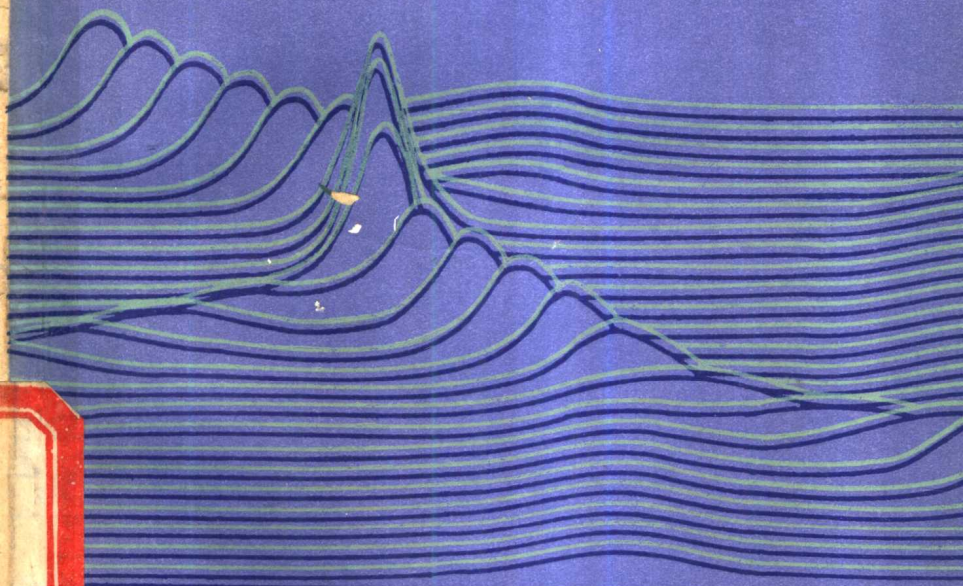


# 逆散射变换 和孤立子理论



上海科学技术文献出版社

---

THE INVERSE SCATTERING  
TRANSFORMATION AND THE THEORY  
OF SOLITONS AN INTRODUCTION  
MATHEMATICS STUDIES 50  
W. ECKHAUS  
(荷兰) A. VAN HARTEN  
NORTH-HOLLAND PUBLISHING  
COMPANY 1981

---

逆散射变换和孤立子理论

W. 艾克霍思 著  
[荷兰] A. 范哈顿

黄迅成 译 陈以鸿 校

上海科学技术文献出版社出版  
(上海市武康路2号)

本书由上海发行所发行  
上海市业余工业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7 字数 169,000

1984年3月第1版 1984年3月第1次印刷

印数: 1-3,500

书号: 13192·56 定价: 0.87 元

《科技新书目》60 267

## 内 容 提 要

本书主要阐述逆散射变换和孤立子的一些最基本的理论问题,以便为深入学习和研究非线性演化方程的解析求解提供一个合适的导引。

全书共分七章。第一章按照历史发展的线索介绍柯特维格-德佛累斯(KdV)方程及其孤立子解的基本性质。第二章以KdV方程为例,讨论了逆散射变换及有关理论分析,介绍了加德纳-格林-克鲁斯卡尔-缪拉的著名工作。第三章引进谱不变位势概念,介绍了拉克斯从希尔伯特空间算子理论出发对逆散射变换所作的一些研究。第四、第五两章对薛定谔方程和广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射、逆散射和谱理论进行全面和独立的处理。第六章以非线性薛定谔方程和其他一些演化方程为例,介绍逆散射变换的应用。最后一章则浏览了本书所述理论的一个新兴的方面,并专门讨论了微扰问题。

本书系作者在荷兰乌得勒支数学研究所讲授逆散射课程的教材。它可供我国高等院校数学、物理、力学、光学等专业高年级大学生、研究生和教师阅读。也可供从事等离子体物理、理论物理、流体力学、晶格力学、非线性光学、海洋学、应用数学和工程等方面工作的有关科技人员参考。

## 原作者为中译本题词

我们以愉快的心情欢迎本书中译本的出版。我们希望这本书对于许多不同专业的大学生和科学家们，在孤立子理论入门方面和推动进一步研究方面都将有所裨益。

维克托·艾克霍思

阿 特·范 哈 顿

1983 年 9 月 12 日

于乌得勒支(荷兰)

