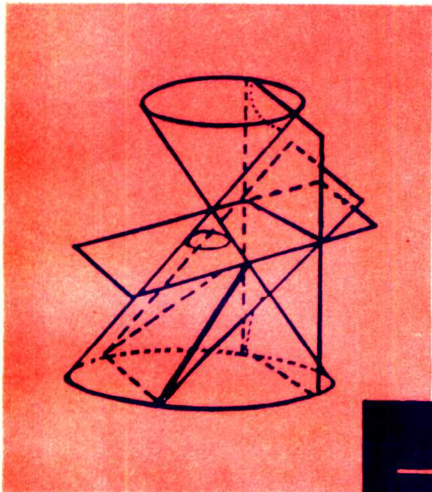
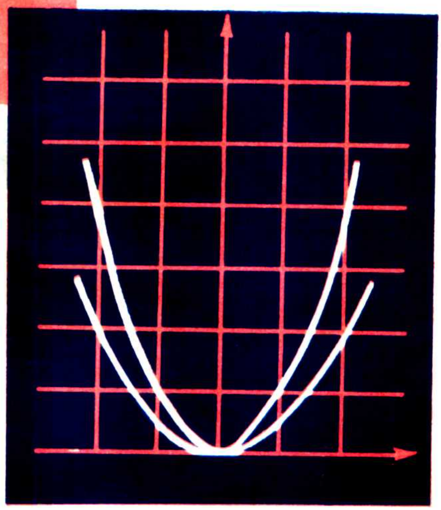
中学数学习题选及解答

钟树编 · 原子能出版社出版





ZHONGXUE SHUXUE XITI XUANJI JIEDA

说　　明

为了给老师们使用《中学数学复习参考资料》（1979 年版）提供方便，我们对其中的部分习题作了解答，由于时间仓促，又限于我们的水平，所以每个题只列出了一种解法，有些解法不一定是最好的，叙述也不够规范，欢迎同志们提出宝贵意见，以便修订时改正。

北京教育学院数学教研室

1979.1

前　　言

为了巩固和提高运用数学基础知识的能力，我们编了这本书。其中包括五部分：前四部分顺次为代数、几何、三角、解析几何方面的习题及解答，最后部分为综合性习题及解答。

本书可供中学数学教师和学习中学数学的同志们参考。对初学的同志，我们建议，使用这本书时，不宜于先看解答部分。最好是根据题目，自己先进行解答。如果确有困难，再参看解答部分，这样学习才会有收获。

由于时间仓促，又限于我们的水平，本书会有不少缺点和错误，欢迎同志们批评指正。

编者

目　　录

一、代数 …………………………………………………… 1
二、几何 …………………………………………………… 48
三、三角 …………………………………………………… 67
四、解析几何 ……………………………………………… 102
五、综合性习题 …………………………………………… 125

一、代　　数

1．下列各数哪些是实数？那些是有理数？那些是整数？并把各实数按由小到大的顺序排出来．

$\mathrm{tg}\frac{5}{6}\pi$、$-3\frac{1}{5}$、$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$、$\mathrm{ctg}90°$、

$\sqrt{49}$、3.1416、$\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$、$\log_8 16$、$\sqrt{3}$、

$\cos\pi$、π、$\lg\sqrt[3]{10}$、$\sqrt{-16}$、$0.1010010001\cdots$、

$\lg 0.01$、$\cos 30°$、$\frac{1}{3}$、$\sqrt[3]{-16}$．

解：是实数的有：$\mathrm{tg}\frac{5}{6}\pi$、$-3\frac{1}{5}$、

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$、$\mathrm{ctg}90°$、$\sqrt{49}$、$3.1416$、$\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$、

$\log_8 16$、$\sqrt{3}$、$\cos\pi$、π、$\lg\sqrt[3]{10}$、

$0.1010010001\cdots$、$\lg 0.01$、$\cos 30°$、$\frac{1}{3}$、$\sqrt[3]{-16}$．

是有理数的有：$-3\frac{1}{5}$、$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$、$\mathrm{ctg}90°$、

$\sqrt{49}$、3.1416、$\log_8 16$、$\cos\pi$、$\lg\sqrt[3]{10}$、

$\lg 0.01$、$\frac{1}{3}$．

是整数的有：$\text{ctg}90^\circ$、$\sqrt{49}$、$\cos\pi$、$\lg 0.01$.

对于实数按由小到大的顺序排列如下：$-3\frac{1}{5}$、$\sqrt[3]{-16}$、$\lg 0.01$、$\cos\pi$、$\text{tg}\frac{5}{6}\pi$、$\text{ctg}90^\circ$、$0.1010010001\cdots$、$\lg\sqrt[3]{10}$、$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$、$\cos 30^\circ$、$\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$、$\log_8 16$、$\sqrt{3}$、$\pi$、$3.1416$、$\sqrt{49}$.

