概率论与数理统计

大学数学

主编 李林曙 施光燕

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

大学数学

概率论与数理统计

主编　李林曙
施光燕

中央广播电视大学出版社

北京·2002

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/李林曙，施光燕主编．—北京：中央广播电视大学出版社，2002.8

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

ISBN 7-304-02248-5

Ⅰ．概… Ⅱ．①李…②施… Ⅲ．①概率论—电视大学—教材②数理统计—电视大学—教材 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 058644 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

大 学 数 学

概率论与数理统计

主编　李林曙　施光燕

出版·发行/ 中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京集惠印刷有限公司

开本/ 850×1168　1/32　**印张**/8.125　**字数**/197 千字

版本/ 2002 年 7 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷

印数/ 0001— 17000

社址/ 北京市复兴门内大街 160 号　**邮编**/100031

电话/ 66419791　68519502　**（本书如有缺页或倒装，本社负责退换）**

书号：ISBN 7-304-02248-5/O·120

定价：12.00 元

前　言

《大学数学》这套文字教材是中央电大基础课改造工程中“数学课程整合”教学改革的阶段性成果.

我们知道，大学数学课程的改革是高校教学改革的重点，特别是在大学数学如何满足不同规格层次、不同专业科类的需要的改革上，更加困难. 随着中央电大人才培养模式改革和开放教育试点的开展，电大专科和专科起点本科的理工、文经类专业相继开出，中央电大数学课程的教学改革同样成为十分重要和紧迫的工作. 为配合试点工作，深化以人才培养模式改革为核心、以教学内容和课程体系改革为重点的教学改革，中央电大从 1999 年起，与试点工作同步启动了中央电大基础课改革工程，“数学课程整合”便是其中的一个重点项目.

为搞好大学数学课程的建设，项目组经过较长时间的调研和教学实验，确定了“科学性、应用性、开放性；模块化、信息化、一体化”的课程建设和改革原则.

①科学性：通过数学大师和数学教育家的联合把关，确保数学课程教学内容的准确无误，并在此基础上，充分考虑各类大学生在数学基本素养和能力的培养上应有的要求，以调整和改革人才培养的知识、能力和素质结构.

②应用性：坚持“必需、够用”的原则，在保证学生数学基本素养和后续课程需要的前提下，强调数学方法的掌握、计算能力的培养和数学建模的训练，注重数学在各有关学科、特别是在社会经济生活和工作实际中应用，注重典型例子的选取和案例教学，全方位提高学生的数学实践和应用能力，以实现电大应用性人才的培养目标.

③开放性：教学内容的可选择性是远程开放教育的重要特征. 本教材在教学内容的选择上，力求在尽可能大的范围内适应不同类别、不同专业、不同层次和不同水平学生的需要. 既考虑电大内部各类学生的需要，也考虑社会各种办学形式的需要；既考虑当前专业教学之急需，也考虑学科发展与学生未来知识更新、拓宽视野的需要. 在教学内容的选择、阐述和教学媒体的设计等方面留有充分的开口和接口.

④模块化：为体现“科学性、应用性、开放性”的原则，在内容的选择上，将大学数学基本内容按照多元函数微积分、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组、二次型）、概率论与数理统计（概率论、数理统计）三大部分进行模块化设计、编排，使这套教材具有更好的模块组合能力、更大的可选择性和更广泛的适应性. 按照教学计划，这些模块的具体安排如下：

经济管理类（专科起点本科）：多元函数微积分、线性代数、概率论与数理统计.

工科水利水电工程专业（专科）：高等数学（2）、概率论与数理统计.

计算机数学基础（A）（工科计算机应用专业（专科））：多元函数微积分（多元函数微分、多元函数积分）、线性代数（行列式、矩阵、线性方程组）、概率论与数理统计（概率论、数理

统计).

工科土木工程专业(本科):线性代数(行列式、矩阵、线性方程组、二次型)、概率论与数理统计(概率论、数理统计).

⑤信息化:充分应用现代信息技术和教育技术进行本课程的设计和开发.根据课程目标要求和各模块特点,发挥现代远程教育媒体手段的教学功能和技术实现优势,采用文字、音像、CAI课件、计算机网络等多种教学媒体和手段实施课程教学,使本课程教学媒体更为丰富、教学方式和方法更为灵活、学生的学习更具自主性.

⑥一体化:按照现代教育理论和教学设计思想,对课程选择的多种教学媒体进行优化设计,使各种不同的教学媒体根据其不同的教学功能和特点,在远程教学中发挥出应有的作用,力争达到各媒体间密切配合、优势互补、导学、助学、整体化、一体化的优良教学效果.