## 序 言

逆散射变换(inverse scattering transformation)方法和孤立子(soliton)理论是应用数学领域中两项最新最迷人的成就。孤立子理论的发展主要是最近十年内的事情,但却迅猛异常,影响深远。我们并不奢望在本书中谈到这理论的所有方面。我们的目的,首先是为未入门的读者以及为从未听到过孤立子或者只是从侧面看到它所引起的震动的数学家和物理学家提供一个导引;其次,我们打算以一种数学上令人满意的严密方式来介绍这一理论。因此,本书包含了许多新的观点和一些在别处看不到的材料。我们希望这也能引起熟悉孤立子理论的科学家们的兴趣。

写作本书的意图是作者于1979年春季在乌得勒支(Utrecht)数学研究所讲授逆散射变换课程期间产生的。那时,为了用一种能为未入门的并且有点挑剔的读者所理解和接受的方式来组织和叙述教材,我们遇到了很大的困难。那些关于逆散射变换、可积演化方程和有关论题的浩瀚文献,展现出一个由研究孤立子的各种途径交织起来的令人眼花缭乱的图案。我们的困难之一是寻找和遵循一条合适的入门途径。当我们试图得到一种从数学观点看来令人满意的叙述方式时,又发生了其他困难。在那新发现一个接着一个的迅速发展时期所产生的着重于物理应用的文献中,读者看到的往往都是一些论述,而证明只是简略一提,甚至根本不提。因此我们觉得填补空缺和澄清推理的工作是很重要的。尽管在课程中已倾注了我们的大量心血,我们决

心再接再厉,将教材进一步加工,并把这部导引呈献给更多的读者。

本书的安排主要是按照逆散射变换方法发展的历史线索。在第四、第五两章,由于对薛定谔方程和广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射和逆散射问题进行全面而独立的处理,使线索暂时中断。在最后一章(专讲微扰),我们浏览了这理论的一个前沿,那里的有关分析主要还处于初始启蒙阶段,有许多问题还没有解决。

不少有意义的论题在本书中没有触及,这儿我们随意列举一些,其中有些我们觉得是重要的。例如,我们没有讨论守恒律的存在性、哈密顿形式体系、KdV 方程的周期情况、户田链等离散系统、贝克隆变换以及用外微分形式的技巧来逼近可积演化方程等等。我们还要强调,本书主要是作为一个导引,它的目的是供给读者以足够的知识,以便他能按照自己的兴趣进一步学习其他文献。一些综述性论文,如阿柏罗维茨(1978),缪拉(1976),杜布罗文、玛特维耶夫和诺维柯夫(1976),或布洛和考德里(1980)主编的论文集,都附有文献目录可供参考。

感谢彼得·薛尔对本书的贡献,他阅读了原稿,提醒我们注意并帮助解决了一些不易捉摸的困难。打字工作则是乔克·斯托珀恩和西内克·库尔恩细心而愉快地完成的。

维克托·艾克霍思

阿·特·范哈顿

于乌得勒支(荷兰)

# 目 录

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| <b>第一章 柯特维格-德佛累斯(KdV) 方程</b> .....                   | 1  |
| § 1.1 历史情况介绍.....                                    | 1  |
| § 1.2 基本性质.....                                      | 3  |
| § 1.3 孤立子的行为.....                                    | 5  |
| § 1.4 初值问题 解的存在性和唯一性.....                            | 7  |
| § 1.5 缪拉变换和修正 KdV 方程 .....                           | 8  |
| <b>第二章 用加德纳-格林-克鲁斯卡尔-缪拉方法 求解逆<br/>    散射变换</b> ..... | 11 |
| § 2.1 直线上的薛定谔方程的散射问题.....                            | 12 |
| § 2.2 位势满足 KdV 方程时谱的不变性 .....                        | 14 |
| § 2.3 散射量的演化.....                                    | 17 |
| 2.3.1 特征函数的演化 .....                                  | 17 |
| 2.3.2 正规化系数 $C_n(t)$ 的演化 .....                       | 18 |
| 2.3.3 反射系数 $b(k, t)$ 的演化 .....                       | 20 |
| § 2.4 关于逆散射变换求解法的总结和讨论.....                          | 22 |
| § 2.5 纯 $N$ -孤立子解 .....                              | 25 |
| § 2.6 纯 2-孤立子解: 一个练习.....                            | 31 |
| § 2.7 孤立子速度与特征值之间的关系.....                            | 34 |
| § 2.8 任意初始条件下孤立子的出现.....                             | 40 |
| 2.8.1 问题的表述 .....                                    | 41 |
| 2.8.2 $\Omega_0$ 和 $T_0$ 的分析 .....                   | 42 |
| 2.8.3 盖尔芬德-莱维坦方程的解.....                              | 44 |

