

数 学 的

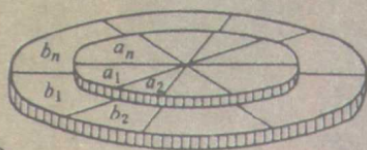
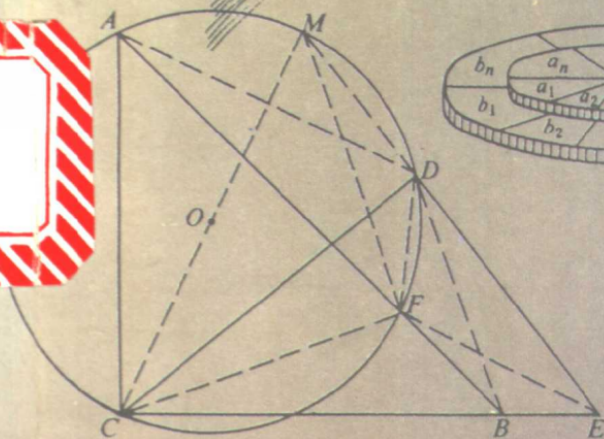
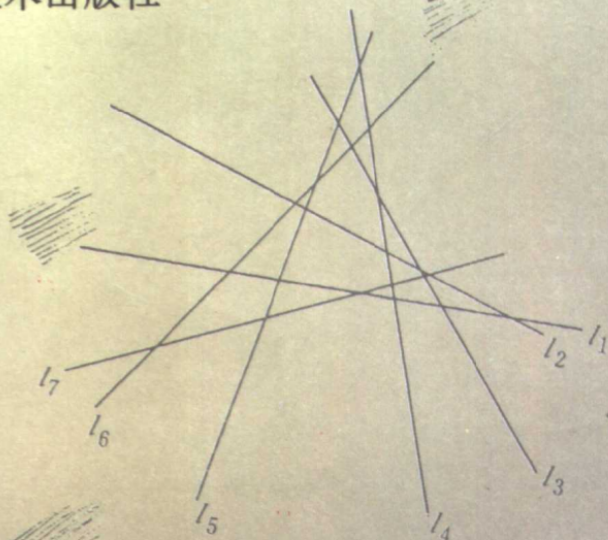
领

悟

罗增儒

河南科学技术出版社

△ 让你开窍的数学



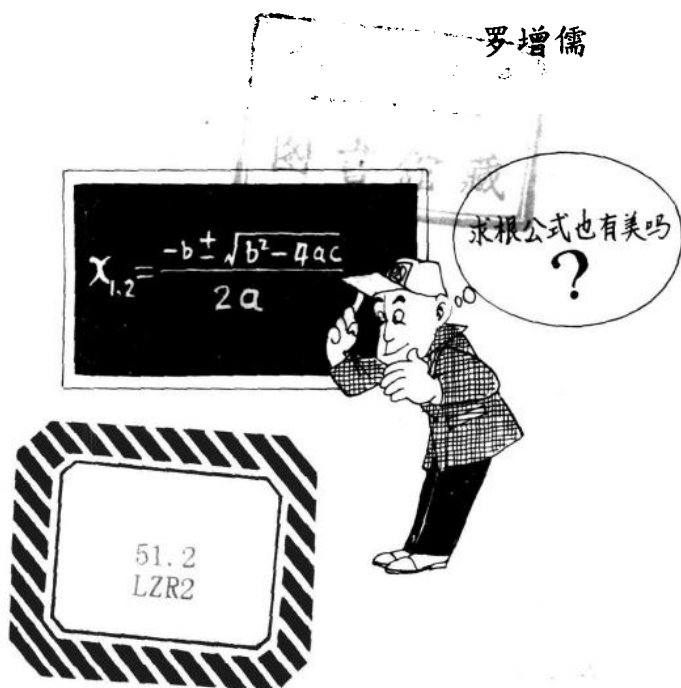


0856823

让你开窍的数学

数学的领悟

罗增儒



河南科学技术出版社

内 容 提 要

人们常问:学数学怎样才能“开窍”?本书以生动具体的事例和“高观点”、“慢镜头”的笔法向广大师生作了极具启发性的回答.其基本精神是:通过对解题过程的分析去领悟“怎样解题”.作者从大量的典型例题和有趣的故事中提炼出基本的数学观点与精明的解题技术,内容涉及方程与函数、组合与分解、命题转换、差异分析、数形结合、分类讨论、层次解决,以及构造、对应、对称、一般化、特殊化、数字化、有序化、不变量、有效增设、整体处理等.书中的绝大部分内容初中生即可看懂,但其思想实质高中教师仍须深入领会.

