工程断裂力学

尹双增 编著

邯郸市科学技术协会

前 言

断裂力学是一门较新的学科，它能解决一些传统力学所不能解决的问题，断裂力学是传统力学有力的补充和发展。

本书系统地叙述了断裂力学的物理概念、基本原理、计算方法、测试技术和工程应用等，内容比较广泛、丰富，不仅可供教学、科研工作者参考，对工程技术工作者也有一定参考价值。全书共分八章，第一章至第五章为线弹性断裂力学；第六、七章为弹塑性断裂力学；第八章为工程应用的方法、步骤和若干方面的应用分析。为了便于读者学习和应用，在附录中还介绍了一些有关的基础知识。

本书出版承蒙邯郸市科学技术协会特别是王少坤和刘凤岭同志的大力支持和帮助，封面设计为华北水电学院邱从仪同志所作，华北水电学院张仲义同志帮助进行了大量校对工作，在此一并致谢。

由于编著者水平有限，加之时间短促，工作不够细致。可能会有错误和不妥之处，请读者批评指正。

编著者

1985.6

目　　录

附录

第一章　绪　论

§1.1　断裂力学的由来和产生

断裂力学是近卅多年来发展起来的一门学科，是固体力学新兴的一个重要分支，由于它和其它许多学科、工程技术有着密切的联系，所以这门学科得到了迅速的发展。为了了解断裂力学的由来和产生背景，我们首先看看常规的强度计算理论和它存在的问题。长期以来，工程上对构件或结构的计算方法，是以材料力学和结构力学为基础的。它通常假定材料是个均匀的连续体，避开客观存在的裂纹和缺陷，计算时只要工作应力不超过许用应力，就认为结构安全，反之就不安全。工作应力根据载荷情况、构件几何尺寸计算出来，许用应力则根据工作条件和材料性质选用，强度条件为：

$$\sigma \leqslant [\sigma] = \frac{\sigma^{\circ}}{k} \qquad (1.1)$$

σ—构件危险点的工作应力，

σ°—材料的极限应力　　〔σ〕—选用的材料许用应力

k—安全系数

常规的计算理论认为，只要满足上述条件，构件就能安全使用。对于实际结构中可能存在的缺陷和其它考虑不到的因素，都放在上式的安全系数里考虑。这种传统的强度计算方法已有一百多年的历史了，它在过去的工程设计中发挥了重要的作用。但是，工程中一系列“低应力脆断”事故的发生，动摇了上述设计思想的安全感。1950年美国北极星导弹发动机壳体试验时的爆炸破坏，就是一例。它的屈服强度是160kg/mm^2，但在试验时工作应力只到70kg/mm^{2}就爆炸了。比利时刚建成不久的一座大桥，跨度75.4米，突然发生巨大开裂，整座桥断成三截。据统计，在1938年～1943年期间，象这样破坏的焊接桥梁有40座之多。人们经过长期的观察研究发现，这些破坏事故具有共同的特点：

1、破坏时工作应力水平大大地低于材料的屈服应力；

2、破坏的根源都是起源于构件内微小的裂纹。

这些特点一方面说明，在某些情况下，传统的强度计算方法并不能保证构件安全；同时也使人们认识到，对含有裂纹物体必须作进一步的研究，对微小的裂纹必须作进一步的力学分析。断裂力学就是在这个基础上应运而生的。

§1.2　断裂力学的研究对象和任务

什么叫断裂力学呢？断裂力学是研究带裂纹体的强度以及裂纹扩展规律的一门学科。由于研究的主要对象是裂纹，因此，也有叫“裂纹力学”的。它的主要研究任务是：研究裂纹

尖端附近应力应变情况，掌握裂纹在载荷作用下的扩展规律；了解带裂纹构件的承载能力，从而提出抗断设计的方法，以保证构件的安全工作。由于断裂力学能把含裂纹构件的断裂应力和裂纹大小以及材料抵抗裂纹扩展的能力（即K_{Ic}）定量地联系在一起，所以它不仅能园满地解释常规设计不能解释的"低应力脆断"事故，而且也为避免这类事故找到了办法，同时它也为发展新材料，创造新工艺指明了方向，为材料的强度设计打开了一个新的领域。正因为这些原故，断裂力学引起了各学科、各工程技术部门的广泛重视和应用，从而获得了迅猛的发展。

