黄　琳／编著

稳定性与鲁棒性的理论基础

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

稳定性与鲁棒性的理论基础

黄　琳　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书阐述了稳定性与鲁棒性这一系统与控制理论基本属性的系统的和必要的理论基础. 包括时不变与时变线性系统、非线性系统的 Lyapunov 稳定性理论和方法；控制系统的结构性质与系统镇定；非线性控制系统的频域方法；参数不确定系统及 $\mathbf{H}_\infty$ 控制等鲁棒性分析与综合的理论与方法等. 本书内容系统、严谨，可为从事系统与控制科学特别是有关稳定性与鲁棒性方面教学与科研的人员提供一个坚实的理论基础.

本书可供系统与控制科学、力学、应用数学、工程科学及与之相关的工程应用领域的教学与科研人员阅读，亦可作为相关专业研究生的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

稳定性与鲁棒性的理论基础/黄琳编著. —北京：科学出版社，2003

ISBN 7-03-010695-4

Ⅰ.稳…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.①稳定控制 ②鲁棒控制　Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 060088 号

责任编辑：李淑兰 / 责任校对：钟　洋

责任印制：刘秀平 / 封面设计：黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2003 年 2 月第　一　版　　开本:787×1092　1/16

2003 年 2 月第一次印刷　　印张:37 1/4

印数:1—2 000　　字数:861 000

定价: 75.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

稳定性与鲁棒性是现代系统与控制科学的两个重要基本概念. 大体上说前者是刻画系统中过程相对初始条件变化的保持能力, 而后者是过程相对环境或系统本身变化的保持能力. 随着科学技术的发展, 在系统和控制的研究中, 这两个概念实际上已经紧密相连. 当今在系统和控制领域关于鲁棒稳定性或稳定鲁棒性的讨论比比皆是就说明这两个概念的研究是应该也有条件放在一起进行的. 从 19 世纪经典稳定性的产生到 20 世纪末鲁棒稳定性的形成, 其间大约经历了 100 年的时间. 回顾这一历史进程, 对于理解今天发展的状况和预测未来的可能发展是很有意义的.

1. 稳定观念的萌芽到经典稳定性理论

早在 2000 年前古代中国的汉朝, 淮南王刘安所著的《淮南子 · 说山训》中就曾指出“下轻上重, 则覆必易”. 到了宋朝, 《梦溪笔谈》的作者, 科学家沈括把这种观察到的事实已付诸于应用, 他在《忘怀录》中指出“安车车轮不欲高, 高则摇”. 这是古代中国对稳定与不稳定现象观察得到的结论, 它已经隐含了后来的 J. L. Lagrange 关于不稳定平衡的一些思想. 至于类似稳定这个词的出现, 至少可以追溯到晋书上所述“行人安稳, 布帆无恙”. 这大概在 1500 年前了. 在西方“ stable ”一词源出于拉丁文“ stabilis ”, 是表示坚持或保持的意思. 这些千年以前的说法与观念表现了当时人们对稳定这一概念的最初理解.

稳定性由具有这种最初的理解到形成一门科学理论, 其间经历了 1000 多年, 促成稳定性理论产生的决定性因素来自两个方面, 即工业革命及随后科学技术发展的推动和人类在 19 世纪对自然科学首先是数学和力学的贡献.

从 18 世纪下半叶到 19 世纪末的这 100 多年的时间里, 发生了一些具有深远影响的事件, 从中人们可以看到稳定性理论产生的必然性.

- J. Watt 1765 年创造性地改进了 T. Newcomen 发明的蒸汽机, 由此引发了随后蓬勃发展的工业革命.
- J. L. Lagrange 1780 年出版的《分析力学》, 科学地讨论了平衡位置的稳定性.
- C. Hermite 1856 年建立了关于多项式对根交错的理论.
- J. C. Maxwell 1868 年发表的“论调节器”一文, 讨论了蒸汽机自动调速器与钟表擒纵机构的运动稳定性.
- A. L. Cauchy 在 19 世纪给出了关于极限描述的 ε-δ, ε-N 语言.
- H. Poincare 在微分方程定义的积分曲线和天体力学方面作出的贡献.
- G. Peano, I. Bendixson 和 G. Darboux 关于微分方程解对初值及参数连续依赖性的研究.

上述这些重要事件及相关科学的进展促成了 19 世纪末稳定性理论的两个主要学派的形成.

基于线性时不变微分方程解的收敛性与对应的实系数多项式根是否具有负实部的关

系， E. J. Routh 在 1875 年利用多项式根的 Sturn 组方法与有理函数的 Cauchy 指数之间的联系，建立了判断实多项式右半平面根个数的算表，从而给出了判断稳定性的 Routh 判据. 随后 A. Hurwitz 在 1895 年又独立地采用多项式系数排成的矩阵的主子式的符号来判断右半平面根的个数和稳定性. 他们的工作为稳定性理论研究的代数方法奠定了基础. 这种代数方法与复变函数论中关于有理函数在特定区域内零极点数估计的理论结合为近代稳定性判定的频域方法提供了基础. 无论是频域方法中的 Nyquist 判据还是受 C. Hermite 早期工作的启发而由 F. R. Gantmacher 等人建立的正多项式对方法，从理论上都是与代数方法一脉相承的. 为纪念 Routh 的工作， *Inter.J.of Control* 在 1975 年专门出版了纪念专辑.