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.8.4 解的分解和估计                                                                                                   | 45  |
| 第三章 谱不变位势 拉克斯方法                                                                                                 | 47  |
| § 3.1 用初等方法证明离散特征值的不变性                                                                                          | 51  |
| § 3.2 谱的不变性                                                                                                     | 54  |
| § 3.3 薛定谔方程的谱不变位势                                                                                               | 58  |
| § 3.4 更一般自伴算子的谱不变位势                                                                                             | 61  |
| § 3.5 另一种方法                                                                                                     | 63  |
| 第四章 薛定谔方程的散射和逆散射                                                                                                | 68  |
| § 4.1 薛定谔方程的解和散射量                                                                                               | 70  |
| § 4.2 解的性质                                                                                                      | 75  |
| 4.2.1 作为积分方程的重新表述                                                                                               | 76  |
| 4.2.2 $\operatorname{Im} k \geq 0, k \neq 0$ 时的存在性和唯一性                                                          | 78  |
| 4.2.3 $\operatorname{Im} k \geq 0, k \neq 0$ 时的正则性                                                              | 83  |
| 4.2.4 渐近行为                                                                                                      | 86  |
| 4.2.5 $k=0$ 附近的行为                                                                                               | 90  |
| 4.2.6 与参数有关的位势                                                                                                  | 95  |
| § 4.3 $L_2(\mathbb{R})$ 上 $-\frac{d^2}{dx^2} + u$ 的谱                                                            | 97  |
| § 4.4 解的傅里叶变换                                                                                                   | 111 |
| § 4.5 逆散射                                                                                                       | 125 |
| § 4.6 结束语                                                                                                       | 134 |
| 第五章 广义萨哈罗夫-沙巴特系统的散射和逆散射                                                                                         | 135 |
| § 5.1 广义萨哈罗夫-沙巴特系统的解和散射系数                                                                                       | 137 |
| § 5.2 解的性质                                                                                                      | 140 |
| § 5.3 $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \left( \frac{d}{dx} - Q \right)$ 在 $L_2(\mathbb{R})^2$ 上的谱 | 149 |
| § 5.4 解的傅里叶变换                                                                                                   | 152 |



|                                         |            |
|-----------------------------------------|------------|
| § 5.5 逆散射 .....                         | 156        |
| <b>第六章 逆散射变换的应用 .....</b>               | <b>161</b> |
| § 6.1 非线性薛定谔方程 .....                    | 162        |
| § 6.2 利用另一种方法对非退化一阶系统得到的谱不变<br>位势 ..... | 167        |
| § 6.3 用特别方法得到的谱不变位势的演化方程 .....          | 170        |
| § 6.4 一般 AKNS 演化方程 .....                | 174        |
| § 6.5 退化的一阶散射系统和正弦戈登方程 .....            | 179        |
| § 6.6 高阶散射系统 .....                      | 184        |
| <b>第七章 微扰 .....</b>                     | <b>187</b> |
| § 7.1 引言和概述 .....                       | 187        |
| § 7.2 关于薛定谔方程的散射量的演化 .....              | 190        |
| 7.2.1 离散特征值和反射系数 .....                  | 190        |
| 7.2.2 正规化系数 .....                       | 191        |
| § 7.3 关于广义萨哈罗夫-沙巴特问题的散射量的演化 .....       | 194        |
| 7.3.1 离散特征值和反射系数 .....                  | 196        |
| 7.3.2 正规化系数 .....                       | 198        |
| § 7.4 微扰分析 .....                        | 200        |
| <b>参考文献 .....</b>                       | <b>207</b> |
| <b>人名对照表 .....</b>                      | <b>212</b> |

# 第一章 柯特维格-德佛累斯 (KdV) 方程

## §1.1 历史情况介绍

大多数关于柯特维格-德佛累斯方程的综述性文章和精心结撰的论文,都是以 J·司各特·罗素在《论波动》(1844)中记叙他沿着河道骑马追踪一个波的著名故事的一段引文开始的. 让我们也遵循这个传统,在此重复一下司各特·罗素的这段生动记载:

“我正在观察一条船的运动,这条船被两匹马拉着,沿着狭窄的河道迅速前进. 船突然停下了,河道内被船体带动的水团却没有停下来,而是以剧烈受激的状态聚集在船头周围,然后形成了一个巨大的圆而光滑的孤立水峰,突然离开船头,以极大的速度向前推进. 这水峰约有三十英尺长,一至一英尺半高,在河道中行进时一直保持着起初的形状,速度也未见减慢. 我骑着马紧紧跟着,发觉它大约以每小时八至九英里的速度前进. 后来,波的高度渐渐减小,过了一至二英里之后,终于消失在蜿蜒的河道中. 这就是我在 1834 年 8 月第一次偶然发现这奇异而美妙的现象的经过. ....”