当然，也不能说常规的强度计算理论可以不要了，断裂力学可以代替一切了。断裂力学应看作常规设计的发展和补充。它有自己的特定条件，这就是：第一，它的对象是含裂纹或缺陷的物体；第二，要有一个容易促使断裂的应力，一般来讲，比较容易发生断裂的是拉应力；第三，就是材料本身的微观结构对脆断敏感，即它的断裂韧性比较低。这三个条件合在一起才有可能发生断裂，不是在什么情况下都要用断裂力学，它根本不能完全代替常规的强度设计。常规强度计算对于一般材料（如中低强度钢）在常温、静载下的强度计算，特别是对于塑性破坏还是适用的。

§1.3 应力集中和断裂破坏

我们已知道，含裂纹构件的断裂应力比无裂纹构件的破坏应力要低的多，这是什么道理呢？

如有有、无裂纹的两构件，在它们受用样外力作用时，我们看它们的应力分布有什么不同。如图1．1所示。两构件都受到单向拉力作用。显然，无裂纹构件的应力是均匀分布的，即截面上每一点的应力都等于

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

式中A为构件截面面积。如用应力线的概念表示应力，则对无裂纹体，由于应力是均匀分布的，其应力线也是均匀分布的，如图1．1（a）所示。对有裂纹的构件（如裂纹长度为2a），假定受同样的外力P作用，这时截面上的应力分布就不再均匀了，应力线也不是均布的了。这是因为裂纹内表面是空腔，没有应力作用，因而应力线不能通过，只有被迫绕过裂纹挤在裂纹两端的原故。这样，长度为2a的裂纹上的应力线全部挤在裂纹尖端，使裂纹尖端的应力线密度增大，因而使裂纹尖端的应力增大。这就是说，在裂纹尖端小区域内，应力值远比截面上的平均应力大，即造成了应力集中现象。显然，裂纹越长，造成的应力集中现象越严重。当这种局部集中应力大到临界断裂应力值时，裂纹快速扩展，裂纹尖端材料分离，以致使构件断裂破坏。因此，使带有裂纹的构件的强度大为降低，甚至在低于材料屈服强度时，就可能断裂破坏。这就是含裂纹构件的断裂应力远比无裂纹构件破坏应力低的原因。

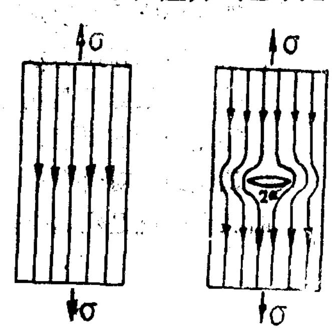


图1.1有无裂纹体的应力分布

从此可以看出，断裂破坏和应力集中有着密切的联系。

§ 1．4　断裂韧性和应力强度因子的概念

从上面的分析可以看出，构件含有的裂纹愈长，应力集中愈严重，构件的断裂应力也就愈低。对于大量含裂纹构件断裂事故的分析和大量实验都表明：

1、断裂应力σ_c和裂纹尺寸的平方根成反比，即$\sigma_c \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$；

2、断裂应力σ_c也与裂纹的形式、加载方式有关，即$\sigma_c \propto \frac{1}{\sqrt{a}\,Y}$其中的Y是与裂纹形状及加载方式有关的量。

对于每一种特定工艺状态下的材料来说，$\sigma_c\sqrt{a}\,Y=$常数　这个常数表明材料抵抗断裂的能力，我们把这个常数称为材料的断裂韧性（或叫断裂韧度）用K_{IC}表示，即

$$K_{IC}=\sigma_c\sqrt{a}\,Y \qquad (1.2)$$

显然，K_{IC}愈大表明材料抵抗断裂的能力愈大。各种材料的K_{Ic}值是可以通过实验手段测试出来的。

关于应力强度因子的概念，我们可以通过下面一个实例来考查。如图1．2所示，在试样中心有一个长度为2a的贯穿裂纹，外加拉应力和裂纹平面垂直。如采用图中坐标系，则可以证明，在裂纹尖端附近有如下的应力分布：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right\}\\
\sigma_y&=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left\{\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right\}\\
\tau_{xy}&=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