大致与代数方法产生的同时， A. M. Lyapunov 在 1892 年发表了著名的博士论文《运动稳定性一般问题》. 他按照 Cauchy 关于极限描述的 ε-δ 语言，将常微分方程解对初值的连续依赖性由有限时间区间拓宽到无穷时间区间，给出了有关稳定、渐近稳定的科学概念；进而又参照力学系统中总能量及其随时间变化的特性在决定平衡位置稳定与否上的作用，引入了后来称为 Lyapunov 函数的判定函数，利用该函数及其时间导数的性质，建立了判断一般系统稳定性的一系列定理，从而避开了求解一般微分方程组解的困难. Lyapunov 讨论的系统是一般非线性时变系统，其结论具有一般性，可以运用于各种类型的系统，因而意义深远. 为纪念这一划时代工作发表一百周年， *Inter.J.of Control* 同样专门出版了纪念专辑. 在这一工作发表的最初 50 年，其主要工作集中在理论方面.

当时理论上的拓展首先表现在对时变系统稳定性的认识上. 1933 年 K. P. Persidski 首先指出稳定性与初始时刻的关系并提出了一致稳定的概念. 进而 E. A. Barbasin 与 N. N. Krasovski 提出了一致渐近稳定的概念并给出了判据. 此时人们才认识到 Lyapunov 关于时变渐近稳定的定理实际上已经判定了一致渐近稳定. 于是一些人饶有兴趣地企图在 Lyapunov 关于渐近稳定的定理中除去无穷小上界的条件，以期达到判别渐近稳定而不要求一致渐近稳定的结论. 直到 J.Massera 在 1949 年给出了一个反例，表明在对时变系统不做附加限制时即使要证明系统渐近稳定， Lyapunov 原来的条件也未必可以减弱，这些结果使人们对时变系统稳定性有了更深刻的认识.

同用多项式根判定线性时不变系统零解渐近稳定不同，用 Lyapunov 方法判断系统零解的渐近稳定性实际上只提供了一种充分条件. 但对于系数有界的线性时变系统说来，一致渐近稳定、指数渐近稳定和存在满足相关稳定性判定要求的时变二次型 Lyapunov 函数，竟是等价的. 而对于非线性系统零解的一致渐近稳定， Massera 同样也证明了用来判定的 Lyapunov 函数的存在性. 这样便对用 Lyapunov 方法判断稳定性在一定意义下给出了必要性的结论，使人们对这一方法进一步提高了认识.

理论上的另一种发展更具方法论性质，即针对一类问题，将 Lyapunov 函数由一个扩展为几个，在研究问题时互相搭配来判断零解的稳定性. 由于系统阶次的增高，针对系统结构上的特征将 Lyapunov 函数由标量函数扩展为向量函数，然后用来判断大系统的稳定性则是在 20 世纪 50 年代后才发展起来的. 这种将一个大系统分解成一些子系统再根据子系统构造合适的 Lyapunov 函数，然后集成起来形成向量 Lyapunov 函数研究整个大系统的稳定性以及关联稳定性的方法，已在包括电力系统、经济系统中得到了应

用.

虽然代数方法与 Lyapunov 方法从理论方法上有明显的区别，但它们讨论的系统及理论研究的客观背景则是在同一的前提下进行的：

(1) 描述系统的模式是确定的，不考虑人为改变的因素，例如控制.

(2) 系统中不确定性表现在系统运动的初始条件摄动上.

(3) 系统是单一给定的，不考虑由于不确定性存在而导致的系统族.

上述三点刻画了经典稳定性理论的主要特征. 这样的特征反映了 19 世纪物理学研究特点的影响. 正如马克思在《资本论》第一卷第一版序言中指出的"物理学家是在自然过程表现得最确实最少受干扰的地方考察自然过程的或者如有可能是在保证过程以其纯粹形态进行的条件下从事实验的". 在这种纯粹化与确定论思潮影响下的经典稳定性理论，在 20 世纪后半叶由于大量工程应用的需求而遇到了挑战. 这一挑战的推动，使稳定性理论的研究获得了从未有过的发展动力，得到了巨大的发展，研究队伍也一下子由基本上是少数数学家与力学家的圈子扩大到了包括工程科学家在内的众多领域.

2. 控制对稳定性理论发展的影响

20 世纪 30 年代兴起的自动控制技术与理论，深刻地改变了稳定性理论研究的面貌，无论从研究队伍的扩展还是控制系统的出现，从研究问题的提法与解决问题的办法两方面都对原稳定性理论是一种突破. 这种变化使稳定性理论的研究与发展都远非稳定性理论形成后的前 50 年所可比拟.

我们考虑一个简单的控制系统模式

$$\dot{x} = f(x, u, t), \qquad y = g(x, u) \tag{1}$$

其中，x 是系统的状态；u 与 y 分别是系统的输入与输出. 控制系统中由于 u 不是给定的，因而其稳定具有新的特色.