2．计算：（1） $(4.8-3.7)^2-\sqrt[3]{-27}\times(5-1\div 5)\times\left(-\frac{5}{8}\right)$；

（2） $\left\{(0.027)^{-\frac{1}{3}}+\left[0.1^{-1}+(-3)^0\right]\cdot 3^{-1}\right\}\times\left(2\frac{1}{3}\right)$.

解：（1） 原式$=1.21+3\times\frac{24}{5}\times\left(-\frac{5}{8}\right)$

$=1.21-9$

$=-7.79$.

（2） 原式$=\left\{\frac{10}{3}+[10+1]\cdot\frac{1}{3}\right\}\times\frac{7}{3}$

$=\frac{21}{3}\times\frac{7}{3}$

$$=16\frac{1}{3}.$$

3．当$a=-0.2$，$b=0.5$时，求$|a^2b+ab^2|+(a^2b-ab^2)-(|a^2b|-|ab^2|)$的值。

解：$\because a^2b=(-0.2)^2\cdot(0.5)=0.02$，

$ab^2=(-0.2)\cdot(0.5)^2=-0.05$。

$\therefore |a^2b+ab^2|+(a^2b-ab^2)-(|a^2b|-|ab^2|)$

$=|0.02-0.05|+(0.02+0.05)-(0.02-0.05)$

$=\frac{13}{100}$.

4．解方程：（1）$|x-4|+|x-1|=5$；

（2）$|x+1|+|x-2|+3=0$。

解：（1）$|x-4|+|x-1|=5$。

①当$x>4$原方程为：$x-4+x-1=5$，则$x=5$；

②当$1\leqslant x\leqslant 4$时原方程为：$4-x+x-1=5$，无解；

③当$x<1$时原方程为：$4-x+1-x=5$，$x=0$。

所以原方程的解为$x=5$或$x=0$。

（2）$|x+1|+|x-2|+3=0$。

对于任何x的实数值，有

$$|x+1|\geqslant 0,$$

$$|x-2|\geqslant 0.$$

显然　$|x+1|$和$|x-2|$不能同时为0，于是有　$|x+1|+|x-2|+3>0$。

因此原方程

$$|x+1|+|x-2|+3=0$$

无解。

5．分解下列各因式：

（1） $x^{2m}+\frac{1}{2}x^m+\frac{1}{16}$；　（2） $x^6+x^4+x^2$；

（3） $x^4+x^2-2ax+1-a^2$；

（4） $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-10$；

（5） $bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-ac^2-b^2c$；

（6） x^3+4x^2-5；　（7） x^3+x+30；

（8） $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$；

（9） $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$；

（10） $2x^2+xy-3y^2-x-4y-1$．

解：（1）原式 $=(x^m)^2+2(x^m)\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$=\left(x^m+\frac{1}{4}\right)^2;$$

（2）原式 $=x^2(x^4+x^2+1)=x^2(x^4+2x^2+1-x^2)$

$$=x^2(x^2+x+1)(x^2-x+1);$$

（3）原式 $=x^4+2x^2+1-x^2-2ax-a^2$

$$=(x^2+1)^2-(x+a)^2$$

$$=(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1);$$

（4）原式 $=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$

$$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1);$$

（5）原式 $=(ab^2-a^2b)-(c^2a-c^2b)+(ca^2-cb^2)$

$$=ab(b-a)-c^2(a-b)+c(a+b)(a-b)$$

$$=-(a-b)[c^2-c(a+b)+ab]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a);$$

（6）原式 $=x^3-x^2+5x^2-5=x^2(x-1)$

$$+5(x+1)(x-1)$$

$$=(x-1)(x^2+5x+5);$$

（7）原式$=x^3+27+x+3$

$$=(x+3)(x^2-3x+9)+(x+3)$$

$$=(x+3)(x^2-3x+10);$$

（8）原式$=(x+4y)(x-2y)+2x+14y-3$.

解法一：设原式分解为$(x+4y+m)(x-2y+n)$，

展开可得

$x^2+2xy-8y^2+(m+n)x+(4n-2m)y-3$.依多项式恒等的条件，可得

$$\begin{cases} m+n=2, \\ 4n-2m=14. \end{cases}$$

解得 $n=3$，

$m=1$.

$\therefore\ x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=(x+4y-1)(x-2y+3)$.

解法二：应用十字相乘法，

$$\begin{array}{lr} (x+4y) & -1 \\ (x-2y) & +3 \end{array}$$

$\therefore$ 原式$=(x+4y-1)(x-2y+3)$.

