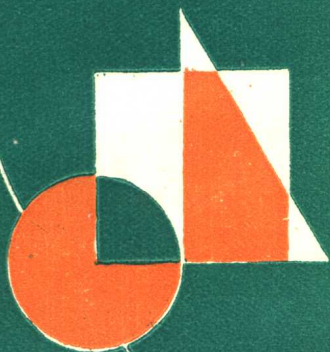


解析几何

汪国鑫 编著

四川大学出版社



责任编辑 廖 斌
封面设计 羊 角

四川大学出版社出版发行

四川省新华书店经销

西南治地测绘队制印厂 印刷

开本787×1092毫米1/32 印张11.94 字数: 24千

1989年3月第一版 1989年3月第一次印刷

印数: 0001—4000册

ISBN17—5614—0130—2/O·25 定价: 2.00元

前 言

解析几何是综合大学、师范及工科院校的数学和有关专业本科与专科生的必修基础课程。教学计划中安排的学时数较少，而教学大纲中所要求的内容又甚多，如何组织教材，历来就是一个颇为困难的问题。

汪国鑫同志以多年从事这门课程的教学实践经验，吸取现有教材的优点，几经修订，编写了这本教科书。读后深为欣慰，它为上述问题提供了一个探索性的解决办法。

本书用向量和矩阵为工具，以清晰的条理、简炼的描述、谨慎的取舍、系统地阐明了各类型大纲所要求的内容，使之对不同类型学校开设本课程均能适合，还可供自学使用。因而该书具有较为广泛的适应面。

本书各章节均注意了对学生空间形式想象力的培养，对学生应用和计算能力的培养，对学生逻辑思维能力的培养，特别通过例题和习题的适当选择和启发诱导，培养学生分析问题解决问题的能力。习题难易兼备，可供不同程度的学生选用，达到因材施教的目的。鉴于中学数学教学中解析几何的内容不多，矩阵及向量的系统讲授更赋阙如，本书在正文或附录内，对此均一一详为补充，使学生在学习上不致感到困难。不难看出，本书作者处处为学生着想，为当前本课程的教学着想，从而使本书具有较好的可读性。

本书是根据汪国鑫同志在四川大学数学系主讲解析几何

课的自编讲义修订而成。讲义的编写受教研室的委托与鼓励，内容的修订也是经过集体讨论决定的。当时笔者备员系务工作，有幸与闻编写的终始过程，也了解到本书的讲义原稿不仅在川大、也在省内其它学校使用过，学生反映均较好，认为深入浅出，容易掌握；用过本教材的教师，也认为它科学系统性强，重点突出，教学中能得心应手。从这样的效果来看，本书无疑是当前可供使用的一册较好的教科书。

当然，由于各种条件的限制，本书尚有一些缺点和不足之处。教育革命正在深入，教材是教育改革主要对象之一，它也必须不断地改革，使之逐步朝着面向现代化、面向世界、面向未来的目标迈进。希望本书能在不太长的时间内，吸取更多的教学实践经验，采纳新的资料，修订、改进，作出新的更好的版本。

胡 鹏

1988年9月于四川大学

编 者 的 话

本书是根据国家教委审订的《解析几何》教学大纲的精神，参照全国高等教育自学考试指导委员会87年制订的“解析几何自学考试大纲”，结合我们多年来从事教学实践的经验体会编写而成。全书共七章和一个附录，正文系统地阐述了欧氏几何与仿射几何的基本内容，附录对矩阵知识作了简单介绍。它适合各种类型的大专院校开设本课程的需要，对自修《解析几何》的读者也是适宜的。对于设有《高等数学》课的在校学生，亦有很好的参考价值。

本书的习题在书末附有答案或提示，可给读者较好的启发。

关于课时的安排，第一章18学时，二章和三章各10学时，四至六章各12学时，第七章16学时，总计90学时可以讲完。对不同院校可根据自身情况适当地伸缩和调整，不必一概而论。

解析几何是大学及师院数学系学生必修的一门基础课，如何提高教学质量是大家十分关注的重要课题。从教材的角度考虑，我们在编写时注意了以下几点。

1. 本课程的内容多而学时少，教材必须与之相适应。首先，我们致力于教材的取舍与安排，力求叙述简明扼要，文字准确易懂。关于这一点，从本书对平面、直线和二次曲线的论述以及用参数方程讨论直纹面的母线性质等章节，大致

可见一斑。其次，在讲述坐标变换和点的变换时，在讨论二次曲线和二次曲面的不变量时，都用到了矩阵的初步知识，这就使得一些定理的证明和公式的推导干净利落，篇幅大大缩短。读者学到这部分内容时，只要先看看附录，就不会发生多大困难。