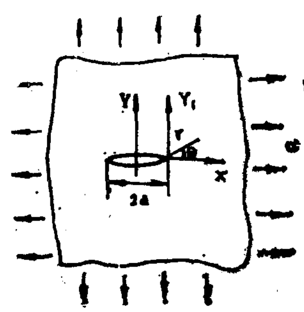


图1．2　I型裂纹

由（1．3）式可以看出，各应力分量中都含有K_I，它是与裂纹大小、裂纹形状和应力有关的量，脚注I表明在外力作用下裂纹张开，叫张开型裂纹或叫I型裂纹；对于裂纹尖端附近的某一点A，其坐标r是已知的，式中其余项都是角度θ的函数；由此可知，该点的内应力大小就完全由K_I决定的。K_I大，裂纹尖端各点的应力就大。K_I控制和决定了裂纹尖端附近的应力场，它是应力强度的决定因素，所以断裂力学中把K_I称为应力场的强度因子，简称应力强度因子。它的表达式为：

$$K_I=\sigma\sqrt{a}\,Y \qquad (1.4)$$

显然，随着外应力σ增大，K_I也不断增大，而裂纹尖端各点的内应力也随着K_I增大而增

大。当K_I增大到某一临界值时，就能使裂纹尖端附近区域内的内应力σ_y大到足以使材料分离，从而导致裂纹失稳扩展，试件断裂。这种临界状态所对应的应力强度因子称为临界应力强度因子。它在数值上就等于前述的材料的断裂韧性。很明显当外应力σ增大到使K_I等于材料的断裂韧性K_{IC}时构件就要断裂，即

$$K_I = K_{IC} \qquad (1.5)$$

时断裂。

可以看出，K_I和K_{IC}的关系，像σ和σ_S的关系一样，K_I、σ都是属于工作应力的一方，K_{Ic}、σ_s都是属于材料本身性能的一方。K_I是裂纹尖端应力场强度的度量，它和外加应力、裂纹大小、形状有关；而K_{Ic}则完全是材料的特性，它与外力、裂纹场无关，只和材料成份及加工工艺等有关。

第二章 裂纹尖端附近应力应变场

断裂和断裂力学分为宏观的和微观的两大类。工程断裂力学内容所涉及的是宏观的断裂力学，即在不涉及材料内部断裂机理的条件下，给出研究所必要的力学解答，从整体来说，仍然把构件看成是带有裂纹的均匀质连续体。

由于人们开始研究断裂力学时的侧重面是高强度、低韧性钢，这种材料在发生低应力脆断时几乎没有明显的塑性变形发生，因此是按线性弹性理论分析的，所以称为线弹性断裂力学。线弹性断裂力学所研究的构件都看作是理想的线性弹性体，这和常规的强度计算是相同的，所不同的则在于线弹性断裂力学是从构件具有初始裂纹〔或缺陷〕这一实际情况出发的。

建立在线弹性理论基础上的应力强度因子的观点，由于获得了巨大的成就和迅速的推广，所以它得到了广泛的采纳。但同时也必须指出，它也有一定的限制，它只适用于高强度钢以及中、低强度钢在低温度下使用或具有厚截面的构件。因为只有这些情况才会发生低应力脆性断裂。

在有些情况下，断裂时在裂纹尖端总难免发生塑性变形。但如果断裂前裂纹尖端发生的塑性区很小，也即塑性区的尺寸比裂纹的尺寸小一个数量级以上的小范围屈服情况，那么，这时仍然可以利用线弹性断裂力学的理论和方法解决问题，只是这时要引入塑性区的修正，才可以对应力强度因子K进行近似计算。

