Gailülun Yu Shulitongji Xuexizhidao

概率论与数理统计学习指导

施庆生　陈晓龙　邓晓卫　编著

知识产权出版社
www.cnipr.com
中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

概率论与数理统计学习指导

施庆生　陈晓龙　邓晓卫　编著

知识产权出版社
www.cnipr.com
中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是根据《高等院校工科本科概率论与数理统计课程教学基本要求》编写的教学辅导书，内容包括事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等九章。每章又包括基本要求、内容要点、典型例题分析及练习与测试等内容。全书选材针对性较强，能帮助读者理清《概率论与数理统计》课程的基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为工科、管理、财经及非数学类的理科的学生学习《概率论与数理统计》课程的辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

选题策划：南京城市节奏科技有限公司

责任编辑：张宝林　阳　淼　E-mail：z_baolin@263.net；yangsanshui@vip.sina.com

编辑加工：敖三妹　丁亚华

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/施庆生等编．—北京：知识产权出版社：中国水利水电出版社，2004

ISBN 7-80011-996-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．施…　Ⅲ．①概率论－高等学校－教学参考资料 ②数理统计－高等学校－教学参考资料

Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 113138 号

概率论与数理统计学习指导

施庆生　陈晓龙　邓晓卫　编著

知识产权出版社　中国水利水电出版社　出版　发行（北京市海淀区马甸南村 1 号；传真：010-82000893　北京市西城区三里河路 6 号；电话：010-68331835　68357319）

全国各地新华书店和相关出版物销售网点经销

北京市兴怀印刷厂印刷

787mm×1092mm　16 开　11.5 印张　273 千字

2004 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

印数：0001—5100

定价：**22.00** 元

ISBN 7-80011-996-3

TU·097

版权所有　侵权必究

如有印装质量问题，可寄知识产权出版社发行部调换

（邮政编码 100088，公司 E-mail：oj@cnipr.com，yangsanshui@vip.sina.com，z_baolin@263.net）

前　　言

概率论与数理统计是大部分理工科专业大学生的必修课，同时也已列入工学和经济学硕士研究生入学考试数学科目的考试内容。

概率论与数理统计是近代数学的分支，在科学研究、工程技术、国民经济等领域都有广泛的应用。由于概率论与数理统计的方法有其独到之处，初学者往往感到它的基本概念难懂，习题难做，因而便产生“难学”的想法。实际上，正确掌握解题的方法和技巧对学习该门课程是非常重要的。本书将就这些难点，由浅入深，有针对性地给予辅导。为便于读者学习，我们逐章按四个部分编写：基本要求和内容要点部分主要是帮助读者明确要求、理清概念，对一些重要概念、定理和公式，作了必要的解释。典型例题分析部分题型丰富，既有基本题，也有综合题。通过对典型例题的分析、说明解题技巧和解法评注，帮助读者正确理解基本概念，掌握解题的方法与技巧，达到举一反三的目的。练习测试部分则通过精选的练习题，供读者自我检查，以帮助读者复习巩固教学内容，培养分析问题和解决问题的能力。

本书在编写过程中，努力做到通俗易懂、简详得当、取材广泛。在选材和叙述上尽量做到突出基本内容的掌握和基本方法的训练。在例题和练习的选择上，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有一部分取材于历届硕士研究生入学考试统考试题，这样的例题和练习都加了星号“*”。因此本书可以作为工科、管理、财经及非数学类的理科的学生学习《概率论与数理统计》课程的辅导书，也可以作为考研的强化训练指导书，同时也适于自学者阅读。

参加本书编写的有施庆生（第一、二、三、五章）、陈晓龙（第四、八、九章）、邓晓卫（第六、七章），最后由施庆生负责全书的统稿和定稿。本书编写得到南京工业大学教务处教改基金的资助和理学院的大力支持，在此一并致谢。