2. 本书对讲授和习题课作了统筹安排，列举了大量的例子来介绍解题方法，充实了习题课的内容；所选的各种类型题目，加强了学生的基本训练。使讲授与习题课得以有机结合。

3. 解析几何作为一门基础课，既要考虑它本身的理论性与科学系统性，更要注意它为后继课程服务的应用性。由于向量的应用既多且广，因此我们用第一章来专讲向量代数。向量摆在引入坐标系之前，一方面，旨在培养学生直接以向量为工具解决一些几何问题的能力；另一方面，力图表明向量的各种运算及其基本性质不依赖于坐标系（直角坐标系或仿射坐标系）的选取，这一点，是初学者乃至高年级学生常犯错误的根源。此外，为了学习数学分析等课的需要，培养学生对空间图形的想象力，本书加强了对空间曲线在坐标面上的投影、曲面相交及空间区域等概念的描述和有关练习。

四川大学胡鹏教授，认真批阅并反复修改了原稿，还提供了一些好的建议和习题，在此敬向他表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，得到了校系领导同志的大力支持与鼓励，几代教研室主任张庆达付教授给予了全面的关心和具体的指导，并同李安民教授先后审阅过书稿，赵国松老师试用过教材，他们都提出了许多好的意见，对提高编写质量起

了很大作用，对于成书，四川大学出版社的同志也给了不少帮助，在此一并致谢。

本书承南开大学吴大任教授与周学光教授、河北大学杨从仁教授、武汉钢铁学院任德麟教授的审阅并推荐，他们提供了许多宝贵的意见，使本书生色增辉，编者谨向他们表示诚挚的谢意。

限于编者水平，书中的缺点和错误在所难免，恳请有关专家及广大读者不吝赐教，提出宝贵意见，供修订时作为南针，编者至所企盼！

编著者

1988年9月于四川大学

目 录

前言

编者的话

第一章 向量代数

§ 1 向量的概念 (1)

§ 2 向量的加法 (4)

习题一..... (8)

§ 3 数乘向量 (9)

§ 4 向量的线性关系 (12)

习题二..... (24)

§ 5 内积 (27)

习题三..... (32)

§ 6 外积 (33)

习题四..... (39)

§ 7 混合积与三向量的双重向量积 (40)

习题五..... (45)

§ 8 向量对于给定基底的坐标、用坐标
进行向量运算 (46)

习题六..... (53)

第一章 总复习题..... (54)

第二章 空间坐标系与坐标变换

§ 1 仿射坐标系	(38)
1. 坐标系的建立	
2. 点的坐标	
3. 几个简单问题	
4. 空间直角坐标系	
§ 2 空间直角坐标系下几个简单问题	(67)
1. 两点间的距离	
2. 三角形的面积	
3. 四面体的体积	
习题一	(72)
§ 3 坐标变换	(73)
1. 坐标系的变换	
2. 两种特殊的直角坐标变换	
3. 欧拉角	
习题二	(83)
§ 4 曲面与曲线	(84)
§ 5 球面坐标与柱面坐标	(93)
1. 球面坐标	
2. 柱面坐标	
习题三	(94)
第二章 总复习题	(96)
第三章 平面与直线	(100)

§ 1 平面	(100)
--------------	---------

1. 平面的方程	
2. 平面的法式方程	
3. 两平面的相关位置	
习题一	(107)
§ 2 直线	(109)
1. 直线方程	
2. 点到直线的距离	
3. 两直线间的相互关系	
习题二	(117)
§ 3 直线与平面的相互关系	(118)
§ 4 平面束	(120)
习题三	(125)
第三章 总复习题	(127)

第四章 常见的曲面 (133)

§ 1 柱面	(133)
§ 2 锥面	(136)
§ 3 旋转面	(140)
习题一	(144)
§ 4 椭球面	(145)
1. 有介性	
2. 对称性	
3. 形状	
§ 5 双曲面	(148)
1. 单叶双曲面	
2. 双叶双曲面	

§ 6 抛物面	(152)
1. 椭圆抛物面	
2. 双曲抛物面	
§ 7 直纹面	(154)
1. 单叶双曲面	
2. 双曲抛物面	
习题二	(163)
§ 8 作简图	(165)
1. 空间曲线在坐标面上的投影曲线	
2. 两曲面的相交图	
3. 空间区域简图	
习题三	(171)
第四章 总复习题	(172)

第五章 二次曲线的一般理论

§ 1 二次曲线和直线的交点	(177)
1. 渐近方向	
2. 切线	
习题一	(182)
§ 2 二次曲线的中心与直径	(184)
1. 中心	
2. 直径	
3. 主轴	
习题二	(192)
§ 3 不变量	(193)
§ 4 二次曲线方程的化简与分类	(197)

1. 中心曲线
2. 无心曲线
3. 线心曲线

习题三..... (206)

第五章 总复习题..... (208)

第六章 二次曲面的一般理论..... (213)

§1 不变量..... (214)

§2 二次曲面与直线的交点..... (219)

1. 渐近方向
2. 切线与切平面
3. 法线

习题一..... (224)

§3 中心、直径面与共轭方向、主方向
与主径面..... (226)

1. 中心
2. 直径面与共轭方向
3. 主方向与主径面

习题二..... (238)

§4 二次曲面方程的化简与分类..... (240)

习题三..... (253)

第六章 总复习题..... (255)

第七章 欧氏几何与仿射几何..... (260)

§1 映射与变换..... (261)

习题一..... (265)