1895 年,柯特维格和德佛累斯的论文提出了一个数学模型方程,他们的用意之一就是为司各特·罗素所观察到的现象提供一个解释. 方程的原始形式如下:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right\}, \quad (1.1.1)$$

其中  $x$  是沿一维河道的变量,  $t$  是时间,  $\eta(x, t)$  是高于平衡水平面  $l$  的水面高度,  $g$  是引力常数,  $\alpha$  是与液体均匀运动有关的常数,  $\sigma$  是由

$$\sigma = \frac{1}{3} l^3 - \frac{Tl}{\rho g} \quad (1.1.2)$$

定义的常数,  $T$  是毛细现象的表面张力,  $\rho$  是密度。

方程 (1.1.1) 就是通常所说的柯特维格-德佛累斯方程, 简称 KdV 方程。

KdV 方程默默地度过了漫长的 65 年, 偶尔在文献中被提一下, 有时甚至被忘掉(范德布利杰(1978))。这种局面到 1960 年才被打破, 那时加德纳和莫里卡伐重新发现了这一方程, 作为分析无碰撞磁流体波的模型。从那时以来, KdV 方程一次又一次地在不同的背景中, 作为描述多种多样的物理现象的模型方程被推导出来(例如, 参阅缪拉(1976)及所引的参考文献)。今天, KdV 方程可被看作数学物理的基本方程之一。然而, 这不是使它闻名的唯一原因。

至少同样重要的是, 由于对 KdV 方程的研究, 促使发展了一套新的数学方法, 得到了许多新的结果。这就导致了从波传播的“实际”问题到代数几何中比较“抽象”论题的一系列应用(例如, 参阅杜布罗文、玛特维耶夫和诺维柯夫(1976))。

人们自然会问, 用自己的名字来命名这一现已著名的方程的是些什么人? 他们是怎样合作的? 范德布利杰(1978)对此作了一些回答:

第德力克·约翰尼斯·柯特维格(1848.3.31~1941.10.5)是一个写过很多论文的荷兰阿姆斯特丹大学著名数学教授。奇怪的是, 在柯特维格死后发布的一些讣告中, 似乎都未提及柯特维格-德佛累斯(1895)这篇论文。

哥斯塔夫·德佛累斯在柯特维格指导下写了一篇博士论文，于1894年12月1日提交给阿姆斯特丹大学。这篇论文是用荷兰文写的，现在所称的 KdV 方程就在论文的第9页上。看来德佛累斯此后的专业生涯，大部分是作为中学教师而度过的。

最后，我们还要提一下，尽管 KdV 方程是众所周知的，但它作为描述河道中（长距离）水波特性的模型方程还是受到了挑战。最近本杰明、博纳和马奥尼（1972）提出了另一个模型。关于这方面的讨论可以在例如克鲁斯卡尔（1975）中找到。

## §1.2 基本性质

通过变量变换，使方程与原来的物理问题无关，即得 KdV 方程的一些标准形式。一个经常用到的形式是通过

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{\omega\sigma}} t, \quad \bar{x} = -\frac{x}{\sqrt{\sigma}}, \quad u = -\frac{1}{2} \eta - \frac{1}{3} \alpha \quad (1.2.1)$$

的变换而得到的：

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} - 6u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} = 0. \quad (1.2.2)$$

上式第二项前面的数值因子没有什么特殊意义。事实上将变换加以修改： $x, t \rightarrow \bar{x}, \bar{t}$ ， $\eta \rightarrow u$ ，我们可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + \mu \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \nu u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} = 0, \quad (1.2.3)$$

其中  $\mu, \nu, \gamma, \nu \neq 0, \gamma \neq 0$  是可以随意选取的数值因子。然而，我们在这里还是依照大家普遍采用的形式 (1.2.2)。略去变量上的短横，我们有如下形式的 KdV 方程：

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.2.4)$$

注意这个方程具有伽利略变换不变性，意思是经过伽利略变换

$$t^* = t; x^* = x - ct; u^*(x^*, t^*) = u(x^* + ct^*, t^*) + \frac{1}{6}c, \quad (1.2.5)$$