（9）$x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$

解：原式$=(x-5y)(x-3y)+2x-4y-3$

$$=(x-5y+3)(x-3y-1).$$

（10）$2x^2+xy-3y^2-x-4y-1$.

解：原式$=(2x+3y)(x-y)-x-4y-1$

$$=(2x+3y+1)(x-y-1).$$

6．化简下列各式：

（1）$\dfrac{a^3-27b^3}{a+2b}\times\dfrac{a-2b}{a^2+3ab+9b^2}\div\dfrac{a^2-5ab+6b^2}{a^2+2ab}$；

(2) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$;

(3) $(yz+zx+xy)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

$-xyz\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right)$;

(4) $\left[\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$

$\div\dfrac{1-2x+x^2-2x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$;

(5) $\dfrac{a^4-2b^4}{a-b}(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}-\left(-\dfrac{b^4(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)$

$-(a^2+b^2)(a+b)\sqrt{a^2-b^2}$;

(6) $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\cdot\left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\cdot\left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$;

(7) $\sqrt{4a^2-12a+9}-\sqrt{1+4a+4a^2}\left(a<-\dfrac{1}{2}\right)$;

(8) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$

$(0<a<b)$.

解：(1) 原式$=\dfrac{(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)}{a+2b}\times\dfrac{a-2b}{a^2+3ab+9b^2}$

$\times\dfrac{a(a+2b)}{(a-2b)(a-3b)}=a$.

(2) 原式$=\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a-b+c)}$

$$+\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}$$

$$+\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}$$

$$=\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{-a+b+c}{a+b+c}+\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1.$$

（3）原式$=(yz+zx+xy)\left(\frac{yz+xz+xy}{xyz}\right)$

$$-\frac{xyz(y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{(yz+zx+xy)^2}{xyz}-\frac{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}{xyz}$$

$$=\frac{1}{xyz}(2xyz^2+2xy^2z+2x^2zy)$$

$$=2(x+y+z).$$

（4）原式$=\frac{1}{x^3-1}[(x-1)^2-(1-3x+x^2)$

$$-(x^2+x+1)]\div\frac{(1+x^2)(1-2x)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{-(x^2+1)}{x^3-1}\cdot\frac{(x^2+x+1)(x+1)}{(x^2+1)(1-2x)}$$

$$=\frac{x+1}{(x-1)(2x-1)}.$$

（5）原式$=\dfrac{(a^4-2b^4)(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}+b^4(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a-b}$

$-\dfrac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}{a-b}$

$=\dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(a^4-b^4-a^4+b^4)}{a-b}$

$=0$。

（6）原式$=x^{\frac{b+c}{c-a}\cdot\frac{1}{a-b}+\frac{a+c}{a-b}\cdot\frac{1}{b-c}+\frac{a+b}{b-c}\cdot\frac{1}{c-a}}$

$\because\ \dfrac{b+c}{c-a}\cdot\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{a+c}{a-b}\cdot\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{a+b}{b-c}\cdot\dfrac{1}{c-a}$

$=\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}[(b+c)(b-c)+(a+c)(c-a)$

$+(a+b)(a-b)]=0$

$\therefore$ 原式$=1$.

（7）原式$=\sqrt{(2a-3)^2}-\sqrt{(1+2a)^2}$

$\because\ a<-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\sqrt{(2a-3)^2}=-(2a-3)$，

$\sqrt{(1+2a)^2}=-(1+2a)$，

$\therefore\ \sqrt{4a^2-12a+9}-\sqrt{1+4a+4a^2}=4$.

（8）原式$=\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}$.

$\cdot\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}$

$=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$

$=\sqrt{(a-b)^2}$

$=b-a$.

7. 计算下列各式：

（1）$\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$；

（2）$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$；

（3）$\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg 8-\lg\sqrt{1000}}{\lg 1.2}$；

（4）$\dfrac{\lg 2+\lg 3}{\frac{1}{4}\lg 16+\sqrt{(\lg 1-\lg 10)^2}+\frac{1}{2}\lg 0.09}$.

解：（1）原式$=\left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+100+\left(\dfrac{64}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$$=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}$$

$$=102\frac{11}{48}.$$

（2）原式$=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}=3$.