§2.1 裂纹的基本形式

由前面的分析可知，裂纹是引起脆断的主要因素，在我们研究裂纹尖端应力应变场以前，有必要对裂纹的形式进行分析和归纳。

一、按裂纹在构件中的位置，裂纹可分为：

1、穿透裂纹（图2．1a）

2、表面裂纹（图2．1b）

3、埋藏裂纹（图2．1c）

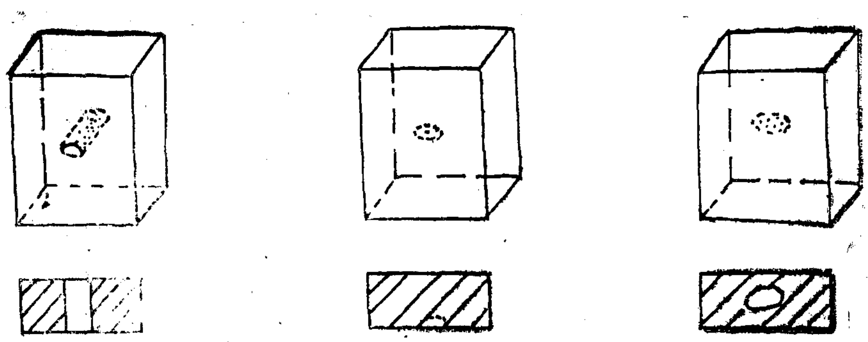
二、按照裂纹在外力作用下扩张方式又可分为三种形式：

1、张开型（Ⅰ型）：在垂直于裂纹面的拉应力作用下，使裂纹张开而扩展。（图2．2a）

2、滑移型（Ⅱ型）：在平行于裂纹表面而垂直于裂纹前缘的剪应力作用下，使裂纹滑开而扩展（图2．2b）

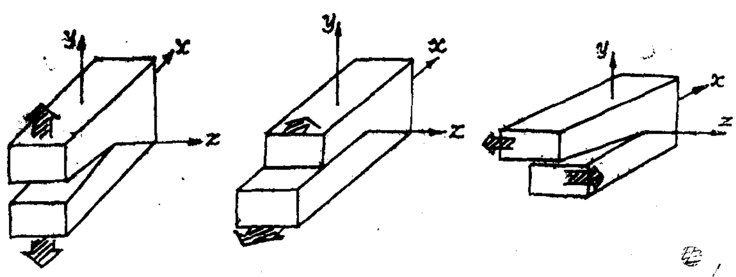
3、撕裂型（Ⅲ型）：在既平行于裂纹表面又平行于裂纹前缘的剪应力作用下，使裂纹撕开而扩展（图2．2c）

如果裂纹同时受正应力和剪应力作用，这时同时存在Ⅰ和Ⅱ型（或Ⅲ型）称为复合型裂纹。



a）穿透裂纹　　b）表面裂纹　　c）埋藏裂纹

图2.1



a）Ⅰ型（张开型）　b）Ⅱ型（滑开型）　c）Ⅲ型（撕开型）

图2．2

§2.2　平面应力状态和平面应变状态

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系，此时应力与应变都是三个坐标的函数，这就是空间问题。但在工程实际中有些问问题往往可以简化为平面问题，如果物体有特殊形状（三个尺寸中的一个尺寸远小于或远大于其他两个尺寸），并受到特殊的外力分布时，空间问题就可以简化为平面问题。这时只需要考虑平行于某一平面的应力、形变和位移，而这些量仅是二个坐标的函数。平面问题又可分为平面应力问题和平面应变问题。

一、平面应力状态：

取一带裂纹的均匀薄板（图2．3a），在板的平面内受到平行于板面的外力σ作用，因板很薄，可认为外力沿板厚无变化。在平行于板的平面内取直角坐标：以裂纹前缘上0点为坐标原点，沿裂纹方向为x轴，垂直于裂纹面方向为y轴，垂直于板面方面为z轴。可认为在整个薄板的两侧面各点上：