限于编者的水平，书中肯定存在错误和缺点，敬请读者批评指正。

编　者

2003年于南京

目　录

前言

1　随机事件及其概率 …… 1

1.1　基本要求 …… 1

1.2　内容要点 …… 1

1.3　典型例题分析 …… 5

1.4　练习与测试 …… 14

1.5　练习与测试答案 …… 16

2　随机变量及其分布 …… 17

2.1　基本要求 …… 17

2.2　内容要点 …… 17

2.3　典型例题分析 …… 22

2.4　练习与测试 …… 35

2.5　练习与测试答案 …… 37

3　多维随机变量及其分布 …… 42

3.1　基本要求 …… 42

3.2　内容要点 …… 42

3.3　典型例题分析 …… 48

3.4　练习与测试 …… 63

3.5　练习与测试答案 …… 65

4　随机变量的数字特征 …… 68

4.1　基本要求 …… 68

4.2　内容要点 …… 68

4.3　典型例题分析 …… 72

4.4　练习与测试 …… 84

4.5　练习与测试答案 …… 86

5　大数定律与中心极限定理 …… 88

5.1　基本要求 …… 88

5.2　内容要点 …… 88

5.3　典型例题分析 …… 90

5.4　练习与测试 …… 96

5.5　练习与测试答案 …… 97

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

6 数理统计的基本概念 …… 98
6.1 基本要求 …… 98
6.2 内容要点 …… 98
6.3 典型例题分析 …… 102
6.4 练习与测试 …… 111
6.5 练习与测试答案 …… 113
7 参数估计 …… 115
7.1 基本要求 …… 115
7.2 内容要点 …… 115
7.3 典型例题分析 …… 118
7.4 练习与测试 …… 130
7.5 练习与测试答案 …… 132
8 假设检验 …… 135
8.1 基本要求 …… 135
8.2 内容要点 …… 135
8.3 典型例题分析 …… 138
8.4 练习与测试 …… 149
8.5 练习与测试答案 …… 152
9 方差分析与回归分析 …… 154
9.1 基本要求 …… 154
9.2 内容要点 …… 154
9.3 典型例题分析 …… 162
9.4 练习与测试 …… 172
9.5 练习与测试答案 …… 174
参考文献 …… 176

1 随机事件及其概率

1.1 基 本 要 求

(1) 理解随机试验的特征。对于一个具体的试验要弄清试验方式：什么是一次试验？一个试验结果指的是什么？

(2) 了解样本空间的概念，理解随机事件（简称事件）的概念。对此，要了解它的基本特征。对一个具体的事件要弄清它是由哪些试验结果构成？什么叫做它发生了？掌握事件之间的基本关系和运算法则。

(3) 理解概率和条件概率的概念，掌握概率的基本性质。古典概型下概率计算的若干常见类型，既是重点又是难点，务必掌握其要点，并能熟练完成计算。

(4) 掌握概率的运算法则。包括加法公式、乘法公式、全概率公式、逆概公式、二项公式以及与此有关的超几何公式、泊松公式等都是计算和运用的重点。对于这些公式不仅要知道各自的背景、条件、结论，而且要能熟练地应用它们计算事件的概率。

(5) 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法。

1.2 内 容 要 点

1.2.1 随机试验与随机事件

1. 随机试验

若试验满足以下条件，则该试验称为随机试验。

(1) 试验在相同的条件下可重复进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但每次试验的所有可能结果是已知的。

(3) 完成一次试验之前不能确知哪个结果会发生。

2. 基本事件

试验的直接结果（不可再分解的结果）称为试验的基本事件（样本点），用记号 ω 表示。

3. 样本空间

给定试验下所有基本事件（样本点）的集合称为样本空间，用记号 Ω 表示。

4. 随机事件

样本空间 Ω 的一个子集称为随机事件，用记号 A、B、C 等表示。在试验中一定发生的事件称为必然事件，仍用字母 Ω 表示。而把在试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用符号 Φ 表示。从集合论的观点看，必然事件相当于全集，不可能事件相当于空集，它们可视为随机事件的两种极端情形。在试验中，称一随机事件发生了，当且仅当它所包含的一个基本事件（样本点）出现了。

1.2.2　随机事件的概率

1. 概率

用以度量在试验中事件发生可能性大小的数，称为事件的概率。

2. 概率的统计定义

假设试验在相同条件下可以重复进行，当试验次数 n 充分大时，事件 A 发生的次数（频数）m 与 n 的比 m/n（频率），始终围绕某个常数 p 作稳定而微小的摆动（统计概型），则称事件 A 有概率。常数 p 就是它的概率，记为 $P(A)=p$。

3. 概率的古典定义与计算

假设随机试验 E 的样本空间 Ω 只有 n 个等可能的基本事件（古典概型），而事件 A 包括其中的 m 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A\text{ 包括的基本事件数})}{n(\text{样本空间所含基本事件总数})}$$

4. 概率的公理化定义

设样本空间 Ω 的某些子集组成的集合 F 为事件的全体，A 为属于 F 的任一事件，P 为定义在 F 上的一个集合函数，则称满足下述公理的实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率：

公理 1　对任意事件 $A\in F$，有 $P(A)\geqslant 0$（非负性）；

公理 2　对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$（规范性）；

公理 3　对任意的 $A_i\in F$（$i=1, 2, \cdots$），$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\Phi$（$i\neq j$），有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)\quad（可列可加性）$$

1.2.3　随机事件关系与相应的概率运算

为清楚起见，这里的讨论用列表方式进行（见表 1-1）。

表 1-1　　事件关系与相应的概率运算表

事件关系与运算		相应的概率运算
包　含	$B\supset A$：A 发生必将导致 B 发生（事件 B 包含事件 A）	$P(B)\geqslant P(A)$
	对任一事件 A：$\Phi\subset A\subset\Omega$	$0\leqslant P(A)\leqslant 1$
等　价	$B=A$：$B\supset A$ 同时 $A\supset B$（A、B 为等价事件）	$P(B)=P(A)$
互　斥（不相容）	$AB=\Phi$：A、B 不能同时发生（A、B 为互斥事件）	$P(AB)=0$
对　立（互逆）	$AB=\Phi$：A、B 不能同时发生，且 $A\cup B=\Omega$：A、B 恰有一个发生（A、B 互为对立事件）	$P(AB)=0$ $P(A)+P(B)=1$
	记 $B=\overline{A}$：B（即 $\overline{A}$）为 A 对立事件。$A\overline{A}=\Phi$，$A\cup\overline{A}=\Omega$	$P(A)=1-P(\overline{A})$
互斥完备事件组	n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足： (1) $A_iA_j=\Phi$，$i\neq j$，i、$j=1, \cdots, n$（$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥） (2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$（$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组）	$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$

续表

事件关系与运算		相应的概率运算
独立	A、B 的概率满足：$P(B\|A)=P(B)$ A 发生与否不影响 B 发生的概率或 A、B 的概率满足：$P(A\|B)=P(A)$ B 发生与否不影响 A 发生的概率（A、B 互为独立事件）	$P(AB)=P(A)P(B)$
和（并）	$A\cup B$： A、B 至少有一发生［A 与 B 的和（A 或 B）］	概率加法公式： $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 若 A、B 为互斥事件： $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
积（交）	AB（$A\cap B$）： A、B 同时发生［A 与 B 的积（A 且 B）］	概率乘法公式： $P(AB)=P(A)P(B\|A)$ $=P(B)P(A\|B)$ 若 A、B 为独立事件： $P(AB)=P(A)P(B)$
差	$A-B=A\overline{B}$： A 发生而 B 不发生 ［A 与 B 的差（A 且 $\overline{B}$）］	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$
和积差的特例	$AB\subset A\subset A\cup B$（$AB\subset B\subset A\cup B$）： 事件求交越求越“小” 事件求并越求越“大”	$P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)$ $P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A\cup B)$ （概率的单调性）
	在 $A\supset B$ 的约定下： $AB=B \quad A\cup B=A$ （求交取“小”的，求并取“大”的） 特殊情况下：$A\Omega=A \quad A\cup\Omega=\Omega$ $A\Phi=\Phi \quad A\cup\Phi=A$	$P(A-B)=P(A)-P(B)$ $P(AB)=P(B)$ $P(A\cup B)=P(A)$
对偶法则	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$	$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\,\overline{B})$ $P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$
互斥分解	$A=AB\cup A\overline{B}$ $A\cup B=A\cup\overline{A}B$	$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$ $P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)$