按照上述原则,在众多专家直接指导下,课程组做了大量工作.《线性代数》由大连理工大学施光燕教授编写第1,4章,中央电大李林曙教授编写第3章、赵坚副教授编写第2章,《概率论与数理统计》由中央电大顾静相副教授编写第1章、陈卫宏副教授编写第2章、张旭红副教授编写第3章,《多元函数微积分》由中央电大周永胜编写,大连理工大学施光燕教授、中央电大李林曙教授担任本套教材的主编,首都师范大学石生明教授担任主审.赵坚副教授和张旭红副教授协助主编分别在《多元函数微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》的统稿中做了大量工作.

在此,特别感谢主审专家石生明教授和审定专家:北京师范大学杨文礼教授、北京大学姚孟臣副教授,他们在教材编写过程

中，自始至终给予了认真、细致的指导，提出了许多宝贵意见；中央电大出版社何勇军副编审也为本书的编辑出版付出了不少心血，特别是在本书的版式工艺教学设计上提出了许多很好的建议，在此一并表示感谢.

教学改革需要各位同学、老师和读者的共同参与，我们的工作一定有不尽如人意的地方，我们真诚地期待大家的使用反馈意见，以便再版时及时改进，切实推进以人才培养模式改革为核心、教学内容和课程体系改革为重点的教学改革.

数学课程整合项目组

2002 年 7 月

目 录

第 1 章　随机事件与概率

学习目标

1. 了解随机事件、频率、概率等概念.
2. 掌握随机事件的运算，掌握概率的基本性质.
3. 了解古典概型的条件，会求解较简单的古典概型问题.
4. 熟练掌握概率的加法公式和乘法公式，掌握条件概率和全概公式.
5. 理解事件独立性概念.
6. 掌握二项概型.

概率论和数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科. 本章主要介绍随机事件和概率的一些基本知识，研究事件的关系和运算、概率的性质及其在不同情况下的计算方法，最后将讨论随机事件独立性和伯努利概型等内容.

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象与随机事件

客观世界中存在多种多样的现象，这些现象大体可以分为两类. 一类是**确定性现象**，即在一定的条件下必然会发生或必然不发生的现象. 例如，向上抛一石子必然下落；在一个标准大气压下，纯净水加热到100℃时必然会沸腾；在一批合格的产品中任取一件必然不是废品等. 另一类是**随机现象**，即在同样的条件下进行一系列重复试验或观测，每次出现的结果并不完全一样，而且在每次试验或观测前无法预料确切的结果，其结果呈现出不确定性. 例如，向上抛掷一枚均匀硬币，落下后可能是正面朝上，也可能是反面朝上；用同一门炮向同一目标射击，各次的弹着点不尽相同；抽样检验产品质量的结果等.

人们经过长期实践并深入研究之后，发现随机现象虽然就每次试验或观察结果来说，具有不确定性，但在大量重复试验或观察下它的结果却呈现出某种规律性. 例如，多次抛掷一枚均匀的硬币得到正面向上的次数大约是总抛掷次数的半数；多次掷一颗匀称的骰子，3 点出现的次数大约是总掷次数的 1/6；一门炮多次射击同一目标的弹着点按照一定规律分布等等. 这种在大量重复试验或观测下，其结果所呈现出的固有规律性，我们称为随机现象的**统计规律性**.

为了研究随机现象的统计规律性而进行的各种试验或观察统称为**随机试验**，简称**试验**，通常用字母 E 表示. 例如：

E_1：抛掷一枚均匀的硬币，观察它正、反面出现的情况；

E_2：对某一目标进行连续射击，直到击中目标为止，记录射击次数；

E_3：某车站每隔5分钟有一辆汽车到站，乘客对汽车到站的时间不知道，观察乘客候车时间.

上述例子中，试验 E_1 只有两种可能的结果，出现正面或出现反面，但在抛掷之前不能确定出现的是哪一面．试验 E_2 射击次数可以为1，2，…，即试验的结果是全体正整数，在击中目标前需要射击多少次是不能事先确定的．试验 E_3 汽车到站的间隔5分钟，在这5分钟内究竟是哪一时刻到站是不确定的，因此乘客候车时间是0～5之间的某一时刻．尽管这些试验结果的情况不一样，但它们都具有下面三个特点：

1．在相同的条件下可以重复进行；

2．有多种可能结果，但是试验前不能确定会出现哪种结果；

3．知道试验可能出现的所有结果.