让你开窍的数学

数学的领悟

罗增儒

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版

(郑州市农业路73号)

河南第一新华印刷厂印刷

全国新华书店发行

787×1092毫米 32开本 7.375印张 149千字

1997年1月第1版 1998年4月第2次印刷

印数:4 001--8 000册

ISBN 7-5349-1936-3/G·507

定 价:8.40元

序

如果我们打开科学史,研究一些卓越人物成功的经验,就会发现一个重要的事实:他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳,但热爱生物,结果他成为最伟大的生物学家.反之,如果强迫他研究数学,他未必能如此成功.由此可见,兴趣与工作一致,二者形成良性循环,是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关,但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生

不仅知其然,而且知其所以然,不仅看到定理的结论,而且了解它的演变过程,不仅看到逻辑之美,而且欣赏到形象之美、直观之美,这才是难能可贵的。在许多情况下,直观走在逻辑思维的前面,起了领路作用。直觉思维大都是顿悟的,很难把握,却极富兴趣,正是精华所在。M. 克莱因写了一部大书《古今数学思想》,对数学发展的主导思想有精彩的论述,可惜篇幅太大,内容过深,不易为中学生所接受。

真正要对数学入迷,必须深入数学本身:不仅是学者,而且是作者;不仅是观众,而且是演员。他必须克服一个又一个的困难,不断地有新的发现、新的创造。其入也愈深,所见也愈奇,观前人所未观,发前人所未发,这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界。为此,他应具备很强的研究能力;而这种能力,必须从中学时代起便开始锻炼,经过长期积累,方可成为巨匠。

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用。近年来我国出版了多种数学课外读物,包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解。这套《让你开窍的数学》丛书与众不同,其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”,风格近似于美国数学教育家 G. Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》,但更切合我国的实际。本丛书共 8 本,可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广。作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平,而且大都出版过多种数学著作。因此,他们必能得心应手,写得趣味盎然,富于启发性。这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学,我们希望它能收到宗旨中确定的效果,为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996. 7.

前言

怎样才能学好数学呢？这是千百万中学生心头的一个问号，也是写作本书的一个诱因。让我们先听听大师们的真知灼见：

1995年5月18日至21日，笔者出席了中国数学会第七次代表大会暨60周年年会，并有幸采访了国际数学大师陈省身教授，笔者请他结合数学研究的体会谈谈怎样学好数学，大师胸有成竹地回答说：首先是用功，不用功什么也谈不上……

早在笔者还是一个十几岁的数学系学生时，就听到过华罗庚大师关于读书“由薄到厚”和“由厚到薄”的治学方法。首先是在记住所学的概念、定理、公式、法则的基础上，认真消化，弄清来龙去脉、前因后果，从而对原书内容补充了许多新的注解，并增加了许多新的视角，书“越读越厚”；随着认识的发散、理解的深入，知

识的脉络越来越清晰,内容的精神揭示越来越本质,认识上升到一个新的层次,书又“越读越薄”.

这两位大师的经验之谈,正好说出了数学事业成功的两个根本条件:勤奋而得法,而它们又恰如数学本身——伟大而平凡.

这些,都是学好数学的大前提,也是本书写作的大前提.

对于勤奋好学的青少年,笔者想从学科特点出发,谈一些具体的数学领悟,其主题是通过解题过程的分析学会学数学,其目的是从根本上提高数学素质,而具体做法则是非教科书式的:

(1)全书12章,协奏着“分析解题过程”的同一个主旋律,而每一章又相对独立.读者可以从感兴趣的任一章开始阅读,但却要情不自禁地将各章读完,因为,各章之间毕竟有精神上的联系,并组成一个整体.

(2)每一章都是以一些具体的实例去说明数学的领悟,这些实例横跨古今中外,既有趣味性又有启发性;这些领悟包容观点、方法和技巧,既有思想深度又有可操作性.对于如何进行解题过程的分析,怎样分析解题的信息过程和心理过程等都给出了明确的步骤.

(3)起点不高、观点不俗、广视角、慢镜头,要让每一个学生都有看懂的基础,每一个教师都有思考的余地.就是说,在初中数学知识的基础上,提炼基本数学观点和基本数学方法.本书中,既有方程的观点、函数的观点、组合与分解的观点、命题转换的观点,又有差异分析的思想、数形结合的思想、分类

讨论的思想、层次解决的思想,还有构造、对应、对称、一般化、特殊化、数字化、有序化、不变量、有效增设、整体处理等技巧.而所有这一切无不源于有趣的故事或简明的实例.

(4)由于数学解题具有探索性和实践性的特征,所以,人们常说数学不能教会,而只能学会.因而,我们的写作也遵循了讲练结合的原则,一方面是深入浅出的讲解,另一方面是独立思考的练习.为了便于读者自学,练习题都给出了参考答案,但这不是唯一的,更不是最后和最好的,它不妨碍读者去作更广阔的联想与引伸.

笔者正在大学里给师范生讲授“数学解题学引论”这门课,本书在写作中受该理论的影响,表达了许多个人的探索性的思考,并冒着新颖性与谬误并存的风险,借此机会就教于同行.数学技能的掌握靠反复训练,数学思想的掌握靠深入领悟.

罗增儒

于陕西师范大学(邮编:710062)

目 录

1 写在开头的思考

——例说学会学数学 (1)

1.1 理解实质 (2)

1.2 看透本质 (8)

1.3 优化素质 (13)

2 解题是怎么回事

——解题的信息过程 (18)

2.1 童年的梦想 (18)

2.2 解题的信息过程 (20)

2.3 旧题新解 (23)

2.4 并不后悔 (26)

3 心里是怎么想的

——解题的心理过程 (27)

3.1 知道的越多不知道的
也越多 (27)

3.2 观察、联想 (29)

3.3	联想、转化	(34)
3.4	猜想、论证	(38)
4	向一代宗师学习	
	——“怎样解题”表	(44)
4.1	波利亚的“怎样解题”表	(44)
4.2	“怎样解应用题”表	(47)
4.3	设计更多的解题表	(54)
5	一个朴素的建议	
	——差异分析法	(58)
5.1	差异分析法简说	(58)
5.2	范例分析	(60)
6	一条高效的通途	
	——特殊化的功能	(75)
6.1	解题的突破口	(76)
6.2	寻找解题思路的策略	(79)
6.3	完成解题的方法	(83)
6.4	特例否定	(86)
7	一柄双刃的利剑	
	——数形结合	(93)
7.1	无字的证明	(93)
7.2	数转换为形,看透实质	(95)
7.3	形转换为数,形数结合	(98)
8	草船借箭多启示	
	——转换思考的角度	(108)

8.1	顺难则逆	(109)
8.2	正难则反	(113)
8.3	直难则曲	(120)
9	知难而进有方舟	
	——分类讨论	(125)
9.1	《孙子兵法》与斯巴达克斯	(125)
9.2	分类讨论的原因	(127)
9.3	分类讨论的方式	(132)
9.4	防漏求全	(136)
10	渐次缩小包围圈	
	——层次解决	(141)
10.1	案件侦破与层次解决	(141)
10.2	方程观点与层次解决	(144)
10.3	函数思想与层次解决	(148)
11	为了更美的题解	
	——解题过程分析	(155)
11.1	拉开黑房间的电灯	(155)
11.2	如何分析解题过程	(158)
11.3	通过分析发现错误	(165)
12	题题都有个故事	
	——精明的数学技巧	(172)
12.1	波萨的故事	(173)
12.2	比小高斯多走一步	(175)
12.3	低年级同学也有创造性	(176)

12.4 “不可思议”的水管问题.....	(180)
12.5 我们事前没有想到他的解法.....	(183)
习题解答	(189)



写在开头的思考

——例说学会学数学

这是一本关于学数学的小册子,同时更是一些“学会”学数学的经验之谈.

“人”可能比“数学”更加复杂,但即使对“数学”感到费解的读者也不会对“人”感到陌生,这对我们是一个启示.在辽阔的田野上,我们断定远方一个朦胧的物体是“人”而不是别的什么东西时,不是根据“人的定义”;而我们对“人”的认识,也是从一个个具体的人如“妈妈”、“爸爸”、“哥哥”、“姐姐”开始的.托儿所的孩子都能认得出课本上的地图与墙上那大了几十倍的地图都是“中国地图”,虽然他们没有学过什么叫“相似形”.因此,作为本书的开头,我们想单刀直入地研讨一些学数学的具体例子.

1.1 理解实质

可能每一个读者都会对解答这样一个问题胸有成竹：

例 1.1 解方程 $0.5x=10.5$.

(初中《代数》，第一册(上)，28 页，北京，人民教育出版社，1992.)

讲解 的确，这个问题太简单了，仅凭小学关于逆运算的道理便有

$$x = \frac{10.5}{0.5} = \frac{105}{5} = 21.$$

还可以按照中学教材解一元一次方程的步骤，“两边同除以未知数的系数”，有

$$x = \frac{10.5}{0.5} = \frac{105}{5} = 21.$$

当然，这两个原理都无可挑剔，结论也完全正确。但是，面对天真烂漫的孩子们这千篇一律的解法，我们对“教”和“学”都感到沉重。难道除以 0.5 不就是乘以 2 吗？这里有教得太死的问题，也有学得死的问题，主要是教的问题。一旦教学点拨到：两边除以未知数系数的目的是什么？（使未知数的系数变为 1.）其依据是什么？（解方程的同解原理 2. ①）学生立即就能想到：

解 两边同乘以 2，有

$$x = 10.5 \times 2 = 21.$$

① 同解原理 2 为：方程两边都乘以（或除以）同一个不等于零的数，所得方程与原方程是同解方程。

前后两种处理,用到的是同一个“同解原理 2”,但境界已经完全不一样.前者停留在“学会”的水平上,后者已经上升到“会学”的层次.不仅如此,理解了解题步骤的实质之后,将会对

$$0.25x=10.5$$

两边乘以 4;对方程

$$0.125x=10.5$$

两边乘以 8.

这个例子给我们的启示是:

(1)对于教师,不能只教“这样解”,还应讲清“怎样解”;平庸的教师仅教人“这样解”,合格的教师还教人“怎样解”.

(2)对于学生,不应只满足于表面文字的学会,还要深入理解概念、原理、方法等的精神实质.比如解一元一次方程的五个步骤,其实质是:在保持方程同解的条件下,通过方程变形把只含未知数的项、只含已知数的项分别集中到方程的两边,并把未知数的系数变为 1.

有了这点认识,在求解一元一次方程时就不能掌握住“程序”,而且能够灵活变通,表现出简单但宝贵的创造性.请看下例.

例 1.2 解方程 $x - \frac{1}{3} \left[x - \frac{1}{3} (x - 9) \right] = \frac{1}{9} (x - 9).$

(初中《代数》,第一册(上),244 页,北京,人民教育出版社,1992.)

讲解 对这个方程,就可以抓住实质,不去分母,不去小括号,仅去中括号.

$$x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}(x-9) = \frac{1}{9}(x-9),$$

移项消去 $\frac{1}{9}(x-9)$, 得

$$\frac{2}{3}x = 0,$$

得 $x = 0$.

这里, 对 $\frac{1}{9}(x-9)$ 整体移项, 正是变换思想、整体处理的雏形, 也是数学的领悟.

例 1.3 看着二次方程的求根公式

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

你能说出几条美的体会吗?

讲解 如果说, 我们的读者对例 1.2 大多都能迅速作出反应的话, 那么, 对例 1.3 可能就会显得迟钝、甚至迷惘了: 求根公式有美吗? 这也是学数学的问题吗?

我们的回答是肯定的. 事实上, 本书的一个目的正是: 向同学们展示数学的美, 帮同学们掌握美的数学.

我们说, 二次方程求根公式非常美, 当你仔细体味其淡淡表示的深深含义时, 无异于读一首数学的诗, 看一幅数学的画, 听一曲数学的歌:

(1) 公式告诉我们, 二次方程的实根由其三个系数完全确定. 至于未知数用什么字母 ($x, y, t, s, \dots$) 表示是没有关系的; 同样, 未知数所代表的实际意义 (时间、速度、边长、面积等) 也是没有关系的. 这是一个 (二次方程的) “万能” 求根公式. 它向我们展示了数学的抽象性、一般性和简洁美.