控制系统研究的第一个特点在于人们对它建模时，一般认为输入与输出的信息是最能反映系统动态特性的，至于系统的具体方程式并不一定非弄清楚. 适应这种特点，控制系统的稳定性常常用有界输入下是否只对应有界输出来刻画. 建立在这种刻画之下的系统常被看成是一些信号空间之间的算子. 在线性系统的情况下，若信号理解为时域的，则该算子用具有一定 Green 函数的积分算子来表征；当信号看为是频域的，则算子常用传递函数方式给出，而在信号空间中常常定义一些范数来进行讨论. 这种输入输出稳定性与系统无控制时的零解稳定性的关系，在系统可控又可观测下，对于线性系统来说，结论是清楚的，但对于非线性系统，其研究还是近 20 年的事.

控制系统研究的第二个特点在于存在控制. 当控制是由系统的状态 (或输出) 决定时，则称为状态反馈 (或输出反馈)，系统的反馈一经确定，例如 $u = K(x, y)$，对应系统 (1) 就成为

$$\dot{x} = f(x, K(x, y), t), \qquad y = g(x, K(x, y)) \tag{2}$$

此时已成为无外力控制的系统. 因此对于控制系统来说，稳定性的基本提法就成为：①系统在何种条件下可以通过反馈的选取使对应系统的零解渐近稳定；②系统中反馈部分如何具体求得. 上述寻求反馈使系统稳定常称为镇定，因而上述两提法就变为①何种条件表明系统是可镇定的；②具体如何镇定.

将镇定思想与输入输出稳定的观念相结合，就发展为现今 $\mathbf{H}_\infty$ 鲁棒控制的思想. 考虑如图 1 所示的系统，装置 G 的输入区分为扰动 w 和控制 u ，其输出亦区分为输出 z 与测量 y ，此时镇定要求转化为设计 K 使图示系统的每一通道均稳定 (即内稳定)，同时要求 w 对系统输出 z 的影响能低于一事先给定的界，这就是现今 $\mathbf{H}_\infty$ 控制研究的出发点. 研究控制系统稳定性，其模式常常以回路形式表达. 最早的回路稳定的思想是由 H. Nyquist 在 1928 年提出的. 他用装置 G 的频率特性曲线即可断定使闭路稳定的增益应如何选取. 这种回路当 K 是一个由输入输出的增益界刻画的非线性函数族 $\phi(t,\sigma)$ 时，则导致了从 40 年代起由 A. I. Lur'e 与 V. N. Postnikov 开创的绝对稳定性的研究. 意味深长的是研究绝对稳定性的方法首先不是回路分析的方法，而是将回路系统用状态空间形式表达并用 Lyapunov 方法加以解决的方法. 这种现象和方法几乎延续了整整 20 年，直至 V. M. Popov 提出用频率法同样可以解决绝对稳定性问题，人们才深刻地意识到绝对稳定性问题本质上应归于回路稳定性问题. 随后， V. A. Yakubovich 给出了著名的 Kalman-Yakubovich-Popov 引理，在证明 Lur'e 解与 Popov 解关于绝对稳定性等价的同时，也深刻地揭示了绝对稳定性研究中时域方法和频域方法的本质联系. 这种研究过程迂回的一个直接效果是人们认识到 Lyapunov 方法与回路分析方法之间并不存在天堑，而是有着一种本质的联系，这种本质联系在随后关于严格正实与对应的矩阵方程组求解、 $\mathbf{H}_\infty$ 控制与对应的 Riccati 方程求解上均有明显的表现. 这种频域方法与时域方法的沟通也促进了控制系统稳定性研究的发展. 人们对回路稳定性的研究，在 G 只是一个传递函数时，其结果十分充分. 而当 G 是一个传递函数矩阵时，无论是镇定问题还是绝对稳定性问题，其结果均不够理想. A. Megretski 和 A. Rantzer 发展了绝对稳定性研究中利用输入输出信号的积分二次约束 (IQC)，它将目前已知的许多关于系统动态不确定性的描述纳入统一的框架之下. 而在此基础上发展起来的稳定性分析的频域方法在继承了绝对稳定性和回路变换频域方法优点的同时，还可以处理多输入多输出系统的稳定性分析，并可以转化为线性矩阵不等式 (LMI) 求解. 目前 IQC 方法虽然在稳定分析上获得成功，但如何利用该方法解决系统镇定问题，还远没有解决.

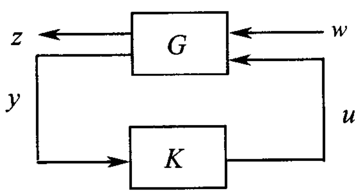

图 1 反馈控制系统方框图

3. 研究鲁棒性的必然与发展

在控制科学研究的对象 —— 控制系统中，由于种种原因而存在不确定性或摄动，用一个数学模式，例如用一个微分方程组来描述它，总与实际运转的系统存在差别，这种差别表明用单一的数学模型来刻画系统是不完善的. 由于处理问题的能力有限，人们一开始总假设这种不确定性是很微小的. 无论是代数方法还是 Lyapunov 方法，所判断的渐近稳定性通常具有“开集”性质，即当无摄动系统是渐近稳定时总能保证存在一个邻域，当不确定性发生在该邻域内时对应的渐近稳定将得到保持. 这样只在微摄动假设

下的渐近稳定鲁棒性 (相对摄动的不变性) 的研究不仅可能与实际需求差之甚远，而且其本身也变得意义不大.