在随机试验中，每一个可能发生的不再分解的基本结果称为该试验的**基本事件**或**样本点**，用 ω 表示；而由全体基本事件组成的集合称为**样本空间**，通常用 U 表示．例如，上述试验 E_1 的样本空间由两个样本点组成，即 $U=\{正面,反面\}$；试验 E_2 的样本空间由可列个样本点组成，即 $U=\{1,2,3,\cdots\}$；而试验 E_3 的样本空间为 $U=[0,5]$.

一般地，我们把试验 E 的样本空间 U 的子集称为 E 的**随机事件**，简称为**事件**．通常用英文大写字母 A，B，C，…表示事件．在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生．由于样本空间 U 是它自身的一个子集，在每次试验中一定有它的某个样本点发生，因此把样本空间 U 称为

必然事件. 空集 $\varnothing$ 是样本空间 U 的子集，显然它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

随机事件具有以下特点：

1. 在一次试验中是否发生是不确定的，即随机性；

2. 在相同的条件下重复试验时，发生可能性的大小是确定的，即统计规律性.

例 1 设试验 E 为掷一颗骰子，观察其出现的点数.

在这个试验中记$A_n=\{$出现点数 $n\}$, $n=1,2,3,4,5,6$. 显然，A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 都是基本事件. 如果记 $B=\{$出现被 3 整除的点$\}=\{3,6\}$, $C=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$, 则 B, C 都是随机事件. 如果记$\{$出现小于 7 的点数$\}=U$, 则它就是必然事件; 如果记$\{$出现大于 7 的点数$\}=\varnothing$, 则它就是不可能事件.

例 2 设10件同一种产品中有8件正品，2 件次品，现任意抽取 3 件，记录抽取结果.

在这个试验中记$A=\{3$ 件都是正品$\}$，记$B=\{$至少 1 件是次品$\}$，则它们都是随机事件；而$\{3$ 件都是次品$\}=\varnothing$ 是不可能事件，$\{$至少 1 件是正品$\}=U$ 则是必然事件.

例 3 盒子中有红、白、黄三个球，现随机取出2个，记录取出的结果.

在这个试验中，如果不考虑取出的顺序，则可能的结果是下列 3 种情况之一：

$$\{1\text{ 红 }1\text{ 白}\},\{1\text{ 白 }1\text{ 黄}\},\{1\text{ 黄 }1\text{ 红}\}$$

如果考虑取出的顺序，则结果可能是下列 6 种情况之一：

$$\{\text{红},\text{白}\},\{\text{白},\text{红}\},\{\text{白},\text{黄}\},\{\text{黄},\text{白}\},\{\text{黄},\text{红}\},\{\text{红},\text{黄}\}$$

注意：这里 {红，白} 和 {白，红} 是两个事件，当不考虑取出的顺序时，{1 红 1 白} 恰是由这两个事件组成的.

显然，{两球同色} = ∅ 是不可能事件，而{两球异色} = U 是必然事件.

1.1.2　事件间的关系和运算

在研究随机试验时，常常会涉及许多事件，而这些事件之间往往是有关系的. 了解事件间的相互关系，便于我们通过对简单事件的了解，去研究与其有关的较复杂的事件的规律，这一点在研究随机现象的规律性上是十分重要的.

关于事件间的关系和运算，为了直观起见，我们结合下面的试验来说明：向平面上某一矩形区域 U 内随机掷一点，观察落点的位置. 假设试验的每一结果对应矩形内的一个点，所有的基本事件对应矩形内的全部点.

1. 事件的包含与相等

设事件 A = {点落在小圆内}，事件 B = {点落在大圆内}，如图1-1. 显然，若所掷的点落在小圆内，则该点必落在大圆内，也就是说，若 A 发生，则 B 一定发生.

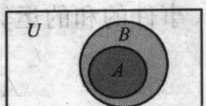

图 1-1

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则说 **B 包含 A**，或说 **A 包含于 B**，记作 $A \subset B$.

如果 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

例 4　一批产品中有合格品与不合格品，合格品中有一、二、三等品，从中随机抽取一件，是合格品记作 A，是一等品记作 B，显然 B 发生时 A 一定发生，因此 $B \subset A$.

2. 事件的和

设事件$A=\{$点落在小圆内$\}$，事件$B=\{$点落在大圆内$\}$，大圆和小圆的位置关系如图 1-2．考虑事件 $\{$点落在阴影部分内$\}$．显然，只要点落在小圆或大圆之内，点就落在阴影部分内．

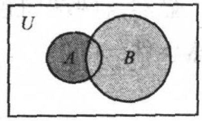

图 1-2

两个事件 A 与 B 至少有一个发生是一个事件，称为事件 A 与 B 的**和**，记作 $A+B$．

例 5 在1种产品中，有8个正品，2 个次品，从中任意取出 2 个，记$A_1=\{$恰有 1 个次品$\}$，$A_2=\{$恰有 2 个次品$\}$，$B=\{$至少有 1 个次品$\}$，则 $\{$至少有 1 个次品$\}$ 的含义就是所取出的 2 个产品中，或者是 $\{$恰有 1 个次品$\}$，或者是 $\{$恰有 2 个次品$\}$，二者必有其一发生，因此 $B=A_1+A_2$．

根据事件的和的定义可知，$A+U=U$，$A+\varnothing=A$．

事件的和的运算可以推广到多个事件的情况．我们用

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$$

表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生；进而用

$$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}A_i$$

表示 $A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$ 中至少有一个事件发生．

3．事件的积

设事件$A=\{$点落在小圆内$\}$，事件$B=\{$点落在大圆内$\}$，大圆和小圆的位置关系如图 1-3．考虑事件 $\{$点落在两圆的公共部分内$\}$．显然，只有点落在小圆内而且点也落在大圆内，才有点落在两圆的公共部分内．

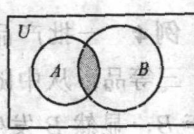

图 1-3

两个事件 A 与 B 同时发生也是一个事件，称为事件 A 与 B 的**积**，记作 AB.

例 6 设 $A=\{$甲厂生产的产品$\}$，$B=\{$合格品$\}$，$C=\{$甲厂生产的合格品$\}$，则

$$C = AB$$

根据事件的积的定义可知，对任一事件 A，有 $AU=A$，$A\varnothing=\varnothing$.

事件的积的运算可以推广到多个事件的情况. 我们用

$$A_1A_2\cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件. 进而用

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件.

4. 事件的差

如图 1-4，设事件 $A=\{$点落在小圆内$\}$，事件 $B=\{$点落在大圆内$\}$，考虑事件 $\{$点落在阴影部分内$\}$. 显然，只有点落在小圆内而且点不落在大圆内，才有点落在阴影部分内.

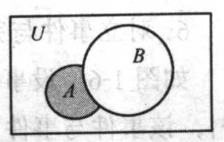

图 1-4

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**，记作 $A-B$.

例 7 已知条件同例6，设 $D=\{$甲厂生产的次品$\}$，则 D 就是“甲厂生产的产品”与“合格品”两个事件的差，即

$$D = A - B$$

5. 互不相容事件

如图 1-5，设事件$A=\{$点落在小圆内$\}$，事件$B=\{$点落在大圆内$\}$，显然，点不能同时落在两个圆内.

事件 A 与B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与B **互不相容**，或称 A 与B 是**互斥**的. 如果对任意的 $i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都有 $A_iA_j=\varnothing$，则称 n 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的，则称这 n 个事件是互不相容的.

显然，同一试验中的各个基本事件是两两互不相容的.

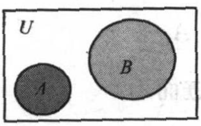

图 1-5

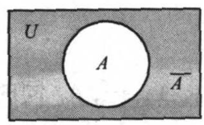

图 1-6

例 8 掷一颗骰子，令 A 表示“出偶数点”，B 表示“出奇数点”，则事件 A，B 是互不相容的，即 $AB=\varnothing$.

6. 对立事件与完备事件组

如图 1-6，设事件$A=\{$点落在圆内$\}$，考虑事件 $\{$点落在圆外$\}$，该事件与事件 A 不能同时发生，而两者又必发生其一.

事件 A 不发生，即事件“非 A”，称为事件 A 的**对立事件**，或称为 A 的**逆事件**，记作$\overline{A}$.

注意：对立事件与互不相容事件是不同的两个概念，对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件. 例如，事件 $\{$射中 10 环$\}$ 与 $\{$射中 9 环$\}$ 是互不相容事件的，但不是对立事件的. 因为不能说 $\{$没有射中 10 环$\}$ 就是 $\{$射中 9 环$\}$，$\{$射中 10 环$\}$ 的对立事件是 $\{$没有射中 10 环$\}$.

若 n 个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，并且它们的和是