（3）原式$=\dfrac{\lg 27^{\frac{1}{2}}+\lg 8-\lg 1000^{\frac{1}{2}}}{\lg 12-\lg 10}$

$$=\frac{\frac{3}{2}\lg 3+3\lg 2-\frac{3}{2}}{\lg 3+2\lg 2-1}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

（4）原式$=\dfrac{\lg 2+\lg 3}{\lg 2+1+\frac{1}{2}(2\lg 3-2)}$

$$=\frac{\lg 2+\lg 3}{\lg 2+\lg 3}$$

$$=1.$$

8．已知：$2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，求$x:y$的值。

解：由原式可得　$(x-2y)^2=xy$，

即　$x^2-5xy+4y^2=0$。

解得　$x=4y$，$x=y$。

∴　$x:y=4$或$x:y=1$。

9．m是什么实数时，$(m^2-3m+m^2i)-[(5m+6)i+4]$是（1）实数；（2）纯虚数；（3）等于零。

解：由已知得$m^2-3m-4+(m^2-5m-6)i$。　①

（1）当$m^2-5m-6=0$时，①式的值为实数∴$m=6$，或$m=-1$；

（2）当$m^2-3m-4=0$且$m^2-5m-6\neq0$时，①式的值为纯虚数，∴$m=4$；

（3）当$m^2-3m-4=0$且$m^2-5m-6=0$时，①式的值为零，∴$m=-1$。

10．试以复数的三角函数式表示：

（1）$i-1$；（2）$-3+4i$；（3）$\sin54°+i\cos54°$；

（4）$\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi$。

解：（1）$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \therefore\theta\text{的主值是}\frac{3}{4}\pi.$$

∴ $i-1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$；

（2）解得$5(\cos126°52' + i\sin126°52')$；

（3）解得$\cos36° + i\sin36°$；

（4）解得 $\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi$。

11．已知$|z-2| = \sqrt{11}$且$4 = |z-3|$，求复数z。

解：设$z = a + bi$，由已知可得

$$\sqrt{(a-2)^2 + b^2} = \sqrt{11}；\ \sqrt{(a-3)^2 + b^2} = 4.$$

解方程组得 $a = 0$，$b = \pm\sqrt{7}$，

$\therefore$ $z = \pm\sqrt{7}\,i$．

12．求复平面的原点到点$\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$的距离．

解：所求距离就是$|\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i|$，

$$|\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.$$

13．设$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$，求证$x^m + \frac{1}{x^m} = 2\cos m\theta$。

m是整数

解：由已知可得 $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$。

解方程得 $x = \cos\theta \pm i\sin\theta$。

将x代入等式左边得

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^m + \frac{1}{(\cos\theta \pm i\sin\theta)^m}$$

$$= (\cos m\theta \pm i\sin m\theta) + \frac{1}{\cos m\theta \pm i\sin m\theta}$$

$$= \cos m\theta \pm i\sin m\theta + (\cos m\theta \mp i\sin m\theta)$$

$$= 2\cos m\theta.$$

14．解下列各方程：

(1) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{3}$;

(2) $\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}=1+\frac{2}{x-2}$;

(3) $\frac{4x^2+2x}{x^2+6}+\frac{x^2+6}{2x^2+x}-3=0$;

(4) $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$;

(5) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$;

(6) $2x^3-3x^2-3x+2=0$;

(7) $x^3+4x^2-4x-16=0$;

(8) $x^3+x+2=0$;

(9) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$;

(10) $(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1$;

(11) $\sqrt{x+15}=\sqrt{x}+\sqrt{5}$;

(12) $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{3x-2}}=\frac{10}{3}$;

(13) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}-\sqrt{5x+4}=0$;

(14) $3x^2-6x-2\sqrt{x^2-2x+4}+4=0$;

(15) $81\times 6^{2x}=16\times 3^{x+8}\times 2^x$;

(16) $5^{1+\operatorname{tg}x}-5^{1-\operatorname{tg}x}=24$;

(17) $a\cdot a^3\cdot a^5\cdots\cdots a^{2x-1}=b$（$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$x$是正整数）；

(18) $\lg(2x^2-5x+2)+\lg(3x^2+x-2)$
$-\lg(x^2-x-2)=0$;

(19) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

(20) $2\log_x 25-3\log_{25}x=1$;

解：（1）方程两边乘以 $3(x^2-1)$ 得

$$3(x+1)^2+3(x-1)^2=10(x^2-1).$$

解得 $x=\pm 2$.

检验可知 $x=\pm 2$ 是原方程的根.

（2）方程两边乘以 x^2-4 得

$$x-2+4x=x^2-4+2(x+2),$$

即 $x^2-3x+2=0$.

解得 $x=2$ 或 $x=1$.

检验可知 $x=2$ 是增根；$x=1$ 是原方程的根.

（3）设 $y=\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}$，则原方程为

$$2y+\frac{1}{y}-3=0.$$

两边乘 y 得 $2y^2-3y+1=0$.

解得 $y=\dfrac{1}{2}$ 或 $y=1$.

解 $\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}=\dfrac{1}{2}$,

得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{3}$.

解 $\dfrac{2x^2+x}{x^2+6}=1$,

得 $x=-3$，或 $x=2$.