控制系统的不确定性，其产生的原因是多种多样的，如何描述这种不确定性如同在控制系统中选取品质指标一样，也应遵循两个基本原则，即它应能反映实际问题的特征同时又能便于在研究过程中进行处理. 以线性系统为例，摄动可采用下述模式：

(1) 参数不确定性. 系统中某些参数是不确定的并可在一给定的集合中取值，例如在矩形体、球形体、多面体内取值等. 参数不确定性常称为结构性摄动，这是由于这种摄动仅影响参数而不影响系统的结构，即在一定的结构性质下的摄动.

(2) 非结构性摄动. 这种摄动不仅以参数变化形式出现而且系统结构也发生变化. 例如用 $\mathbf{H}_\infty$ 范数、 Gap 度量的摄动.

(3) 混合摄动. 同时具有结构性和非结构性摄动.

由于系统中存在的摄动并不清楚，从研究的角度，我们面对的对象不是一个单一的对象而是面对一族对象. 这表明一个实际的系统其描述模式可以有多个甚至无穷个，即必须用一个系统族来描述同一个实际系统. 这种描述可以由一个名义系统 (即摄动为零) 和一个摄动模式所组成，也可以用一个基于集合包含关系的方程来刻画，例如，微分包含. 鲁棒稳定性就是一个系统族的稳定性. 随着控制系统面临任务的复杂、环境的多变、大量不确定因素的存在，研究系统的鲁棒稳定性就日益成为必需. 最初当 E. J. Davison 引入 “Robust” 这个词时，还是针对微小摄动而言的，而今 Robust 这个概念已经变为针对那些非微小的有界摄动.

微积分的产生已经经历了 300 年，人们习惯于用无穷小分析来处理问题. 对于大范围变化下鲁棒稳定性的研究，也只有在出现了新的契机以后才蓬勃发展起来.

鲁棒稳定性分析一开始采用了 Lyapunov 函数方法，利用二次 Lyapunov 函数建立了关于系统族二次稳定的概念并得到了一批结果. 特别是当系统满足匹配条件时结果相当丰富. 这种方法原则上可以应用于非线性时变系统，但由于其本质上是一种充分性方法而且对系统族要求具有公共的 Lyapunov 函数，难于满足，结果也就偏于保守. 在相对热了不足 10 年便进入停滞不前的状态. 尽管仍然有与之相近的各种提法的大量论文出现，但由于 Lyapunov 方法本身还有些关键问题，例如针对系统或系统族什么是最适合的 Lyapunov 函数，和针对系统族是否可同时利用不同的 Lyapunov 函数等一系列问题未有圆满答案，实际上只停留在呼唤突破之中.

激励鲁棒性研究的另一个方面是 $\mathbf{H}_\infty$ 控制讨论的深入. $\mathbf{H}_\infty$ 控制的原始提法是设计控制器以使系统内稳定且由干扰到输出的传递函数对应的 $\mathbf{H}_\infty$ 范数为最小，这是一个典型的受约束最优控制问题. 正如 “人无完人，金无足赤” 一样，按照最优要求设计的控制器常难免脆弱并且代价太大. 工程实际常常要求人们以一种次优控制来实现控制器，当 $\mathbf{H}_\infty$ 范数以最大奇异值的方式表现后， $\mathbf{H}_\infty$ 次优化问题就同加性、乘性两种非结构性摄动模式的系统鲁棒镇定联系在一起，这种联系赋予了 $\mathbf{H}_\infty$ 控制新的含义，即它也是一种鲁棒控制问题. 在 $\mathbf{H}_\infty$ 控制理论的发展过程中，一开始它以算子空间中逼近的方式解决问题，这在计算上比较困难. 后来发现 $\mathbf{H}_\infty$ 控制求解依赖于两个 Riccati 方程的求解而使其增添了新的活力，加之 $\mathbf{H}_\infty$ 控制本身的提法非常适合控制回路这种结构特征，方法的可行与工程上的合理就使 $\mathbf{H}_\infty$ 控制成为现代鲁棒控制的核心问题之一.

