何对一已知平面形状,上洗分佈, M数和减縮頻率求解方程式(2.5)和方程式(2.9)。这里所提出的方法和Runyan和Woolston(参考文献(18)和其他人所用的方法相似,但是却是从一个完全不同的观点导出的,而其結果具有有一定价值的特性,这将在后面說明。这里将先由简单的二元情况开始。

在二元流中上洗分点和积分分点的最佳位置

对二元定常流,由熟知的激翼理論可知,对連續上洗分佈(例如写成如下的經過改組后的幂級数形式):

$$-W(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \left(-\frac{1}{2}x + x^2 \right) + c_3 \left(-\frac{1}{2}x + x^3 \right) + \dots \quad (3.1)$$

根据方程式

$$-W(x) = \oint_{-1}^1 \frac{2\bar{p}(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (3.2)$$

弦向压力分佈可用下列的級数表示:

$$\bar{p}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ c_0 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + c_1 \sqrt{1-\xi^2} + c_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + c_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} + \dots \right\} \quad (3.3)$$

上述級数的每一項相应于一連續上洗分佈。同时每一压力項都滿足 Kutta 边界条件，在后緣处 ($\xi = 1$ 时) 等于零。

因为压力和上洗分佈相互間为一积分方程式所联系，所以可以推测到我們的函数在每一点的值都会受另一函数整个分佈情况的影响。如果沿弦向每一点的上洗分佈都已知，則压力分佈有一唯一解。但是如果只有有限分点处上洗为已知，則同样压力也只能滿足有限数量的条件，因而不是唯一的。对 m 个已知上洗，則只能計算出在压力方程式 (3.3) 中 m 个不同的項。这样，恰当的問題是，是否存在有一組适当的上洗配置点，在某些意义上可以給出問題的最佳解。对問題的回答是肯定的，可証明如下。

假設已知 m 个点处的 m 个上洗 $W(x_1), W(x_2) \dots W(x_m)$ 。要找出—压力分佈，由此压力分佈引起的上洗在这些点 $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ 处为正确的。我們暫不确定 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 的位置。这样有三个問題需要回答。

- (1) 有没有可优先选择的上洗配置点 $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$?
- (2) 如何假設 $p(\xi)$ 的表示式?
- (3) 如果最終表示式不能用解析法积分，則应如何进行数值积分?

假設上洗 $W(x_1), W(x_2) \dots W(x_m)$ 可以由某一連續上洗分佈 $W(x)$ 确定。不需要知道关于 $W(x)$ 的更多的情况，很合理地可以假設 $W(x_1), W(x_2) \dots W(x_m)$ 为 $(m-1)$ 次多项式，例如 $W_p(x)$ ，在每一点的值，則可得：

$$-W_p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (3.4)$$

正确的压力分佈和多项式近似表示式可以由方程式 (2.8) 获得

$$\bar{p}(x) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{W(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (\text{正确值}) \quad (3.5)$$

$$\bar{p}_p(x) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{W_p(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (\text{多项式近似式}) \quad (3.6)$$

二式相减，可得

$$\bar{p}(x) - \bar{p}_p(x) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} [W(\xi) - W_p(\xi)] d\xi \quad (3.7)$$

如果能使此压力差达最小值，則可認為 $W_p(x)$ 为 $W(x)$ 的良好的近似值。但是，因为方程式 (3.7) 表示的压力差为 $-x$ 的函数，只有可能求其平均最小值，即：

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 [\bar{p}(x) - \bar{p}_p(x)] dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} [W(\xi) - W_p(\xi)] d\xi dx \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} [W(\xi) - W_p(\xi)] d\xi \\ &= \text{最小值} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

方程式 (3.8) 給我們一个很重要的条件，即如果使在 m 个点 $x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ ($x_1, x_2, x_3 \dots x_m$ 为 m 次正交多项式在区間 $(-1, 1)$ 内的根) 处上洗之差 $W(\xi) - W_p(\xi)$ 全等于零。

則可使機面升力的誤差等于零。这样，根 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ 即为所需的上洗配置点。方程式(3.8)可以得到滿足，如果 $W(\xi)$ 为一多项式，其最高次数不高于 $(2m-1)$ 。这可以很容易地証明如下：由关于 Chebysheff—Gauss 求积分公式的定理（参考文献22，P:331）可知，如方程式(3.9)所示形式的积分可以用在 m 个特定分点 x_i 处的 m 项求和公式正确地計算出，如果 $f(x)$ 为一不高于 $(2m-1)$ 次的多项式。

求积分公式为

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} f(x) dx = \sum_{i=1}^m H_i f(x_i) \quad (3.9)$$

式中

$$x_i = -\cos\left(\frac{2i\pi}{2m+1}\right) \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$H_i = \frac{2\pi}{2m+1} (1+x_i) \quad (3.10)$$

用方程式(3.9)計算方程式(3.8)中的积分，如果在由方程式(3.10)所特定的 m 个分点处 $W_p(\xi)$ 和 $W(\xi)$ 恆等，則可以获得恆等于零的结果。在这 m 个分点处 $W(\xi)$ 之值确定了表示多项式 $W_p(\xi)$ 的一个，且是唯一的 $(m-1)$ 次多项式。

此条件为最有利的，因为如果取 m 个配置点，則形态形状以及上洗可用最多为一 $(m-1)$ 次的多项式来表示。因此，这样計算出的广义力也将为正确值。但是，如前所述，如果只需升力为正确值，則用对 m 点上洗計算所得的近似结果就足以准确地代表当上洗多项式的次数不高于 $(2m-1)$ 次时所有的情况。关于这点将在下节內用几个实例說明。

要回答的第二个問題是：“如何假設压力分佈的表示式”？在简单二元定常状态的情况中，对于任何連續的上洗分佈，压力分佈可以用反逆公式(方程式(2.8))求出。因为在后緣处的 Kutta 条件和核函数的奇異特性对非定常可压缩流仍保持不变。看来，認為在定常不可压缩流的情况下获得的压力分佈在这里仍可使用是合理的。方程式(3.3)表明表示式的前面几項。在假設压力分佈的表示式，并定出上洗配置点以后，积分方程式中剩下的一些未知数就只是压力表示式的系数了。在确定这些系数以前，必須回答第三个問題，“积分如何計算？”对二元定常状态的情况，所有积分都可以用解析方法計算。但是，在一般情况，必須把奇異点适当地分离开，然后用数值方法計算。研究下面的积分

$$\oint_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{x-\xi} d\xi = \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{g(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (3.11)$$

因为 $g(\xi)$ 在区間 $-1 \leq \xi \leq 1$ 內是連續解析函数，可以写成

$$g(\xi) = g(x) + (\xi-x)g'(x) + \frac{(\xi-x)^2}{2!} g''(x) + \dots$$

或

$$\frac{g(\xi)-g(x)}{x-\xi} = g'(x) + \frac{(\xi-x)}{2} g''(x) + \dots \quad (3.12)$$

这样，方程式(3.11)可以写成

$$\oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{g(\xi)}{x-\xi} d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{g(\xi) - g(x)}{x - \xi} d\xi + g(x) \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{1}{x - \xi} d\xi \\
&= \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \frac{g(\xi) - g(x)}{x - \xi} d\xi + g(x) \pi
\end{aligned} \quad (3.13)$$

上式右边第一部份的被积函数不再是奇異函数，可以用下面的求和公式进行积分（参考文献 22，第 331 頁）：

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j f(\xi_j) \quad (3.14)$$

式中

$$\xi_j = -\cos \frac{2j-1}{2n+1} \pi, \quad j=1, 2, 3, \dots, n$$

$$H_j = \frac{2\pi}{2n+1} (1 - \xi_j)$$

如果函数 $f(\xi)$ 为 $-(2n-1)$ （或低于 $2n-1$ ）次多项式，此公式为正确值。

如果用方程式(3.14)計算在方程式(3.13)中所示形式的积分，則沒有困难，因为由方程式(3.10)导出的上洗配置分点和方程式(3.14)中表示的积分分点不相重合。 $\frac{[g(\xi) - g(x)]}{(x - \xi)}$

項可直接計算。如果 x 趋近 ξ ，此項将为 $g(\xi)$ 的一阶导数，仍为有限函数。兩組分点相互間的交叉关系到展向积分中其优点就更明显，这将在下面几节中看到。

二元机翼的数值实例

此节內将用几个实例来証明前面二节中的理論。

实例1. 定常不可压缩性流。

令正确的上洗为

$$W(\xi) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 \quad (4.1)$$

正确的压力分佈为

$$\begin{aligned}
\bar{p}(x) &= \frac{-1}{2\pi^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} \frac{1}{x-\xi} [c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3] d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[c_0 + c_1(1+x) + c_2 \left(-\frac{1}{2} + x + x^2 \right) + c_3 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + x^2 + x^3 \right) \right]
\end{aligned} \quad (4.2)$$

正确的截面升力为

$$L = b_0 \int_{-1}^1 \bar{p}(x) dx = b_0 \left[-\frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{4} + \frac{3c_3}{16} \right] \quad (4.3)$$

繞中弦軸的截面俯仰力矩（机头向上为正）为：

$$m_{\frac{1}{2}c} = -b_0^2 \int_{-1}^1 \bar{p}(x) x dx = b_0^2 \left[\frac{c_0}{4} + \frac{c_2}{16} \right] \quad (4.4)$$

假設用一綫性表示式来近似地表示上洗 $W(\xi)$ ，即 $m=1$

$$W_p(\xi) = B_0 + B_1 \xi \quad (4.5)$$

根据前节中的方程式(3.10), 必须使 $W(\xi)$ 和 $W_p(\xi)$ 在两个点即 $\xi_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ 和 $\xi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

处恒等。由此值解 B_0 和 B_1 , 得:

$$\begin{aligned} B_0 &= c_0 + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{8} \\ B_1 &= c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

近似压力分佈为

$$\begin{aligned} \bar{p}_p(x) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} [B_0 + B_1 x] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left[c_0 + \frac{c_2}{4} + \frac{c_3}{8} + (c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2})(1+x) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

截面升力的近似值为

$$L_p = b_0 \int_{-1}^1 \bar{p}_p(x) dx = b_0 \left[\frac{c_0}{2} + \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{4} + \frac{3c_3}{16} \right] \quad (4.8)$$

绕中弦轴的截面俯仰力矩近似值为:

$$m_{\frac{1}{2}p} = -b_0^2 \int_{-1}^1 \bar{p}_p(x) dx = b_0^2 \left[\frac{c_0}{4} + \frac{c_2}{16} + \frac{c_3}{32} \right] \quad (4.9)$$

这说明升力为正确的, 力矩有一包含 c_3 的高次项的误差。

实例2. 不可压缩流中的振荡运动。 对二元非定常不可压缩流, 核函数成为(见参考文献13, 第40页上的方程式B30)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, \delta) d\delta &= K_2[(x-\xi), k] \\ &= \frac{2}{x-\xi} - 2ike^{-1k(x-\xi)} \left\{ c_1[k(x-\xi)] + i \left[S_1[k(x-\xi)] + \frac{\pi}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

压力上洗积分方程式成为:

$$\begin{aligned} -W(x) &= -4\pi\rho U \bar{w}_a(x) \\ &= \int_{-1}^1 \bar{p}(\xi) K_2[(x-\xi), k] d\xi \end{aligned} \quad (4.11)$$

如果取一配置点和一积分点, 则只能假设压力 $\bar{p}(\xi)$ 的一项,

$$\bar{p}(\xi) = A \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad (4.12)$$

上洗配置和数值积分的分点分别在 $x = \frac{1}{2}$, $\xi = -\frac{1}{2}$ 处。这即熟知的 $\frac{1}{2}$ 弦线和 $-\frac{1}{2}$ 弦线点。则将有:

$$-W(x) = A \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} K_2[(x-\xi), k] d\xi \quad (4.13)$$

用解析法积分奇異部份, 其余部份用一点积分公式, 则得

$$A = \frac{-W(\frac{1}{2})}{2\pi \left\{ 1 - ik e^{-ik} [c_1(k) + i(\text{Si}(k) + \frac{\pi}{2})] \right\}} \quad (4.14)$$