$u^*$  满足方程

$$u_t^* - 6u^*u_{x^*}^* + u_{x^*x^*}^* = 0. \quad (1.2.6)$$

我们简单地考虑一下线性化的 KdV 方程, 即

$$u_t + u_{xxx} = 0. \quad (1.2.7)$$

这个方程具有谐波解

$$u(x, t) = Ae^{ik(x-ct)}, \quad (1.2.8)$$

条件是对于每一波数  $k$ , 相速度  $c$  满足

$$c = -k^2. \quad (1.2.9)$$

相速度不是常数(而是波数的函数)的波称为色散波(惠瑟姆(1974)). 关系 (1.2.9) 称为色散关系. 因为方程 (1.2.7) 是线性的, 所以谐波(具有不同波数)的任何迭加依然是方程 (1.2.7) 的解. 我们注意到线性化 KdV 方程的所有色散波解都随着时间的增长而向左行进.

现在我们回到完整的 KdV 方程, 寻找一些被称为永久型波的特殊解的存在性(拉姆(1932)), 这些解也被称为行进波(travelling waves)或前进波(progressing waves). 这些波的形状在某种特殊的移动坐标系中看来, 是不随时间改变的. 于是我们设

$$u(x, t) = U(x - ct), \quad (1.2.10)$$

代入 KdV 方程, 就可得关于函数  $U(z)$  的非线性常微分方程

$$U''' - (6U + c)U' = 0, \quad (1.2.11)$$

式中的撇表示微分. 积分一次, 我们得

$$U'' - 3U^2 - cU = m, \quad (1.2.12)$$

这里  $m$  是任意常数. 两边乘上  $U$ , 再积分一次, 得

$$U'^2 - 2U^3 - cU^2 - 2mU = n, \quad (1.2.13)$$

其中  $n$  又是一个任意常数.

在最后一步中,  $U$  可以隐含地用椭圆积分来定义, 从这结果, 可以导出周期解  $U(z) = U(z+T)$  的存在性, 这个解可用雅可比椭圆函数  $\text{cn}$  表示, 因而称做椭圆函数 (cnoidal) 波 (例如, 详见惠瑟姆 (1974)).

在下述所有解中, 特别重要的是使  $U$  和它的导数都在  $z \rightarrow \pm\infty$  时趋于零的永久型解  $U(z)$ . 这些解称做孤立波.

为求得孤立波, 我们可在 (1.2.12) 中使  $m=0$ , 在 (1.2.13) 中使  $n=0$ . 于是有

$$U'^2 = U^2(2U+c). \quad (1.2.14)$$

这方程很容易积分, 于是得

$$u(x, t) = U(x-ct) = -\frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct+x_0)\right], \quad (1.2.15)$$

其中  $x_0$  是任意常数. 此外,

$$\operatorname{sech}^2 z = \frac{1}{(\cosh z)^2} = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}. \quad (1.2.16)$$

我们由此可以看到, 当  $z \rightarrow \pm\infty$  时, 孤立波指数式地衰减.

还有两点需要注意:

只有当  $c > 0$  时, 孤立波解才存在. 因此, KdV 方程的任何孤立波都随着时间  $t$  的增长而向右运动.

孤立波的传播速度  $c$  与波的振幅  $(-\frac{1}{2}c)$  成正比. 因此, 较大的孤立波比较小的孤立波运动得快.

### § 1.3 孤立子的行为

因为 KdV 方程是非线性的, 所以孤立波解经任何迭加的结

果都不再是方程的解。看到这一点，或许会使人认为孤立波在 KdV 方程的一般理论中的重要性是很有限的。第一个相反的论断出自于萨布斯基和克鲁斯卡尔(1965)以及萨布斯基(1967)的工作。

让我们将描述孤立波的函数用

$$S(z, c) = -\frac{1}{2} c \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{1}{2} \sqrt{c} z \right] \quad (1.3.1)$$

来表示,并设想下面的实验:

当  $t=0$  时, KdV 方程的解  $u(x, t)$  的值  $u(x, 0)$  由下式给出:

$$u(x, 0) = S(x, c_1) + S(x - X, c_2), \quad (1.3.2)$$

其中  $X > 0$  并且足够大,  $c_1 > c_2$ 。因为孤立波指数式地衰减, 所以在初始时这两个孤立波没有多大干扰。但从  $c_1 > c_2$ , 人们应该预料较大的孤立波势必追上较小的一个。相互碰撞的结果将会怎样呢?