作为鲁棒稳定或鲁棒控制的另一个主要领域——参数不确定方法，当归功于俄国人 V. L. Kharitonov 的贡献．他关于一个区间多项式族是 Hurwitz 稳定的充分必要条件是该族四个端点多项式为 Hurwitz 稳定的结论，先是给人们带来了诧异，随后则启示人们寻求类似的结果并将其用于控制．以后出现的棱边定理、菱形族定理、边界定理、值集或值映射方法等为鲁棒稳定性的分析提供了有效的工具．但这些还基本上限于当系统多项式系数只是不确定参数的仿射函数的情况，对于多仿射与非线性情形，问题则困难得多，完美的便于应用的结果依然吸引着研究者的巨大兴趣．

控制系统的复杂性与不确定性常要求讨论同时具有上述两种不确定性的问题．与此同时人们也乐于把 $\mathbf{H}_\infty$ 控制方法与参数不确定方法结合起来处理系统的鲁棒镇定和带品质要求的鲁棒镇定．

运筹学是控制理论的近亲，其方法常常在控制理论研究中起到别开生面的作用．当今大量的鲁棒控制问题已经借助于线性、凸与非线性规划方法求解． Karmarkar 方法在运筹学中大获成功的事例，促使人们把这一方法用于控制特别是鲁棒控制，这样控制中的问题转化为线性矩阵不等式 (LMI) 求解，使 LMI 的作用更加明显．而鲁棒控制的一些新分支，例如积分二次约束 (IQC) 与鲁棒增益规划 (RGP) 也都可借助 LMI 来进行研究．关于 LMI 的求解已有现成的算法和软件，但是在理论上 LMI 的可解性问题还远没有解决，特别是控制系统中的许多分析与综合问题经常可转化为若干个 LMI 与一个非凸的矩阵秩约束条件下的可行性问题，该问题的可解性研究是一个具有挑战性的研究课题．从鲁棒性的观念出发，建立在各种不等式基础上的分析与设计不仅具有意义，而且是一个新的研究方向．

在对系统鲁棒性的研究中最具核心地位的乃是鲁棒稳定性问题，所幸的是在稳定性的经典研究和鲁棒性的近期研究中，人们清楚地发现了这两者在理论、概念、方法上近于一致的现象．由于稳定性与鲁棒性都处理系统摄动的影响，因而在控制理论的架构中两者是最能亲和而成为一体的．从前 100 年发展的历史可以清楚地看到其中的天然联系．

4. 本书内容的考虑与安排

近 100 年稳定性的研究和近 20 年鲁棒性的研究，为我们提供了成千上万的文献．文献量大，增加了选材的困难，但同时也迫使我们从这众多的文献中寻找出基本的主干型成果，为读者创造一个基础．当然也希望在掌握了这种主干材料之后，有可能长出新芽和出现新的生长点，或长成新的枝叶，为发展该理论提供方便．

由于系统的稳定性与鲁棒性所讨论的问题有明确的物理或工程背景，而其理论结论又常以严谨的数学方式表达，工程或物理的直观往往是人们解决问题中的思想雏形，虽富于启迪，但常不完善，这种粗线条的想法同严密的数学论证并不经常是吻合的，为了避免误解，我们在对结论给出严格的数学阐述的同时将给出一些例子以消除由于直觉不完善所可能引发的误解，以便对数学命题成立的条件能有更深的认识．由于本书取材力求是主干型的内容，因而对主要结论将给出严格的证明，这无非是希望造成一个条件以使读者不必再查阅其它文献就可有一个较坚实的基础，这对于年轻读者可能会更方便些．

基于这个想法，本书的内容安排如下：

第一章是 Lyapunov 稳定性理论的基础．主要阐述理论的基本内容及其最重要的发展，包括时变、周期系统渐近稳定，渐近稳定反问题以及力学系统稳定性等著名结果．

线性时不变系统的研究是最基础也是最广为应用的成果. 本书将用两章篇幅来阐述. 第二章除一开始讨论系统结构性质外其余部分着重讨论多项式理论, 即针对实复系数多项式根分布来研究稳定性. 其中较大的篇幅是关于现今鲁棒分析所要求的多项式族的鲁棒稳定性, 包括有理函数及有理函数族的严格正实性. 第三章从状态空间角度讨论稳定性问题. 包括 Lyapunov 方程, 二次型最优及与之联系的 Riccati 方程和 Hamilton 矩阵, 正实矩阵, 线性矩阵不等式以及二次稳定等内容.

第四章专门讲述线性时变系统. 主要阐述线性时变系统的稳定性, 结构性质, Gronwall-Bellman 方法, 并从一般性层次给出线性系统的有关结果以及由此引出的无源性、有界实结论, 最后对目前常用的微分包含理论, 针对线性时变系统作了必要介绍.

最后两章是有关控制系统稳定性、鲁棒性的阐述. 第五章围绕绝对稳定性展开, 充分考虑了频域不等式和 S 过程, 讨论的范围已不囿于绝对稳定性而涉及到其它一些总体性质. 第六章则是鲁棒稳定性的一些最重要的基础, 既包括参数不确定性的结果, 也包括互质分解上的结论. 最后讲述二次最优与 $\mathbf{H}_\infty$ 控制的有关理论基础.

本书的前身是北京大学出版社 1992 年出版的《稳定性理论》, 那时作者就刻意在传统稳定性理论上加强控制并引进鲁棒性. 这一努力见到了成效. 但近 10 多年的发展特别是鲁棒性研究的蓬勃发展, 迫使作者在原书的基础上做大规模的变动, 并将其改名为《稳定性与鲁棒性的理论基础》出版. 由于稳定性、鲁棒性的领域是一个成果浩瀚的领域, 其理论基础必然来自各方的力作. 这里要特别提到的是 [GL1995], [LPS1996], 前者对 $\mathbf{H}_\infty$ 理论的叙述既考虑到理论的完整又兼顾了时变与时不变的两种情形与 LQG 最优、滤波及 $\mathbf{H}_\infty$ 控制的多种形式, 这刚好符合本书的需要; 而后者在绝对稳定性基础上的展开也使作者获益匪浅, 书中关于这两方面的内容主要来自它们. 本书各节最后均有文献索引, 这既方便读者也是对原著作人的尊重.

在本书的完成过程中, 得到了自然科学基金项目的持续资助, 以及国家攀登项目《复杂系统控制的基础理论研究》和国家重点研究规划项目《我国电力大系统灾变防治和经济运行的重大科学问题的研究》的资助, 作者在此对国家科技部和自然科学基金委的支持深表谢意. 本书的出版还得到了中国科学院科学出版基金的资助, 在此深表感谢.

北京大学力学与工程科学系, 特别是系统与控制研究中心的同仁为本书的形成创造了一个良好的学术氛围, 正在或曾在该中心学习工作过的一批年轻朋友, 王金枝、郁文生、喻学刚、段志生、曾建平、杨莹、董海荣、朱俊彬等在提供材料、帮助录入、提供算例等方面给了作者以帮助, 特别是王金枝博士, 还帮助作者通校了全稿, 在此对他们的帮助, 深致谢意.

作者十分感谢所有帮助过的同志, 希望本书的出版将无愧于这些支持和帮助.

由于作者水平有限, 挚诚欢迎批评指正.

黄 琳

2002 年 4 月

目　　录

第一章　Lyapunov 稳定性理论

本章主要介绍 Lyapunov 稳定性理论的基本内容，包括稳定性的基本概念， Lyapunov 函数以及用 Lyapunov 方法判定稳定、不稳定、吸引、渐近稳定等的结论及其在力学系统中的应用．在许多叙述中将用适当的例子来阐明不同概念的差异以及定理条件的合理性．在叙述方式上将力求用比较新的知识和方法而不拘于原有结果的原始思路与证明方法．

1.1　稳定性的基本概念

为了行文方便，首先对本书中的常用符号作一些说明．

$\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 分别表示实数与复数域，$\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{C}^n$ 分别表示 n 维实与复向量空间，$\mathbf{R}^{m\times n}$ 与 $\mathbf{C}^{m\times n}$ 用来表示 $m\times n$ 的实与复矩阵组成的集合， $\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数， $\mathbf{J}$ 表示半无穷区间 $[\theta,+\infty)$,θ 为一实数， $\underline{n}$ 表示自然数集 $\{1,2,\cdots,n\}$．

黑体英文大写字母常用来表示集合，如 $\mathbf{A}$,$\mathbf{S}$ 等， $\mathring{\mathbf{A}}$ 表示 $\mathbf{A}$ 的开核，即全部 $\mathbf{A}$ 的内点组成的集合， $\overline{\mathbf{A}}$ 则表示 $\mathbf{A}$ 的闭包， $\partial\mathbf{A}$ 表示集合 $\mathbf{A}$ 的边界， $\partial_r\mathbf{A}$ 表示 $\mathbf{A}$ 相对其仿射包的边界或 $\mathbf{A}$ 的相对边界． $\mathbf{B}(x_0,\rho)$ 表示 n 维实空间中中心在 x_0 半径为 ρ 的闭球，即

$$\mathbf{B}(x_0,\rho)=\{x|x\in\mathbf{R}^n,\|x-x_0\|\leqslant\rho\}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是向量的 Euclid 范数，即 $x^Tx=\|x\|^2,x^T$ 是 x 的转置，特别 $x_0=0$ 时用 $\mathbf{B}_\rho$ 简记 $\mathbf{B}(0,\rho)$．对应球 $\mathbf{B}(x_0,\rho)$ 的开球记为 $\mathring{\mathbf{B}}\ (x_0,\rho)=\{x|x\in\mathbf{R}^n,\|x-x_0\|<\rho\}$．

书中矩阵或向量，例如 A 或 a, 其元或分量一般以对应的希腊字母表示，例如 α_{ij} 或 α_i．

按当今数学运用的习惯，符号 $\forall$ 表示“对所有的”或“对任意的”， $\exists$ 表示“均可找到”或“均存在”．有时为了行文简洁，对于定义或命题，常用一连串的圆括号表示其条件而最后写出它的结论．这种做法在稳定性的文献，特别是在俄国文献中是常用的．为了适应这种叙述方式，我们用一些在本书中常用到的定义来作为例子．

例 1.1.1　实函数 $f(x):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 在开集 $\mathbf{M}\subset\mathbf{R}^n$ 内是连续的，系指

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall x_0\in\mathbf{M})(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathring{\mathbf{B}}\ (x_0,\delta)\subset\mathbf{M}):\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$$