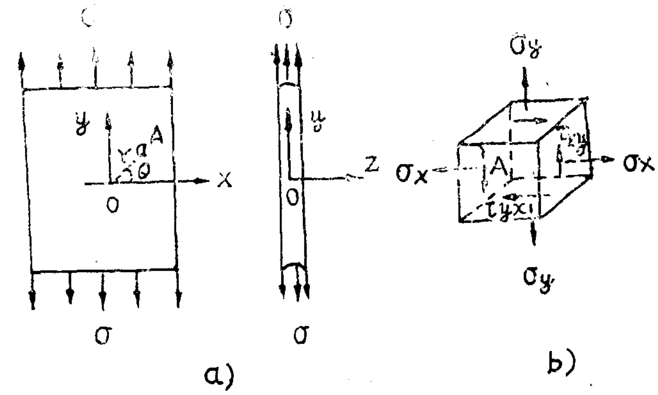


图2．3平面应力状态

$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0 \qquad \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$

由于板很薄，因此可以假定，在板内的任何一点处$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$。在距裂纹尖端附近的A点（极坐标为r、$\theta$）取单元体，则此单元体上只有平行于xoy平面的三个应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}（图2．3b）而且这种应力分量只是（x、y）的函数，与z轴无关，这种情况称为平面应力状态。平面应力状态下的应力与应变关系为：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\cdot(\varepsilon_x + \nu\cdot\varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\cdot(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\
\tau_{xy} &= \gamma_{xy}\cdot\mu
\end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

或：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\
\varepsilon_z &= \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu}\cdot\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\cdot\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

由上两式可见，沿z轴方向虽无应力，但根据弹性体具有横向变形的性质，却有应变存在，即$\varepsilon_z \neq 0$，所以，平面应力状态是三向应变问题。

对于带裂纹的薄板，在平面应力状态下，由于z轴方向尺寸很小，实际上没有约束作用，这种无约束的平面应力状态导致裂纹尖端产生相当大的变形和屈服区域。当薄板断裂时，先在裂纹尖端附近有较大的塑性变形，然后裂纹开始扩展直至完全断裂，形成典型的剪切滑移型断面。

二、平面应变状态：

若构件在z轴方向厚度尺寸很大，与oz轴垂直的各横截面均相同（如长园柱体、重力

坝、厚壁园筒等）；荷载又垂直于z轴且沿z轴方向没有变化，则可认为在任一横截面内的应力和应变相同，也即它的位移u、v与z坐标无关，只是（x、y）的函数，而z轴方向因尺寸很大，如切出一个平面则它的变形受到两侧构件的限制，即$\varepsilon_z=0$，所以这种情况叫做平面应变状态。这种状况下的应力、应变关系为：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{(1-\nu)\cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_x+\frac{\nu}{1-\nu}\cdot\varepsilon_y\right)\\
\sigma_y &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_y+\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_x\right)\\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x+\sigma_y)\\
\tau_{xy} &= \gamma_{xy}\cdot\mu
\end{aligned}\right\}\quad(2.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y\right]\\
\varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x\right]\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\cdot\tau_{xy}
\end{aligned}\right\}\quad(2.4)$$