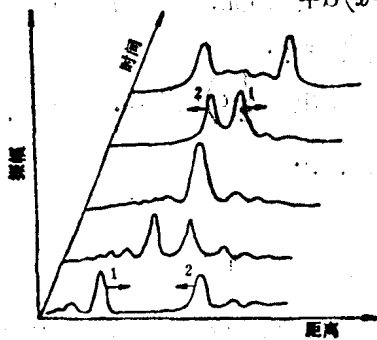
萨布斯基和克鲁斯卡尔通过数值分析的实验, 得到了下面的结果:

当  $t=T>0$  并且足够大时, 有

$$u(x, T) = S(x - c_1 T - \theta_1, c_1) + S(x - c_2 T - \theta_2, c_2), \quad (1.3.3)$$

其中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  是常数。

这样, 两个孤立波在相互碰撞后仍表现为两个形状不变的孤立波, 唯一的影响只是发生了相移  $\theta_1$  和  $\theta_2$ 。(可用附图来表示两个相向运动的孤立波碰撞后仍保持各自的形状和速度——译



者。)因为这两个孤立波相互碰撞后本质不变, 所以克鲁斯卡尔和萨布斯基命名它们为孤立子, 意思是它们具有粒子般的行为. 孤立子这个名词现在已经非常通行, 在数学物理领域内尤其如此. 目前似乎还没有关于孤立子的严格的数学定义, 通常总是在某个特殊问题的范围内用一个公式来给出定义的(例如, 参阅缪拉(1976)第6节).

### §1.4 初值问题 解的存在性和唯一性

设  $u(x, t)$  是

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

的一个解. 博纳和史密斯(1975)证明了, 在  $u_0(x)$  和它的前四阶导数都平方可积的条件下, 经典解是存在的. 关于解的存在性和正则性的进一步结果, 已由田中(1974)和科恩(1979)给出. 在  $t > 0$  时  $u(x, t)$  的正则性质与  $|x| \rightarrow \infty$  时  $u_0(x)$  和它的导数的衰减方式之间, 好象存在一种强关系.  $u_0(x)$  和它的导数衰减得越快,  $t > 0$  时的解  $u(x, t)$  就越光滑. 从科恩(1979)可知, 如果当  $|x| \rightarrow \infty$  时, 对一切  $n$ ,  $u_0(x)$  和它的前四阶导数衰减得比  $|x|^{-n}$  快, 那末当  $t > 0$  时, 解  $u(x, t)$  无穷次可微.

如果解是在一类函数内, 这些函数同它们充分阶的导数都在  $|x| \rightarrow \infty$  时趋于 0, 那末解的唯一性很容易按照拉克斯(1968)的方法得到证明. 这里我们将证明复述如下:

设  $u$  和  $\tilde{u}$  是初值问题(1.4.1)的两个解, 并设

$$w = u - \tilde{u}. \quad (1.4.2)$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 6u u_x - 6\tilde{u} \tilde{u}_x - w_{xxx}. \quad (1.4.3)$$



经简单整理后, 可得关于  $w$  的线性方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 6uw_x + 6\tilde{u}_x w - w_{xxx}. \quad (1.4.4)$$

两边乘上  $w$  后积分, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx &= 6 \int_{-\infty}^{\infty} w w w_x dx + 6 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_x w^2 dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} w w_{xxx} dx. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

如果  $w$ 、 $w_x$  和  $w_{xx}$  在  $|x| \rightarrow \infty$  时趋于零, 容易证明(1.4.5)右边最后一项等于零. 再对(1.4.5)右边第一项进行分部积分, 可得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \tilde{u}_x - \frac{1}{2} u_x \right) w^2 dx. \quad (1.4.6)$$

利用

$$\left| \tilde{u}_x - \frac{1}{2} u_x \right| \leq M, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (1.4.7)$$

可得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx \leq 12M \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx. \quad (1.4.8)$$

从这个微分不等式可推得

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx \leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx \right]_{t=0} e^{12Mt}. \quad (1.4.9)$$

然而, 因为  $u$  和  $\tilde{u}$  都满足问题(1.4.1)的同一初值条件, 由(1.4.2)定义的  $w$  在  $t=0$  时等于零. 因此, 当  $t \geq 0$  时  $w=0$ , 这就证明了初值问题(1.4.1)的解是唯一的.

## §1.5 缪拉变换和修正 KdV 方程

在数学文献中, 有这样一些变换, 通过它们能够从某一线性微分方程的解导出一个有关的非线性方程的解. 下面是一个比较基本的例子: