$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

中学数学辅导丛书

矩阵和线性方程组

吕庆祝 编

黑龙江科学技术出版社

Juzhen He Xianxing Fangchengzu

吕庆祝　编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

文

责任编辑：张宪臣

封面设计：仁　之

矩阵和线性方程组

吕庆祝　编

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32·印张·字数60千

1984年8月第一版·1984年8月第一次印刷

印数：1—46,000

书号：13217·101　　定价：0.41元

前　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲(草案)》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容。为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们组织编写了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩阵和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免，敬请读者提出宝贵意见，以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛　棠　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

目　　录

一、引　言

在中学数学课本里，我们常常遇到下面形状的方程组：

$$\begin{cases}2x+3y=2\\3x-y=1\end{cases}$$

在解决数学和工程技术问题时，也经常要求解这样的方程组。

关于这类方程及其解法的问题，我国古代数学家已有研究，并做出了伟大的贡献。关于多元一次方程组的概念和列出算式，在我国古代著名的数学典籍《九章算术》中就有记载。它不但给出了解一次方程组的普遍方法——消元法，而且建立了正数和负数的相反意义，以及加、减法则。这在世界数学史上具有十分重要的意义。

《九章算术》成书，据考证，约在公元50年至100年间。其后经多人修订和注释而流传至今。魏末晋初的数学家刘徽曾为《九章算术》作过重要的"注"。他说："程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。"* 这里所说的"令每行为率"是指列出等式；"如物数程之"是指有几个未知数列出几个等式。当用算筹表示各项系数时，"方

---

*参见钱宝琮主编《中国数学史》。

程"就摆成一个矩形阵的形状，所以称为方程。由此可见，《九章算术》中"方程"一词，就是我们今天所说的一次方程组。

《九章算术》中专设一章《方程》，讲述方程组的解法。现在让我们来看一下《九章算术》中《方程》章的第一题：

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

这里"上、中、下禾"是说上等，中等和下等带穗的谷棵；"秉"是指捆，"实"是颗粒。

在今天看来，这道题是一个很典型的用列方程组来解的应用题。如果设上、中、下禾各一秉的实的斗数分别为 x、y、z，那么，上面的问题就是解下面的三元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & (1) \\ 2x+3y+z=34 & (2) \\ x+2y+3z=26 & (3) \end{cases}$$

用加减消元法或代入消元法，我们可以很容易地得到这个方程组的解：

$$x=9\frac{1}{4},\ y=4\frac{1}{4},\ z=2\frac{3}{4}$$

远在我国古代，就已经应用加减消元法和代入消元法解多元一次方程组了。在《九章算术》中，还进一步运用了分离系数法。我们今天广泛使用的消元法，实际上就是《九章算术》中所介绍的"方程术"的进一步发展和完善。以上面的方程组为例，我们来看一看我国古代数学家是怎样解方程组的。

在《九章算术》中，这个方程组，经分离系数，并用算筹

摆成如下形式：

	左行	中行	右行
上禾	𝍠	𝍡	𝍢
中禾	𝍡	𝍢	𝍡
下禾	𝍢	𝍠	𝍠
实	𝍫𝍥	𝍬𝍣	𝍬𝍨
	(3)	(2)	(1)

按照我国古代的记数方法和自右至左、自上而下的书写方式，上表中右行下用算筹表示的数即上面方程组中第一个方程(1) 的分离系数后的形式，中行和左行下的数是方程(2)和(3) 的分离系数后的形式。在今天，这个表可以写成下面的矩阵形式：

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}
\end{array}
$$

用矩阵表示一个方程组，然后用消元法来求得方程组的解，这就是《九章算术》中的所谓“方程术”。后面我们将要看到，把一个一次方程组经分离系数以后，对所得到的系数矩形表进行种种变形，是解一次方程组的一种极为方便的途径，而这正是我国的伟大数学家为我们开辟出来的。特别是当方程组的未知数的个数比较多时，解方程组的过程变成形式的和机械的计算。

这本小册子就是要介绍矩阵的初步知识。并用矩阵作工具，介绍一次方程组（也叫线性方程组）的一般解法。

二、线性方程组的解法

中学数学中所遇到的方程组，大多数是方程的个数与未知数的个数相同。如果方程组中的每一个方程都是一次的，我们就把这个方程组叫做**线性方程组**。含有 n 个未知数和 n 个方程的线性方程组具有下面的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

式中 n 是一个正整数；x_1、$x_2, \cdots, x_n$ 是不同的未知数；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,n,\ \ j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组的第 i 个方程中未知数 x_j 的系数。

例如，在上一节所提到的方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

就是一般形式(1)的一个特殊形式，其中 $n=2$，x_1 和 x_2 写成 x 和 y，而 $a_{11}=2$，$a_{12}=3, b_1=2$；$a_{21}=3$，$a_{22}=-1$，$b_2=1$。

但是，无论在实际问题中还是在理论上，我们还常常遇到未知数的个数和方程的个数不相等的线性方程组。例如，坐标平面内的一条已知直线的方程就可以看作是有两个未知数和一个方程的方程组；在讨论坐标平面内三条已知直线是

否相交于一点的问题时，实际上，就是解由三个二元方程组成的线性方程组。

我们将要讨论的方程组具有下面的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

这里未知数的个数 n 和方程的个数 m 可以是任意正整数。$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 叫做方程组的常数项。当 $n = m$ 时，方程组(2)即转化为(1)，为了研究方便，我们通常把形状如(2)的方程组叫做含有 n 个未知数和 m 个方程的线性方程组。

对于任意的一个线性方程组，我们主要关心的是它的解。所谓方程组(2) 的一个解，是指由 n 个数组成的一个有顺序的数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，使得当(2)中的未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 依次取这些数值时，方程组(2) 中的每个方程都变成两边的数是相同的等式，即对于每个 i，$1 \leqslant i \leqslant m$，都有

$$a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + \cdots + a_{in}a_n = b_i$$

方程组(2)的解$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，也可以写成

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n \end{cases}$$

方程组(2) 的解的这种形式，也可以看作是一个最简单的线性方程组。例如，方程组

$$\begin{cases}2x+3y=2\\3x-y=1\end{cases}$$

的一个解是$\left(\frac{5}{11},\ \frac{4}{11}\right)$。这个解也可以写成最简单线性方程组的形式

$$\begin{cases}x=\dfrac{5}{11}\\[2ex]y=\dfrac{4}{11}\end{cases}$$

求出一个给定方程组的全部解或证明它没有解的过程，叫做**解方程组**。解方程组的方法，由于给定方程组的特殊性，可能是各式各样的。我们通常采用的方法，尤其对于线性方程组特别有效的方法是：将方程组中的一个或几个方程改变形状，从而得到一个新的较容易解出的方程组，而这个方程组与原方程组有完全相同的解。

如果方程组甲和方程组乙有完全相同的解，也就是说甲的每一个解都是乙的解，而乙的每一个解也都是甲的解，那么我们称方程组甲和方程组乙是同解的方程组。显然，同解的两个方程组有相同的解的集合；并且方程组的同解关系是可传递的，也就是，如果方程组甲与方程组乙同解，方程组乙与方程组丙同解，那么方程组甲与方程组丙也是同解的。

在解线性方程组时，常常使用以下的变换：

1)将两个方程对换；

2)将一个方程的两边用一个非零数去乘；

3)将一个方程的常数倍加到另一个方程上去。

对一个给定的线性方程组施行上述三种变换之一，可以

得到一个新的线性方程组．这三种变换中的每一个变换叫做线性方程组的初等变换．下面我们证明，经初等变换所得到的线性方程组与原方程组同解．这个结论也可表述为：初等变换保持线性方程组的同解性．

这个结论对于第1种和第2种初等变换，显然是对的．我们来证明这个结论对于第3种初等变换也是对的．假设将线性方程组(2)的第i个方程的a倍加到第j个方程上去$(i \neq j)$，于是得到新的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{j1} + aa_{i1})x_1 + (a_{j2} + aa_{i2} +)x_2 + \cdots \\ \quad + (a_{jn} + aa_{in})x_n = b_j + ab_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3}$$

我们证明线性方程组(2)和(3)同解．(2)与(3)的区别只在于第j个方程．设$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是(2)的任意一个解，因此它满足方程组(2)，特别是它满足(2)的第i和第j个方程，即有等式

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

和

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

将前一等式的a倍加到后一等式上去，便得等式

$$(a_{j1} + aa_{i1})\alpha_1 + (a_{j2} + aa_{i2})\alpha_2 + \cdots + (a_{jn} + aa_{in})\alpha_n = b_j + ab_i$$

这个等式说明方程组(2)的解$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$满足(3)的第$j$个方程，因而满足(3)的所有方程，即$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是(3)的解。

类似地可以证明，线性方程组(3)的每一个解也是(2)的解。

这样就证明了上述结论。

现在，我们举一个用初等变换的方法解线性方程组的例子。

例 解方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x+y-2z=-5 & (1)\\ x-y+z=1 & (2)\\ 2x+5y+z=0 & (3)\end{cases}$$