§ 2 正交变换	(266)
1. 平面正交变换的性质	
2. 正交变换的坐标表示和基本定理	
3. 空间正交变换	
习题二	(279)
§ 3 仿射变换	(281)
1. 平面仿射变换的概念和表达式	
2. 平面仿射变换的基本定理	
3. 空间仿射变换	
习题三	(296)
§ 4 变换群与几何分类	(298)
1. 变换群的概念	
2. 克莱因观点介绍	
3. 二次曲线的度量分类与仿射分类	
4. 二次曲面的度量分类与仿射分类	
习题四	(309)
第七章 总复习题	(311)
附录 矩阵简介	(316)
1. 矩阵的概念	
2. 矩阵的运算	
3. 矩阵的逆	
4. 正交矩阵	

习题答案与提示	(325)
---------------	---------

第一章	(325)
-----------	---------

第二章	(329)
-----------	---------

第三章.....	(333)
第四章.....	(336)
第五章.....	(342)
第六章.....	(347)
第七章.....	(350)

第一章 向量代数

在解析几何学中,过去总是首先引进坐标,把点和数联系起来,通过代数运算解决几何问题。近年来,一般都是首先引进向量,以向量的代数运算研究几何,这比单纯使用坐标,从方法上和表达形式上来讲,都有其优越性。向量不仅在数学上有着广泛的应用,而且是物理学、力学、工程技术等方面的重要工具。因此,我们专门用一章来学习掌握向量代数,为本课程及许多后续课程打下基础。

向量不同于常见的数,它有自己的运算规律。本章的目的就是系统地介绍这些规律以及它们的应用。读者对每一概念要理解其几何意义,对向量的各种代数运算,要熟练掌握并能用以解决有关几何问题。

§1 向量的概念

数量关系是我们在日常生活与科学研究中经常要遇到的。客观世界中存在着两种不同的量。有一种量,如长度、时间、温度、质量、密度等,当选定度量单位之后,仅用一个实数就可以完全把它表示出来。这种只有大小的量,叫做数量。另一种量,如质点沿一方向移动一段距离,即所谓质点的位移,它是由大小和方向来刻划的量。又如力、速度、加速度、力矩、电场强度等也是这样。这种既有大小又

有方向的量，叫做向量。

一个向量的要素有三：一是大小，二是方向，三是指向。向量的方向指的是它和空间中哪一条直线平行，而向量的指向则表明直线两端中哪一端，通常我们把这二者统称为方向。

客观世界所存在的向量虽多，我们可以通过它的三个要素，用一条“有向线段”来概括。线段的长度可以代表向量的大小，线段的方向可以代表向量的方向，从线段的起点到线段终点的指向，即向量的指向。这样一来，任何一个向量，不论是位移、速度、力矩，还是别的什么，都可以用空间中的一个有向线段把它表示清楚了。把向量概括成一条有向线段，是一种高度的抽象。研究有向线段所得出的种种结果，既可以对位移作出解释，又可以对速度或其它作出解释。所以在数学上，我们可以把向量和空间中的有向线段等同起来，把向量定义为有向线段。这是1846年爱尔兰数学家哈密顿 (Hamilton) 创立的。

在空间中，以A为起点、

B为终点的有向线段（即向

量）记做 $\vec{AB}$ （图1—1），A称为向量的起点，B称为该向量的终点。有向线段 $\vec{AB}$ 的长度

记为 $|\vec{AB}|$ ，也叫做向量的大小或模。 $\vec{AB}$ 的代数长（即带有

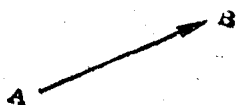


图1—1

正、负号的长度，与中学数学所定义的一样。）记为 $\overrightarrow{AB}$ ，
显然 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ 。

为方便计，除利用起点、终点来表示向量而外，如
 $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{OX}$ ， $\overrightarrow{OP}$ ，…等，习惯上还用粗体拉丁字母，或用一个
字母上面加以箭头来表示向量。例如：

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{v} \cdots \text{或 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{v} \cdots$$

对于向量，我们只考虑它的大小和方向，起点可以任意
选取。两个长度相等、方向相同的向量，如平行四边
形 $ABCD$ （图1—2）中的 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ ，称为相等向量，以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
记之。当然也可以同样理解

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}, \vec{x} = \vec{y}, \cdots$$

长度为零的向量称为零
向量，记作 $\mathbf{0}$ （不是数
0！）。零向量的方向不
定，也可以说是任意的。

与 $\mathbf{a}$ 等长，但指向
却相反（也可简称反向）
的向量，称为 $\mathbf{a}$ 的反向量，
用 $-\mathbf{a}$ 表示（见图1—2）。

显然有

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}, -(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}.$$

平行同一条直线的向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ （包括指向相同或相反），

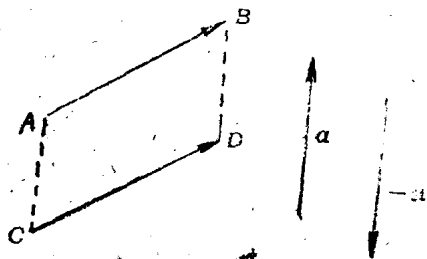


图1—2