1.2.4 概率的运算法则

1. 概率的加法公式

$$P(A\cup B)=\begin{cases}P(A)+P(B) & A\text{、}B\text{ 为互斥事件}\\ P(A)+P(B)-P(AB) & A\text{、}B\text{ 为相容事件}\\ P(A)+P(B)-P(A)P(B) & A\text{、}B\text{ 为独立事件}\\ 1-[1-P(A)][1-P(B)] & A\text{、}B\text{ 为独立事件}\end{cases}$$

推广：设事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

一般地，对任意的 n 个事件，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

特别，当 A_1，A_2，…，A_n 为独立事件时，公式

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)]\cdots[1 - P(A_n)]$$

在解决某些实际问题时非常有用，应给予足够的重视。

2. 条件概率与乘法公式

条件概率　设 A、B 为同一试验的两个事件，且 $P(B) > 0$，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 已发生前提下事件 A 发生的条件概率。

乘法公式　　若 $P(A) > 0$，则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$

或　　若 $P(B) > 0$，则 $P(AB) = P(B)P(A|B)$

推广　　若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，那么

$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$ 特别当 A_1，A_2，…，A_n 为独立事件时，对任何正整数 k 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}) \quad (2 \leqslant k \leqslant n)$$

3. 全概率公式和贝叶斯公式（逆概率公式）

全概率公式

假设 A_1，A_2，…，A_n 为互斥完备事件组，$P(A_i) > 0$ (i=1，2，…，n)，B 为 Ω 中任一事件，则全概率公式为

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

保持全概率公式的题设，增设 $P(B) > 0$，则有

贝叶斯公式（逆概率公式）

$$P(A_j) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

4. 伯努利试验和二项公式

n 重独立试验　在相同条件下重复做一种试验 n 次，若每次试验的结果是有限的且不依赖于其他各次试验的结果，则称这 n 次试验是相互独立的，并称它们构成一个 n 重独立试验序列。

n 重伯努利试验　在 n 重独立试验序列中，每次试验的结果只有两个 A 和 $\overline{A}$。且其中的一个概率为 p，比如 $P(A) = p$ 另一个概率设为 $q=1-p$，即 $P(\overline{A}) = q$，这样的试验序列称为 n 重伯努利试验。

二项公式　假设事件 A 在每次试验中发生的概率为 p ($0<p<1$)，它在 n 重伯努利试验中恰好发生 m 次的概率为

$$B(m,n,p) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

其中 $m=0,1,2,\cdots,n;\ q=1-p$

上式称为二项公式，二项公式是解决放回抽样下概率计算的重要公式。

1.2.5 排列组合基本公式

1. 排列公式

全排列 将 N 个元素按一定顺序排列，共有 $N!$ 种不同的排法。

选排列 从 N 个元素中任选 n 个元素进行排列，共有

$$P_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$$

种不同的排法。

可重复排列 从 N 个元素中任选 n 个元素进行可重复（即 N 中的每一个元素允许重复选用）的排列，共有 N^n 种不同的排法。

2. 组合公式

从 N 个元素中任选 n 个元素构成一组（不计序），其所有不同组合的个数有

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}$$

排列组合是概率计算的重要工具，应熟练掌握。

1.3 典型例题分析

【例 1】 某工具箱存放有 3 个供备用的同类零件，其中 2 个是编号为 1、2 的一等品，另一个是编号为 3 的二等品。今从中任意抽取 2 个，用数对 (i,j) 表示随机抽取下的基本事件，其中 i 代表第一次抽得的零件编号，j 为第二次抽得的零件编号。试就抽取的放回与不放回两种方式，写出试验的样本空间 Ω 以及下列事件包括的基本事件：

$A=$“第一次抽得一等品”； $B=$“第二次抽得一等品”；

$C=$“第二次才抽得一等品”；$D=$“前后两次均抽得一等品”。

解：放回抽样

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

$$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$$

$$B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$$

$$C=\{(3,1),(3,2)\}$$

$$D=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

不放回抽样

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$

$$A=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}$$

$$B=\{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

$$C=\{(3,1),(3,2)\}$$

$$D=\{(1,2),(2,1)\}$$

注：列举样本空间首先要弄清试验的结果如何表达，而列举有关事件中包含的基本事件必须认真识别事件的构成。例如，事件 B 的本意是，第一次可以取一等品也可以取二等品，但第二次只能取一等品。而

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

事件 C 则不同，它指的是，第一次取二等品，同时第二次取一等品。类似于例 1 的问题可帮助弄清试验方式，这对于以后计算事件的概率是必要的。

【例 2】 设 A、B、C 为三事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列各事件。

（1）A 发生，B 与 C 不发生； （2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（3）A、B、C 中至少有一个发生； （4）A、B、C 都发生；

（5）A、B、C 都不发生； （6）A、B、C 中不多于一个发生；

（7）A、B、C 至少有一个不发生； （8）A、B、C 中至少有两个发生。

分析：简单的事件可以由事件运算的定义直接写出。而复杂的事件可借助：①利用维恩图进行分析；②对所述事件换个角度重新描述，比如用逆事件。如（7）可理解成“A、B、C 不可能同时发生”或“$\bar{A}$、$\bar{B}$、$\bar{C}$ 至少有一个发生”等。

解：（1）$A\bar{B}\bar{C}$，（2）$AB\bar{C}$，（3）$A\cup B\cup C$，

（4）ABC，（5）$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，

（6）$\bar{A}\bar{B}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{B}\bar{C}$ 或 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$，

（7）$\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$，

（8）$AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$。

【例 3】 化简下列各式：

（1）$(A\cup B)(B\cup C)$；（2）$(A\cup B)(A\cup\bar{B})$；（3）$(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$。

解：（1）$(A\cup B)(B\cup C)=AB\cup AC\cup B\cup BC$

∵ $AB\cup BC\subset B$

∴ $(A\cup B)(B\cup C)=B\cup AC$

（2）$(A\cup B)(A\cup\bar{B})=A\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}$

∵ $A\bar{B}\cup BA=A\Omega=A$，$B\bar{B}=\Phi$

∴ $(A\cup B)(A\cup\bar{B})=A$

（3）$(A\cup B)(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=A(\bar{A}\cup B)=\Phi\cup AB=AB$

【例 4】 从 1、2、3、4、5 这 5 个数中，任取其三，构成一个三位数。试求下列事件的概率：

（1）三位数是奇数； （2）三位数为 5 的倍数；

（3）三位数为 3 的倍数； （4）三位数小于 350。

分析：本题关心的是三位数的构成，由于是从 1、2、3、4、5 这 5 个数中，任取其三，构成一个三位数。显然取出的三个数是不同的，故基本事件是 3 个不同数的一个排列。

解：设 $A=$｛三位数是奇数｝， $B=$｛三位数为 5 的倍数｝

$C=$｛三位数为 3 的倍数｝， $D=$｛三位数小于 350｝

基本事件总数为 $P_5^3=60$

（1）有利于 A 的基本事件数为 $P_4^2\times 3$，$P(A)=\dfrac{P_4^2\times 3}{P_5^3}=\dfrac{36}{60}=0.6$；

（2）有利于 B 的基本事件数为 $P_4^2\times 1$，$P(B)=\dfrac{P_4^2\times 1}{P_5^3}=\dfrac{12}{60}=0.2$；

(3) 有利于 C 的基本事件数为 $4\times3!$，$P(C)=\frac{4\times3!}{P_5^3}=\frac{24}{60}=0.4$；

注：三位数为 3 的倍数事实上就是三位数的位数和是 3 的倍数。

(4) 有利于 D 的基本事件数为 $P_4^2\times2+P_3^1P_3^1$

$$P(D)=\frac{P_4^2\times2+P_3^1P_3^1}{P_5^3}=\frac{33}{60}=0.55$$

注：若将 1、2、3、4、5 这 5 个数改为 0、1、2、3、4、5 等 6 个数，又将如何求解？请读者思考。

【例 5】 某校毕业班同宿舍的 6 位同学，拟在离校前合影留念。事先商定照相时 6 人横排成一队。试求下列事件的概率：

(1) 其中指定的 3 位排在一起；

(2) 指定的 3 位及余下的 3 位分别排在一起。

分析：由于同室 6 位都参与照相，所以本题应按全排列处理。至于 (1) 有利于 A 的基本事件数的计算，首先让指定的 3 人不分开而作为一个人参与照相，这样就相当于 4 个人排列照相，其排列方法有 4! 种；然后考虑到指定的 3 人在一起本身也有全排列问题。为此，将事件 A 包含的基本事件数表示成 $(3+1)!\times3!$。类似地，可讨论 (2)。