对平移运动

$$\frac{1}{W_p} = -i\omega \bar{h}, \quad W = -4\pi \rho U^2 ik \frac{\bar{h}}{b} \quad (4.15)$$

这样可得

$$\begin{aligned} \bar{p}_p(\xi) &= -2\rho U^2 ik \frac{\bar{h}}{b_0} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left\{ \frac{1}{1 - ik [c_1(k) + i(\text{Si}(k) + \frac{\pi}{2})]} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

而升力为

$$\begin{aligned} L_p &= b_0 \int_{-1}^1 \bar{p}_p(\xi) d\xi \\ &= -2\pi \rho U^2 ik \bar{h} \left\{ \frac{1}{1 - ik [c_1(k) + i(\text{Si}(k) + \frac{\pi}{2})]} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

正确的结果是:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\xi) &= -2\pi \rho U^2 \frac{\bar{h}}{b_0} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left\{ ik(1+\xi) + \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \right\} \\ L &= -2\pi \rho U^2 ik \bar{h} \left\{ \frac{ik}{2} + \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)} \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

由此可以看出对一个配置点, 压力分佈不是正确值。但是升力的近似程度很好。比较如表 1。

表1. 用两种方法获得的无因次升力 L_h 的比较

$$L_h = \frac{L}{\pi \rho U^2 b_0^2 k^2 (\bar{h}/b_0)}$$

积分点数目	k	现 用 方 法	正 确 值	幅值误差	相位角误差
1	0	0 - ∞i	0 - ∞i	0	0°
1	0.1	-1.0896 - 8.3067i	-1.223 - 8.320i	-0.37%	1°
1	0.5	0.2100 - 0.9817i	0.1986 - 1.1958i	-17.0%	1.45°
1	1.0	0.2396 - 0.2162i	0.3996 - 0.5394i	-51.9%	1.3°
2	0.5	0.1827 - 1.1768i	0.1986 - 1.1958i	-1.55%	0.7°

由上表可以看出, 一点近似的結果确实是很好的。当减缩频率 k 增加时, 准确度将比较差。为了说明用較好的积分方法可以改进到如何程度, 对 $k=0.5$ 的情况采用了 2 点积分公式, 結果如表中最后一行所示。幅值的误差由 -17% 减小到非常低的值 -1.55%。因此, 可以得出結論, 如果采用的积分点和配置点的数目越多, 則結果越准确。

实例3. 非定常可压缩流中的二元机翼。对二元非定常流, 核函数如参考文献13的方程式 B18 所給, 为:

$$\begin{aligned}
K(x-\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, \delta) d\delta \\
&= \frac{-\pi k}{\sqrt{1-M^2}} e^{-ik(x-\xi)} \left\{ e^{ik \frac{(x-\xi)}{1-M^2}} \left[i M H_1^{(2)} \left(\frac{Mk|x-\xi|}{1-M^2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - H_0^{(2)} \left(\frac{Mk|x-\xi|}{1-M^2} \right) \right] + \frac{2i\sqrt{1-M^2}}{\pi} \ln \frac{1+\sqrt{1-M^2}}{M} \right. \\
&\quad \left. + ik \int_0^{(x-\xi)} \frac{ik\lambda}{1-M^2} H_0^{(2)} \left(\frac{Mk\lambda}{1-M^2} \right) d\lambda \right\} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

上述核函数可分为两部份，非奇異部份 K_{ns} ，和奇異部份 K_s 。

$$\begin{aligned}
K_{ns}(x-\xi) &= \frac{-\pi k}{\sqrt{1-M^2}} \left\{ e^{\frac{ikM^2(x-\xi)}{1-M^2}} i M \frac{|x-\xi|}{x-\xi} H_1^{(2)} \left(\frac{Mk|x-\xi|}{1-M^2} \right) + \frac{2(1-M^2)}{\pi k(x-\xi)} \right. \\
&\quad \left. - e^{\frac{ikM^2(x-\xi)}{1-M^2}} H_0^{(2)} \left(\frac{Mk|x-\xi|}{1-M^2} \right) - i \frac{2}{\pi} \ln |x-\xi| \right. \\
&\quad \left. + i \frac{2\sqrt{1-M^2}}{\pi} e^{-ik(x-\xi)} \ln \frac{1+\sqrt{1-M^2}}{M} \right. \\
&\quad \left. + ik e^{-ik(x-\xi)} \int_0^{(x-\xi)} e^{\frac{ik\lambda}{1-M^2}} H_0^{(2)} \left(\frac{Mk\lambda}{1-M^2} \right) d\lambda \right\} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

$$K_s(x-\xi) = \frac{2\sqrt{1-M^2}}{x-\xi} - ik \frac{2}{\sqrt{1-M^2}} \ln |x-\xi| \quad (4.21)$$

如果我們假設壓力包括下列四項：

$$\begin{aligned}
\bar{p}(\xi) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-M^2}} \left[\bar{p}_0 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + \bar{p}_1 \sqrt{1-\xi^2} + \bar{p}_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} \right. \\
&\quad \left. + \bar{p}_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \right] \quad (4.22)
\end{aligned}$$

則上式可表示如下：

$$-w(x) = \int_{-1}^1 \bar{p}(\xi) \{ K_s(x-\xi) + K_{ns}(x-\xi) \} d\xi \quad (4.23)$$

第一部份可用解析方法積分，結果如下：

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \bar{p}(\xi) K_s(x-\xi) d\xi \\
&= \bar{p}_0 \left[1 - \frac{ik}{1-M^2} (x^2 - \ln 2) \right] \\
&\quad + \bar{p}_1 \left[-\frac{ik}{1-M^2} \left(-\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \right] \\
&\quad + \bar{p}_2 \left[\left(-\frac{1}{2} + x^2 \right) - \frac{ik}{1-M^2} \left(-\frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] \\
&\quad + \bar{p}_3 \left[\left(-\frac{x}{2} + x^3 \right) - \frac{ik}{1-M^2} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4} \right) \right] \quad (4.24)
\end{aligned}$$

第二部份虽为非奇異部份，积分也不容易，其数值計算必須用方程式(3.14)進行：

$$\begin{aligned}
 -W(x) &= \int_{-1}^1 \bar{p}(\xi) K_{ns}(x-\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-M^2}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left[\bar{p}_0 + \bar{p}_1(1+\xi) + \bar{p}_2\xi(1+\xi) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{p}_3\xi^2(1+\xi) \right] K_{ns}(x-\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-M^2}} \sum_{j=1}^n H_j \left[\bar{p}_0 + \bar{p}_1(1+\xi_j) + \bar{p}_2\xi_j(1+\xi_j) + \bar{p}_3\xi_j^2(1+\xi_j) \right]
 \end{aligned} \quad (4.25)$$

式中

$$\xi_j = -\cos \frac{2j-1}{2n+1} \pi, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$H_j = \frac{2\pi}{2n+1} (1-\xi_j)$$

因为在压力表示式中包括了四项，因而将有四个上洗配置分点。即

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -0.766,044 \\
 x_2 &= -0.173,648 \\
 x_3 &= 0.500,000 \\
 x_4 &= 0.939,693
 \end{aligned} \quad (4.26)$$

如果采用四个积分分点，将为

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= -0.939,693 \\
 \xi_2 &= -0.500,000 \\
 \xi_3 &= 0.173,648 \\
 \xi_4 &= 0.766,044
 \end{aligned} \quad (4.27)$$

核函数的非奇異部份 K_{ns} 必須对所有 $x_i - \xi_j$ 的组合进行計算。若 $M=0.7$, $k=0.3$ ，只有十个 K_{ns} 之值必須計算，如下表所示。用这些值，将其代入方程式(4.25)，可以形成

一組 $\bar{p}$ 的联立方程式，可以对任何形式的运动求解压力分佈。

对这个情况，矩陣方程式如下：

$$\begin{pmatrix}
 1.873,56 & -0.380,04 & 0.066,17 & 0.031,44 \\
 +1.381,32i & +0.463,75i & -0.127,46i & +0.138,74i \\
 1.972,95 & 0.267,57 & -0.495,85 & 0.192,41 \\
 +0.943,06i & +0.593,74i & -0.034,27i & +0.098,95i \\
 2.010,94 & 0.993,48 & -0.264,05 & -0.006,34 \\
 +0.416,61i & +0.479,36i & +0.146,09i & +0.109,48i \\
 1.993,33 & 1.446,89 & 0.382,74 & 0.483,62 \\
 +0.065,08i & +0.249,93i & +0.140,05i & +0.087,07i
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \bar{p}_0 \\
 \bar{p}_1 \\
 \bar{p}_2 \\
 \bar{p}_4
 \end{pmatrix}
 = \{W(x_1), W(x_2), W(x_3), W(x_4)\}^T \quad (4.28)$$

对平移运动, 上式右边为:

$$-\begin{pmatrix} W(x_1) \\ W(x_2) \\ W(x_3) \\ W(x_4) \end{pmatrix} = 4\pi\rho U^2 \frac{\bar{h}}{b_0} \begin{pmatrix} -0.3i \\ -0.3i \\ -0.3i \\ -0.3i \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

对绕中弦点的俯仰运动, (4.28)式右边为

$$-\begin{pmatrix} W(x_1) \\ W(x_2) \\ W(x_3) \\ W(x_4) \end{pmatrix} = 4\pi\rho U^2 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \begin{pmatrix} 1-0.229,813i \\ 1-0.052,094i \\ 1+0.150,000i \\ 1+0.281,908i \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

求解 $\bar{p}$, 可获得如下的结果。对平移运动:

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_0 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{pmatrix} = 4\pi\rho U^2 \frac{\bar{h}}{b_0} \begin{pmatrix} -0.088,244-0.130,873i \\ 0.106,879-0.048,293i \\ 0.013,120+0.018,412i \\ -0.003,227+0.002,429i \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

对俯仰运动

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_0 \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \end{pmatrix} = 4\pi\rho U^2 \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \begin{pmatrix} 0.459,153-0.386,168i \\ 0.207,113+0.679,162i \\ -0.155,962+0.056,938i \\ -0.009,827-0.024,290i \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

将全部 $\bar{p}$ 之值代入方程式(4.22)即得压力分佈情况, 繪成曲綫如图 2。

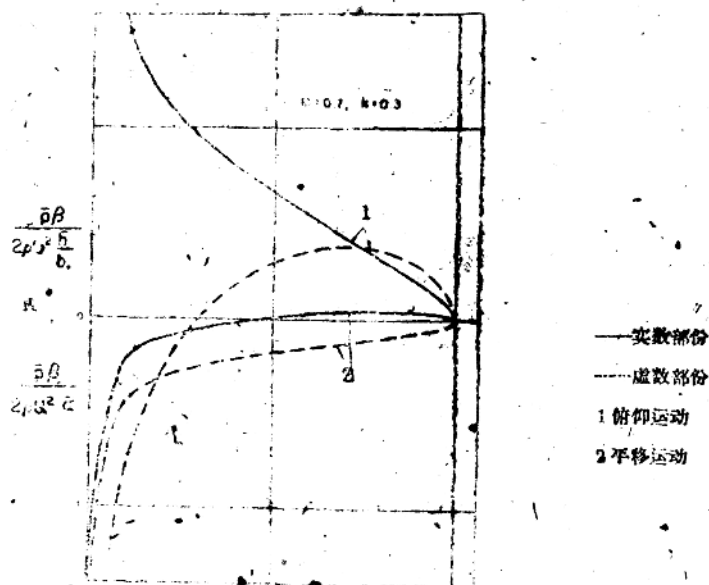


图2 $M=0.7$ $\alpha=0.3$ 时振盪机翼上的弦向压力分佈。

总升力和绕 1/4 弦线点的力矩可用正确积分计算出。其结果和 Fetti 和 Dietze (参考文献 23) 获得的结果的比较如表 3 所示

表3. 用三种不同方法获得的、亚音速流中薄翼型上载荷的比较

$$\begin{aligned} L_h &= \frac{l}{\pi \rho U^2 b_0 k^2 (\bar{h}/b_0)} \\ L_a &= \frac{l}{\pi \rho U^2 b_0 k^2 (\bar{\alpha})} \\ M_{h(\frac{c}{4})} &= \frac{m(\frac{c}{4})}{\pi \rho U^2 b_0^3 k^2 (\bar{h}/b_0)} \\ M_{a(\frac{c}{4})} &= \frac{m(\frac{c}{4})}{\pi \rho U^2 b_0^3 k^2 (\bar{\alpha})} \end{aligned} \quad (4.33)$$

	L_h	L_a	$M_{h(\frac{c}{4})}$	$M_{a(\frac{c}{4})}$
现用方法	-1.0959 -4.81434i	-17.471 1.54416i	0.87620 -0.29934i	-0.98545 -5.45766i
Fetti	-1.102 -4.789i	-17.91 -0.807i	0.842 -0.310i	-0.5962 -5.447i
Dietze	-1.0111 -4.81333i	-18.03222 -0.84078i	0.87389 -0.29900i	-0.55589 -5.60667i

可以看出, 结果是很满意的。从在每一种方法中所作的假设来看, 一致性是合理的。对于 L_a , 其相位角的不一致性是多少为我们所不希望有的, 这是因为机翼颤振对此量值很灵敏。如果在压力表示式中采用更多的项, 并采用更精确的积分公式误差可以减小。

沿翼展方向上洗分点的最佳位置和数值积分技术

沿翼展方向上洗配置分点的最佳位置可根据和第 3 节中弦向情况相似的推论确定。为此, 我们将考虑一不可压缩流中的升力线。

$$-W(y) = \oint_{-s}^s \frac{\partial l(\eta)}{\partial \eta} \frac{1}{y-\eta} d\eta \quad (5.1)$$

和前面一样, 式中 $l(\eta)$ 为 $\bar{p}$ 的弦向积分。根据升力线两端升力为零的条件, 反演公式为:

$$\frac{\partial l(y)}{\partial y} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{s^2-y^2}} \oint_{-s}^s \frac{\sqrt{s^2-\eta^2}}{y-\eta} W(\eta) d\eta \quad (5.2)$$

这里令:

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \text{正确载荷 } l \text{ 对 } y \text{ 的偏导数}$$

$$\frac{\partial l_n}{\partial y} = \text{载荷的近似多项式 } l_n \text{ 对 } y \text{ 的偏导数}$$

$W(\eta)$ = 正确的展向上洗分佈

$W_p(\eta)$ = 上洗分佈的近似多項式

这样，我們有

$$\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial l_p}{\partial y} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-s}^s \frac{1}{\sqrt{s^2 - \eta^2}} \frac{1}{y - \eta} [W(\eta) - W_p(\eta)] d\eta \quad (5.3)$$

总升力之差可由量值 $y \left[\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial l_p}{\partial y} \right]$ 的偏积分給出:

$$\int_{-s}^s y \left[\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial l_p}{\partial y} \right] dy = y \left[l - l_p \right] - \int_{-s}^s [l - l_p] dy = -\Delta L \quad (5.4)$$

应注意，由于在翼展两端 l 和 l_p 都为零，方程式(5.4)的第一項亦为零。将方程式(5.3)代入方程式(5.4)，可得:

$$\begin{aligned} \Delta L &= - \int_{-s}^s y \left[\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial l_p}{\partial y} \right] dy \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \int_{-s}^s \frac{1}{\sqrt{s^2 - y^2}} \int_{-s}^s \frac{1}{\sqrt{s^2 - \eta^2}} \frac{1}{y - \eta} [W(\eta) - W_p(\eta)] d\eta dy \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{-s}^s \sqrt{s^2 - \eta^2} [W(\eta) - W_p(\eta)] d\eta \\ &= \text{最小值} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

因此，为了使升力差为最小，由方程式(5.5)可看出， $W(\eta)$ 和 $W_p(\eta)$ 必須在下列点处为全等，这些点为在区間 $-s \leq \eta \leq s$ 內对 $\sqrt{s^2 - \eta^2}$ 为正交的多項式的根。用龍明弦向情况的同样理由和参考文献 22 第 331 頁，可得

$$\begin{aligned} \int_{-s}^s \sqrt{s^2 - y^2} g(y) dy &= s^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \underline{y}^2} g(s\underline{y}) d\underline{y} \\ &= s^2 \sum_{r=1}^R H_r g(s\underline{y}_r) \end{aligned}$$

式中

$$\underline{y}_r = -\cos \frac{r\pi}{R+1}, \quad r=1, 2, \dots, R$$

$$H_r = \frac{\pi(1 - \underline{y}_r)^2}{R+1} \quad (5.6)$$

方程式(5.6)为正确解，如果 $g(s\underline{y})$ 为一不高于 $(2R-1)$ 次的多項式。

用方程式(5.6)計算方程式(5.5)中的积分，可获得如下的結果：如果 $W(\eta)$ 为一不高于 $(2R-1)$ 次的多項式，而 $W_p(\eta)$ 为一 $(R-1)$ 次多項式，方程式(5.5)的条件可完全滿足。在方程式(5.6)所給出的12个分点处使 $W(\eta)$ 和 $W_p(\eta)$ 相等。而且，不仅是升力，而且高阶展向力矩都将是正确的，如果 $W(\eta)$ 为一低于 $(2R-1)$ 次的多項式。

可以看出，这里推导出的下洗配份分点和 Muthopp (参考文献19) 所用的完全相同，理由也很相似。

在上洗分点的位置确定以后，则需要研究展向积分技术。在讨论积分方程式的最一般的形式（如方程式(2.1)或(2.5)）以前，先来研究方程式(5.1)即已足够，因为沿翼展方向用适当的分部积分的方法和翼弦方向的积分，方程式(2.1)或方程式(2.5)可简化为定常状态情况中的方程式(5.1)。在方程式(5.1)中，展向升力分佈如离翼尖距离的平方根一样趋于零，即

$$l(\eta) \approx \sqrt{s^2 - \eta^2} f(\eta) \quad (5.7)$$

因此我们将研究如下的一般形式的积分：

$$I(y) = \int_{-s}^s \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{s^2 - \eta^2} G(y, \eta) \right] \frac{1}{y - \eta} d\eta \quad (5.8)$$

这里 $G(y, \eta)$ 为以 y 为参数的 η 的有限解析函数。但是我们必须记住，通常 $G(y, \eta)$ 为一非常复杂的函数，只能在一定数量的已知点处求其数值。很明显，方程式(5.8)不能用作数值积分，因为不仅在 $y = \eta$ 处有一奇異点，而且对 η 的微分也非常困难。如果消除 $y = \eta$ 处的奇異点并用分部积分法，则困难可以避免。写出

$$\begin{aligned} I(y) &= \oint_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{s^2 - \eta^2} G(y, \eta) \right] \cdot \frac{1}{y - \eta} d\eta \\ &= \oint_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \right] \cdot \frac{1}{y - \eta} d\eta \\ &\quad + G(y, y) \oint_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{s^2 - \eta^2} \right] \frac{1}{y - \eta} d\eta \end{aligned} \quad (5.9)$$

第一部份可以用分部积分法积分，第二部份积分得到 π 。为了避免围绕 $y = \eta$ 处的奇異点，我们将积分写成下面的形式：

$$\begin{aligned} I(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-s}^{y-\epsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \right] \frac{1}{y - \eta} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \int_{y+\epsilon}^s \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \right] \frac{1}{y - \eta} d\eta \right\} \\ &\quad + G(y, y) \pi \end{aligned} \quad (5.10)$$

用分部积分法积分方程式(5.10)，可得：

$$\begin{aligned} I(y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \frac{1}{y - \eta} \right]_{-s}^{y-\epsilon} \\ &\quad - \int_{-s}^{y-\epsilon} \sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \frac{1}{(y - \eta)^2} d\eta \\ &\quad + \sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \frac{1}{y - \eta} \Big|_{y+\epsilon}^s \\ &\quad - \int_{y+\epsilon}^s \sqrt{s^2 - \eta^2} (G(y, \eta) - G(y, y)) \frac{1}{(y - \eta)^2} d\eta \Big\} \\ &\quad + G(y, y) \pi \end{aligned} \quad (5.11)$$

因为 $G(y, \eta)$ 为連續函数，其所有导数都存在，可得：