由上式看出：沿z轴方向虽无应变，但有应力，$\sigma_z\neq0$，所以平面应变状态是三向应力状态，（图2．4）

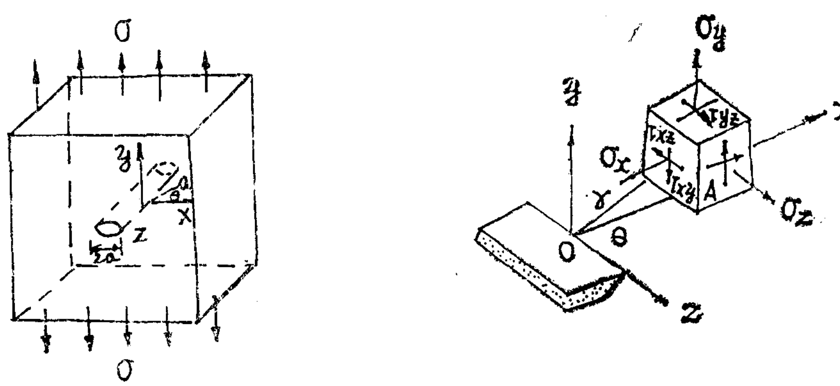


图2．4平面应变状态

在平面应变状态下，对于厚度大的带裂纹构件，因z轴方向尺寸很大，裂纹尖端的塑性区域受到约束，除了自由表面，各点z轴方向的应变、位移均等于零，使裂纹体处于三向拉伸应力状态下，材料不易发生塑性变形，却容易发生脆性断裂。这样，裂纹扩展后得到的是典型的脆性断口，只在靠近自由表面的区域部分产生剪切变形。但对厚断面构件，一般可忽略自由表面的局部变形而看作平面应变状态。

由上述分析可知，构件的厚度关系着破坏的形式，随着厚度的变化，塑性变形的约束程度不同，可以出现平面应力状态，也可能是平面应变状态或者是两者混合形式的破坏。如厚度是中等的，则两个外表面或靠近两表面的部分属于平面应力状态；中间部分由于受到两端面的约束，故属平面应变状态。

§2.3 平面问题的弹性方程

前面曾经提到，断裂力学的分析方法是建立在弹性理论基础上的，而弹性理轮分析问题和材料力学一样，也是从三方面来考虑的：静力学方面、几何学方面和物理学方面。从这三个方面来研究弹性变形体内存在的规律性，从而使问题得到解决。由弹性力学知，对于平面问题（包括平面应力状态和平面应变状态）有下列弹性方程。

一、平衡微分方程和边界条件：

1、平衡微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+y=0\end{aligned}\right\}\quad(2.5)$$

式中σ_x、σ_y和τ_{xy}为构件内单元体上的应力分量，x、y为体积力。

2、边界条件：

$$\left.\begin{aligned}\overline{x}=\sigma_x\cdot L+\tau_{xy}\cdot m\\ \overline{y}=\tau_{xy}L+\sigma_y\cdot m\end{aligned}\right\}\quad(2.6)$$

式中$\overline{x}$、$\overline{y}$为边界上表面力的分量，σ_x、σ_y、τ_{xy}为边界上各点的应力分量。L、m是边界外法线方向与x、y坐标的方向余弦

即：

cos（N，x）=L

cos（N，y）=m

二、应变和位移的关系式，应变协调方程

1、应变和位移关系式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\quad(2.7)$$

式中ε_x、ε_y、γ_{xy}是应变分量，u、v为位移分量。

2、应变协调方程：

从上面方程看出，应变分量有三个，而位移分量只有两个，因此三个应变量不能彼此独立，它们之间必定存在着一定的关系式，将上式中第一式对y偏导两次，第二式对x偏导两次，并相加即得：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\cdot\partial y}\qquad(2.8)$$

这就是应变协调方程。

三、应力和应变的关系，虎克定律：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2\mu(1+\nu')}(\sigma_x-\nu'\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\mu(1+\nu')}(\sigma_y-\nu'\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2\mu}\tau_{xy},\end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

式中

$$\nu' = \begin{cases}\nu & \text{平面应力}\\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & \text{平面应变}\end{cases} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ν是泊桑比，μ为剪切模量，E是弹性模量

四、用应力表示的协调方程和应力函数：

1、用应力表示的协调方程：

前面已有应变协调方程（2．8）式，为了下面运算方便，可用虎克定律（2．9）和静力平衡方程（2．5）式把（2．8）式化成用应力表示的形式，并且当体积力分量x、y在整个弹性体内是常量时，则在平面应力状态和应变状态下都有如下的协调方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (2.10)$$

上述方程在数学上称为拉普拉斯方程或调和方程，满足调和方程的函数称为调和函数。

如用算子$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$表示，则有：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (2.11)$$

如前所述，在平面问题中，三个应力分量，只有两个方程，需要寻求补充方程，（2．10）就是我们寻求的补充方程。有了平衡微分方程（2．5）、应力表示的协调方程（2．10）以及边界条件（2．6）对弹性力学的平面问题就可以求解了。

2、应力函数：

如在讨论的问题中，体积力相比可以略去不计时，平衡微分方程（2．5）将成为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

现在我们引进一个函数φ（x、y）使其具有下列关系：

$$\sigma_x=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad (a)$$

（a）式将能满足方程（2．12）的第一式；同时再引进另一函数X（x，y）使其具有下列关系：

$$\tau_{xy}=\frac{\partial X}{\partial y} \qquad \sigma_y=-\frac{\partial X}{\partial x} \qquad (b)$$

（b）式将满足方程（2．12）的第二式。显然，在（a）、（b）两式中的τ_{xy}应该相等，因此

φ和X便有下列关系：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \qquad (c)$$

方程（c）的解可以写成：

$$X = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \varphi = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (d)$$

其中 φ是（x、y）的函数，将（d）式代入（a）和（b）式，即得：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

可以看出，应力分量均可用函数 φ表示，此 φ函数称应力函数。将（2．13）式的应力分量代入应力表示的协调方程（2．10）则有：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \phi = 0$$

上述方程称为双调和方程，满足双调和方程的函数称为双调和函数。因此，应力函数 φ将是双调和函数。用算子∇^2表示上述方程则有：

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 \cdot \phi = 0 \qquad (2.14)$$

于是，弹性力学平面问题就归结为一个求解满足双调和（2．14）的应力函数 φ，并使其满足边界上全部边界条件。确定了应力函数 φ以后，就可利用上述关系求出各个应力、应变、和位移分量。

如对于体积力分量x、y为常量，在相比之下不能不计时，应力分量应具有下列表达式：即为：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - X_x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - Y_y \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

§2．4　复变函数的基础知识

从上面的讨论可知，在平面弹性力学问题中，基本方程是双调和方程。而在数学中，我们知道，复变解析函数的实部或虚部均为调和函数，因此，利用复变解析函数来讨论弹性力学问题将是很方便的。因此我们先简要地介绍一下复变函数的基本知识是必要的。

一、复数：

在解代数方程时，我们已接触到“i”它是方程$x^2+1=0$的一个根，$x=\sqrt{-1}$记作“i”。

我们称$z = x + iy$为复数，其中x、y是实数，分别称为z的实部与虚部，记作：

$x = R_e z \qquad y = I_m z$

1、复数的表示方法：

（1）直角坐标：$z = x + iy$

（2）三角形式：

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

（3）指数形式：

$z = re^{i\theta}$

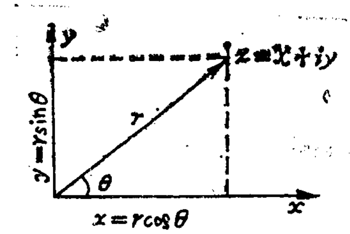


图2.5　复平面

2、复数的运算：设有两个复数。

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$

则：

相等：如$z_1 = z_2$则$x_1 = x_2 \qquad y_1 = y_2$

加减：$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

乘积：$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

乘方：$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n \cdot e^{in\theta}$

二、复变函数：

以复函数$Z = x + iy$为自变量的函数$Z = f(z)$叫做复变函数。复变函数$Z = f(z)$也有实部和虚部，$Z = ReZ + iI_m Z$　　如：

$Z = f(z) = z^2$

则：$Z = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$

$R_e Z = x^2 - y^2$；$I_m Z = 2xy$　　　他们都是x、y的实变函数。

由于$Z = f(z)$是以z为自变量的，所以$R_e Z$和$I_m Z$是互相联系的，而不是独立的。

三、解析函数：

如果复变函数$Z = f(z)$在某一域D内的每一点都有唯一的导数，则称这个复变函数是在此域D内的解析函数。如果在某一点，函数$Z = f(z)$没有导数，则此点称为解析函数的奇异点。

现假定$Z = f(z)$是解析函数，欲求它对x和y的偏导数。为此，首先注意到：

$z = x + iy$　　故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

于是：
$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{\partial Z}{\partial z}$$

由于解析函数的导数是唯一的，故由上式得：

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = i\frac{\partial Z}{\partial x} \qquad (2.16)$$

由于$Z = f(z) = R_e Z + iI_m Z$