解：设 A={指定的 3 位排在一起}，设 B={指定的 3 位及余下的 3 位分别排在一起}。

基本事件总数为 $6!=720$。于是

有利于 A 的基本事件数为 $(3+1)!\cdot3!=144$ $P(A)=4!\cdot3!/6!=0.2$

有利于 B 的基本事件数为 $(1+1)!\cdot3!\cdot3!=72$ $P(B)=2!\cdot3!\cdot3!/6!=0.1$

【例 6】 一口袋中盛有红球 7 个、白球 4 个、黄球 2 个，从中任取 3 个。试求下列事件的概率：

(1) 红、白、黄色球齐全；(2) 3 球同色；(3) 有且仅有 2 种颜色的球 。

解：设 A={红、白、黄色球齐全}，B={3 球同色}，C={有且仅有 2 种颜色的球}

由于抽球结果不讲究次序，故采用组合公式求解。因而基本事件总数为 $C_{13}^3=286$。于是

A 包含的基本事件数为 $C_7^1C_4^1C_2^1=56$，$P(A)=\frac{56}{286}=0.1958$

B 包含的基本事件数为 $C_7^3+C_4^3=39$，$P(B)=\frac{39}{286}=0.1364$

C 包含的基本事件数为

$$(C_7^2C_4^1+C_7^1C_4^2)+(C_7^2C_2^1+C_7^1C_2^2)+(C_4^2C_2^1+C_4^1C_2^2)=191$$

$$P(C)=\frac{191}{286}=0.6678$$

注：从概率计算的角度看，"从中一次任取 3 个球"等同于"不放回抽球 3 次，每次取出 1 球"。但若把"不放回抽取"更改为"放回抽取"，则求解方法和结果都不同。需用重复排列处理。

对于概率 $P(C)$，一个方便的方法是 $P(C)=1-P(A)-P(B)=0.6678$。

【例 7】 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

解法一：设 $A=$ {4 只鞋中至少有 2 只配成一双}，则

$\bar{A}=$ {4 只鞋中没有 2 只能配成一双}。先求出 $P(\bar{A})$，再求 $P(A)$。

5 双不同的鞋子共有 10 只，任取 4 只，则基本事件总数为 $C_{10}^{4}=210$。

有利于 $\bar{A}$ 的情形共有$\dfrac{10\times8\times6\times4}{4!}$种（先在 10 只中取 1 只，去掉能与其配对的 1 只，再在剩下的 8 只中取 1 只，如此等等。因为不考虑取 4 只鞋的次序，所以被 4！除）。

∴ $$P(\bar{A})\ \frac{\dfrac{10\times8\times6\times4}{4!}}{C_{10}^{4}}=\frac{8}{21}\approx0.381$$

故 $P(A)=1-P(A)=1-\dfrac{8}{21}=\dfrac{13}{21}\approx0.619$

解法二：有利于事件 A 的总数为 $C_5^1C_8^2-C_5^2$（C_5^2 是重复的数目，因为 4 只恰能配成两双被重复计数）

∴ $$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}\approx0.619$$

解法三："恰有 2 只配成一双"，共有 $C_5^1C_4^2\times2^2$（由于配成对的一双有 C_5^1 种取法，剩下的两只可在其余四双中任取两双各取一只有 $C_4^2\times2^2$ 种取法，以上搭配共有 $C_5^1C_4^2\times2^2$ 种取法）。四只配成两双共有 C_5^2 种取法。于是

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2\times2^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}\approx0.619$$

【例 8】 将 3 个鸡蛋随机地打入 5 个杯子中去，求杯子中鸡蛋的最大个数分别为 1、2、3 的概率。

分析：3 个鸡蛋可打入 5 个杯子中的任一个，故要用重复排列的方法计算。

解：依题意知基本事件总数为 5^3 个。

以 A_i（$i=1, 2, 3$）表示事件"杯子中鸡蛋的最大个数为 i"，则 A_1 表示每杯最多放一只鸡蛋，共有 A_5^3 种放法，故

$$P(A_1)=\frac{A_5^3}{5^3}=\frac{12}{25}$$

A_2 表示由 3 个鸡蛋中任取 2 个放入 5 个杯中的任一个中，其余一个鸡蛋放入其余 4 个杯子中，放法总数为 $C_3^2C_5^1C_4^1$ 种

$$P(A_2)=\frac{C_3^2C_5^1C_4^1}{5^3}=\frac{12}{25}$$

A_3 表示 3 个鸡蛋放入同一个杯中，共有 C_5^1 种放法，故

$$P(A_3)=\frac{C_5^1}{5^3}=\frac{1}{25}$$

注：例 4～例 8 均属于古典概型的概率计算，其基本方法是，利用排列组合方法来计算基本事件总数和有利基本事件数。具体计算时要注意区分事件的构成，以便考虑使用排列（与次序有关）或组合（与次序无关）来计算，若在排列中元素可重复，则要用可重复排列进行计算。此外，用排列组合方法在考虑一切可能出现的结果时，既不要遗漏，也不要重复。对有附加条件的排列组合问题（如例 7），通常有两种方法，一条是直接法、即对有附加条件的特殊元素或排列中特殊位置先处理，直接求出满足条件的种数。另一条是间接法（求差），先撇开附加条件求出一个总数，再扣除不合要求的种数。

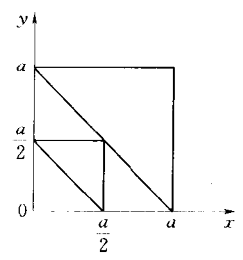
【例 9】 把长度为 a 的线段在任意二点折断成为三线段，求它们可以构成一个三角形的概率。

分析：设线段 a 被分成的三段长度分别用 x、y 和 $a-x-y$ 表示，这是涉及两个连续量 x，y 的概率问题，所以该问题为平面几何概率问题。

解：设 $A=$｛所折成的三线段可以构成一个三角形｝，线段 a 被分成的三段长度分别用 x、y 和 $a-x-y$ 表示，则样本空间 Ω 为：$0<x<a$，$0<y<a$，$0<x+y<a$，其面积为 $L(\Omega)=\frac{a^2}{2}$，而有利于 A 的情形必须满足构成三角形的条件，即

$$0<x<\frac{a}{2},\ 0<y<\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}<x+y<a$$

其面积为
$$L(A)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$



∴
$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}=0.25$$

【例 10】 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(B)$、$P(A\cup B)$。

分析：要求 $P(A\cup B)$ 首先要知道 $P(B)$ 及 $P(AB)$，利用已知条件及概率的乘法公式可求得 $P(B)$ 及 $P(AB)$。

解：由乘法公式知

$$P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B)$$

∴
$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}$$

∴
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

【例 11】 已知在 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样。求下列事件的概率。

(1) 两只都是正品；(2) 两只都是次品；(3) 一只是正品，一只是次品；(4) 第二次取出的是次品。

解：设 $A=$｛两只都是正品｝，$B=$｛两只都是次品｝，$C=$｛一只是正品，一只是次

品}。以 A_i（$i=1$，2）表示事件"第 i 次取出的是正品"

则有 $$A = A_1A_2, B = \bar{A}_1\bar{A}_2, C = A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2$$

因为不放回抽样，故

$$(1)\ P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

$$(2)\ P(B) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

$$\begin{aligned}(3)\ P(C) &= P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) \\ &= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45}\end{aligned}$$

$$(4)\ P(\bar{A}_2) = P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2) = P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{9}{45}$$

*【例 12】　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是不合格品，问另一件也是不合格品的概率是多少？

解：设 A，B 分别表示取出的第一件和第二件为正品，则所求概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}|\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{1 - P(AB)}$$

∵ $$P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{P_4^2}{P_{10}^2} = \frac{2}{15} \quad 及\ 1 - P(AB) = 1 - \frac{P_6^2}{P_{10}^2} = \frac{2}{3}$$

∴ $$P(\bar{A}\bar{B}|\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{1}{5}$$