解 将方程(1)的-1倍加到(2)上，得方程组

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x+y-2z=-5 & (4)\\ -2y+3z=6 & (5)\\ 2x+5y+z=0 & (6)\end{cases}$$

将(4)的-2倍加到(6)上去，得方程组

$$(\mathrm{III})\begin{cases} x+y-2z=-5 & (7)\\ -2y+3z=6 & (8)\\ 3y+5z=10 & (9)\end{cases}$$

将(8)的$\frac{1}{2}$倍加到(7)上去，得方程组

$$(\mathrm{IV})\begin{cases} x-\frac{1}{2}z=-2 & (10)\\ -2y+3z=6 & (11)\\ 3y+5z=10 & (12)\end{cases}$$

将(11)的$\frac{3}{2}$倍加到(12)上去，得方程组

$$(\mathrm{V})\begin{cases} x-\frac{1}{2}z=-2 & (13)\\ -2y+3z=6 & (14)\\ \frac{19}{2}z=19 & (15)\end{cases}$$

以$\frac{2}{19}$乘(15)的两边，得方程组

$$(\mathrm{VI})\begin{cases} x-\frac{1}{2}z=-2 & (16)\\ -2y+3z=6 & (17)\\ z=2 & (18)\end{cases}$$

将(18)的$\frac{1}{2}$倍加到(16)上去，得方程组

$$(\mathrm{VII})\begin{cases} x=-1 & (19)\\ -2y+3z=6 & (20)\\ z=2 & (21)\end{cases}$$

将(21)的-3倍加到(20)上去，得方程组

$$(\mathrm{VIII})\begin{cases} x=-1 & (22)\\ -2y=0 & (23)\\ z=2 & (24)\end{cases}$$

以$-\frac{1}{2}$乘(23)的两边，得方程组

$$(\mathrm{IX})\begin{cases} x=-1\\ y=0\\ z=2\end{cases}$$

由于从(Ⅰ)到(Ⅸ)中每相邻两个方程但都是同解的，而同解

方程组具有传递性，所以原方程组和(Ⅸ)是同解方程组。而(Ⅸ)的唯一解是$(-1, 0, 2)$，所以(Ⅰ)的唯一解也是$(-1, 0, 2)$。

从上面的例子容易看出，这里所使用的正是中学数学课本中讲述的加减消元法。同时也可以发现，这里所采用的表达方式虽然对说明消元法的实质是有益的，但是却因出现多处重复而显得过于繁琐。因此在中学低年级，常常用更简略的形式来表达方程组的解题过程。中学课本就采用这种简略方式。

这一节所介绍的解线性方程组的方法，叫做**消元法**，它的主要依据是初等变换不改变方程组的同解性。在下一节，我们将以更简单的形式运用这种方法去解任意的线性方程组。

练　习　题

1. 解以下线性方程组：

(1) $\begin{cases} 9x+8y=10, \\ 10x+9y=10; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y+3z=10, \\ 2x+y+5z=29, \\ 4x+2y+z=31; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=5, \\ 2x_1-7x_2+5x_3+x_4=2, \\ 3x_1+x_2-2x_3+x_4=-20, \\ -6x_2+3x_3+2x_4=21; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 1; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 12x_3 - 7x_4 = 11, \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 7. \end{cases}$

2. 已知三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 有三个根为 1、2、3，求 a、b、c 的值。

3. 证明方程组：

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x、y、z) = 0, \end{cases}$$

和方程组

$$\begin{cases} af(x、y、z) + bg(x、y、z) = 0, \\ cf(x、y、z) + dg(x、y、z) = 0, \end{cases}$$

同解，其中 a、b、c、d 是数，并且 $ad - bc \neq 0$。

三、分离系数法

从上面介绍的方法中，我们容易看到，在依次利用初等变换将一个给定的方程组化为与它同解的另一个方程组的过程中，参与计算的实际上只是方程组中各个方程的系数。如果我们用位置表示未知数，那么就可以把系数从方程组中分离出来，得到一个更简单的表示法。例如，对方程组

$$\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ x-y+z=1 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \tag{1}$$

来说，分离出系数以后，就得到一个矩形表：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

我们把用这样形式排列起来的一些数的阵列叫做**矩阵**。表中每个数，叫做这个矩阵的**元素**，每个横排叫做矩阵的**行**。各个行自上而下编号，例如在上面的矩阵中，表示方程 $2x+5x+z=0$ 的第三横排(2　5　1　0)就是这个矩阵的第三**行**。类似地，把这个矩阵的每个竖排，叫做这个矩阵的**列**，各列自左至右编号为第一列，第二列，……。

矩阵的一般形式是