在 $\mathbf{M}$ 上连续的函数的集合记为 $\mathbf{C}[\mathbf{M}]$．反之， $f(x)$ 在 $\mathbf{M}$ 上不连续则为

$$(\exists\varepsilon>0)(\exists x_0\in\mathbf{M})(\forall\delta>0)(\exists x\in\mathring{\mathbf{B}}\ (x_0,\delta)\subset\mathbf{M}):\|f(x)-f(x_0)\|\geqslant\varepsilon$$

从这一例子可以清楚地看出，同一问题的正反叙述只需将 $\forall$ 与 $\exists$ 互换而最后结论相反即可．这种方便有时在较复杂的推演过程中可以得益．

例 1.1.2 矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 具有线性无关列，系指

$$(\forall x \in \mathbf{R}^n | x \neq 0) : Ax \neq 0$$

而 A 的列线性相关则为

$$(\exists x \in \mathbf{R}^n | x \neq 0) : Ax = 0$$

对于秩为 k 的 $m \times n$ 阶矩阵 A 的集记为 $\mathbf{R}_k^{m\times n}$, 则 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 具线性无关列，可简记为 $A \in \mathbf{R}_n^{m\times n}$.

例 1.1.3 设 $\mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n$ 系一开集，$\theta \in \mathbf{R}$, 函数 $f(t,x) : \mathbf{J} \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}^m$ 称为对 x 具局部 Lipschitz 条件，系指

$$(\forall \mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}} \subset \mathbf{S}\text{且}\mathbf{N}\text{有界})(\exists k > 0)(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{N})(\forall t \in \mathbf{J})$$

$$: \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$$

称 $f(t,x)$ 在 $\mathbf{S}$ 上具 Lipschitz 条件，系指

$$(\exists k > 0)(\forall x_1, x_2 \in \mathbf{S})(\forall t \in \mathbf{J}) : \|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$$

以后用 $\mathrm{Lip}_x[\cdot]$ 表示对 x 的 Lipschitz 条件，而用 $\mathrm{LLip}_x[\cdot]$ 表示该条件是局部的.

考虑由微分方程

$$\dot{z} = g(t,z) \tag{1.1.1}$$

描述的动态系统，其中 $z(t) \in \mathbf{R}^n, g(t,z) : \mathbf{J} \times \mathbf{S} \to \mathbf{R}^n, \mathbf{S} \subset \mathbf{R}^n$, 若又有

$$g(t,z) \in \mathbf{C}[\mathbf{J} \times \mathbf{S}] \cap \mathrm{LLip}_z[\mathbf{J} \times \mathbf{S}] \tag{1.1.2}$$

即函数 $g(t,z)$ 在 $\mathbf{J} \times \mathbf{S}$ 上连续且对 z 具局部 Lipschitz 条件，则考虑初值问题

$$z_0 = z(t_0) \in \mathbf{S}, \quad (t_0, z_0) \in \mathbf{J} \times \mathbf{S} \tag{1.1.3}$$

由微分方程理论可知，系统 (1.1.1) 存在惟一具初条件 (1.1.3) 的解. 以后记这样的解为 $z(t; t_0, z_0)$, 这表明它满足系统 (1.1.1) 且有 $z(t_0; t_0, z_0) = z_0$.

由于稳定性理论主要是讨论系统在无穷时间区间内的行为，而且为了避免过多地讨论常微分方程的存在惟一性问题，以后均假设:

1° 整个系统 (1.1.1) 在 $\mathbf{J}\times\mathbf{S}$ 上有定义, 且系统的解 $z(t; t_0, z_0)$ 对任何 $t \geqslant t_0, z_0 \in \mathbf{S}$ 均留在 $\mathbf{S}$ 内;

2° 除非特别强调，一般均设系统 (1.1.1) 对初值问题的解存在惟一性条件，或假设 $g(t,z) \in \mathbf{C}[\mathbf{J} \times \mathbf{S}] \cap \mathrm{Lip}_z[\mathbf{J} \times \mathbf{S}]$.

在有了这些准备以后，可以给出下述概念:

定义 1.1.1 系统 (1.1.1) 的特解 $\widetilde{z}(t)$ 是稳定的，系指

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{J})(\exists \delta > 0)(\forall z_0 | (z_0 - \widetilde{z}(t_0)) \in \mathring{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t \geqslant t_0)$$

$$: (z(t;t_0,z_0) - \widetilde{z}(t)) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon \tag{1.1.4}$$

若还有

$$\lim_{t\to\infty}(z(t;t_0,z_0) - \widetilde{z}(t)) = 0 \tag{1.1.5}$$

则特解 $\widetilde{z}(t)$ 是渐近稳定的.

系统的特解的稳定性是微分方程自变量区间为有限时解对初值的连续依赖性在自变量区间变为无穷时的扩展. 这种扩展反映了本质的变化. 例如 $\dot{\xi} = \alpha\xi, \alpha > 0$, 易于验证任给一有限时间区间, 该方程的任何解对初值均有连续依赖性, 但对应 $\xi = 0$ 却不是上述意义下稳定的, 或者说这种连续依赖性是不能扩展至无穷区间的.

设相对系统 (1.1.1) 的特解 $\widetilde{z}(t)$ 有一摄动 $x(t), z(t) = x(t) + \widetilde{z}(t)$ 亦为系统 (1.1.1) 的解, 则 $x(t)$ 满足下述方程与初值:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t) + \widetilde{z}(t)) - g(t, \widetilde{z}(t)) = f(t,x) \\ x(t_0) = z(t_0) - \widetilde{z}(t_0) \end{cases} \tag{1.1.6}$$

容易证明

1° $f(t,0) \equiv 0$, 即 $x = 0$ 是 (1.1.6) 的一个特解, 且是 (1.1.6) 的平衡位置;

2° 系统 (1.1.1) 的特解 $\widetilde{z}(t)$ 是稳定或渐近稳定当且仅当系统

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \quad f(t,0) = 0 \tag{1.1.7}$$

的平衡位置 $x = 0$ 是稳定或渐近稳定.

由于在理论上任何系统特解的稳定性均可化成另一系统平衡位置的稳定性. 今后我们将只讨论系统 (1.1.7) 平衡点的稳定性.

定义 1.1.2 系统 (1.1.7) 平衡点 $x = 0$ 是稳定的, 系指

$$(\forall\varepsilon > 0)(\forall t_0 \in \mathbf{J})(\exists\delta > 0)(\forall x_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta)(\forall t \geqslant t_0) : x(t;t_0,x_0) \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon \tag{1.1.8}$$

反之, 若

$$(\exists\varepsilon > 0)(\exists t_0 \in \mathbf{J})(\forall\delta > 0)(\exists x_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta)(\exists t \geqslant t_0) : x(t;t_0,x_0) \bar{\in} \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\varepsilon \tag{1.1.9}$$

则系统 (1.1.7) 的平衡位置 $x = 0$ 为不稳定.

显然, 任何系统的特解的稳定性均可转化为一新系统的零解的稳定性. 一般情况下系统特解是否稳定将不仅取决于系统, 而且取决于特解本身. 但对于线性系统

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.1.10}$$

则可以有

定理 1.1.1 线性系统 (1.1.10) 任一特解 $\widetilde{x}(t)$ 是稳定的当且仅当其零解是稳定的.

证明 考虑任一特解 $\widetilde{x}(t)$. 研究摄动后的解 $x(t)$ 及 $y(t)=x(t)-\widetilde{x}(t)$, 则 y 满足

$$\dot{y}(t)=\dot{x}(t)-\dot{\widetilde{x}}(t)=A(t)x(t)-A(t)\widetilde{x}(t)=A(t)y \tag{1.1.11}$$

注意到 (1.1.11) 与 (1.1.10) 实际上是同一系统，于是定理得证. □

定理 1.1.1 所表述的这种线性系统才具有的特性对一般非线性系统来说是不存在的，即一般非线性系统其特解的稳定性并不等价于零解的稳定性.

例 1.1.4 研究单摆运动方程

$$\ddot{\xi}+\omega^2\sin\xi=0$$

在引入 $\xi_1=\xi,\xi_2=\dot{\xi}$ 后，又可写成

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1=\xi_2\\ \dot{\xi}_2=-\omega^2\sin\xi_1\end{cases}$$

考虑该系统的总能量 $V=\omega^2(1-\cos\xi_1)+\dfrac{1}{2}\xi_2^2$, 则易于发现

1° $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\partial V}{\partial\xi_1}\dot{\xi}_1+\dfrac{\partial V}{\partial\xi_2}\dot{\xi}_2=0$, 表明系统是保守的或能量守衡的;

2° $V=$const, 在原点附近是封闭曲线.

考虑到 $V(0,0)=0,V$ 是 ξ_1,ξ_2 的连续函数，可知平衡点 $\xi_1=\xi_2=0$ 是稳定的.

在平衡点附近考虑该系统对应初值

$$\xi_1(t_0)=\xi_{10},\quad \xi_2(t_0)=\xi_{20}=0$$

的特解 $\xi(t)$, 则可知有

$$\frac{\left[\dot{\xi}(t)\right]^2}{2}=\omega^2\left[\cos\xi(t)-\cos\xi_{10}\right]$$

其中 ξ_{10} 是对应周期振动的振幅，而对应的周期可以算出为

$$T(\xi_{10})=\frac{2}{\omega}\int_{\theta}^{\xi_{10}}\frac{\sqrt{2}d\xi}{\sqrt{\cos\xi(t)-\cos\xi_{10}}}$$

T 是 ξ_{10} 的函数，且有

$$T(\xi_{10})>T\left(\widetilde{\xi}_{10}\right),\quad \forall\xi_{10}>\widetilde{\xi}_{10}$$

考虑对应 $\xi(0)=\xi_{10},\dot{\xi}(0)=0$ 的特解 $\xi(t)$ 及其邻近有 $\widetilde{\xi}(0)=\widetilde{\xi}_{10},\dot{\widetilde{\xi}}(0)=0$ 的解 $\widetilde{\xi}(t)$, 则由于 $\xi(t)$ 与 $\widetilde{\xi}(t)$ 对应不同周期，这种不等周期性将导致 $\xi(t)$ 不是对应系统稳定的特解.