【例 13】　某人提出一个问题，甲先答，答对的概率为 0.4；如甲答错，由乙答，答对的概率为 0.5，求问题由乙答出的概率。

解：设 $A=$ {甲答对}，$B=$ {乙答对}，则要求的概率为 $P(B)$。

因为甲答对了则乙就不用答，故 $AB=\Phi$，$P(AB)=0$，但

$$P(B) = P(AB \cup \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = P(\bar{A}B)$$

故只需求出 $P(\bar{A}B)$ 即可。又

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6, P(B|\bar{A}) = 0.5$$

∴ $$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

即 $$P(B) = 0.3$$

注：例 10～例 13 都是应用概率运算法则计算概率的类型，在计算中应注意用简单事件表示复杂事件，若能巧妙地运用对立事件的概率和为 1 这一性质，常可使计算量大为减少。对于条件概率计算有两种方法，一种是应用条件概率计算公式，另一种是根据实际问题由试验方式直接计算。

*【例 14】　有两箱同种类的零件。第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品。今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，作不放回抽样。试求（1）第一次取到的零件是一等品的概率；（2）第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率。

解：设事件 A 表示"取到第一箱"，则 $\bar{A}$ 表示"取到第二箱"，B_1、B_2 分别表示第一、第二次取到一等品。

（1）依题意有

$$P(A)=P(\bar{A})=\frac{1}{2},P(B_1|A)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5},P(B_1|\bar{A})=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$$

由全概率公式有

$$P(B_1)=P(B_1|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

(2)
$$P(B_1B_2|A)=\frac{10\times 9}{50\times 49}$$
$$P(B_1B_2|\bar{A})=\frac{18\times 17}{30\times 29}$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B_1B_2)&=P(B_1B_2|A)P(A)+P(B_1B_2|\bar{A})P(\bar{A})\\&=\frac{9}{5\times 49}\times\frac{1}{2}+\frac{3\times 17}{5\times 29}\times\frac{1}{2}\end{aligned}$$

∴
$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\left(\frac{9}{5\times 49}+\frac{3\times 17}{5\times 29}\right)\times\frac{1}{2}/\frac{2}{5}=0.4856$$

*【例 15】 甲、乙、丙三组工人加工同样的零件，它们出现废品的概率：甲组是 0.01，乙组是 0.02，丙组是 0.03，它们加工完的零件放在同一个盒子里，其中甲组加工的零件是乙组加工的 2 倍，丙组加工的是乙组加工的一半，从盒中任取一个零件是废品，求它不是乙组加工的概率。

解：设 A_1、A_2、A_3 分别表示事件“零件是甲、乙、丙加工的”，B 表示事件“加工的零件是废品”。

则 $P(B|A_1)=0.01$， $P(B|A_2)=0.02$， $P(B|A_3)=0.03$

$$P(A_1)=\frac{4}{7},\quad P(A_2)=\frac{2}{7},\quad P(A_3)=\frac{1}{7}$$

由贝叶斯公式，有

$$\begin{aligned}P(A_2|B)&=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{2\times 0.02/7}{(4\times 0.01+2\times 0.02+1\times 0.03)/7}\\&=\frac{0.04}{0.04+0.04+0.03}=\frac{4}{11}\end{aligned}$$

∴
$$P(\bar{A}_2|B)=1-P(A_2|B)=1-\frac{4}{11}=\frac{7}{11}$$

【例 16】 同时掷两个均匀的骰子。(1) 若已知没有两个相同的点数，试求至少有一个 3 点的概率；(2) 试求两个骰子点数之和为 5 的结果出现在点数之和为 7 的结果之前的概率。

解：(1) 设 $A=$｛掷两个均匀的骰子没有两个相同的点数｝，$B=$｛掷两个均匀的骰子至少有一个 3 点｝，则要求的概率为 $P(B|A)$。

设想两个骰子是可以区别为第一和第二颗的，那么其基本事件就可表示为两个数字的可重复排列，故样本空间基本事件数为 $6^2=36$。

为求 $P(B/A)$，我们通过求其对立事件的概率 $P(\bar{B}|A)$ 来求比直接求要简便。

∵
$$P(A)=\frac{P_6^2}{6^2}=\frac{6\times 5}{36}=\frac{30}{36},P(A\bar{B})=\frac{P_5^2}{6^2}=\frac{20}{36}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com