● 蔡海涛 欧阳维诚 刘裔红 著

湖南教育出版社

现代社会科学的数学方法

现代社会科学的数学方法

蔡海涛　欧阳维诚　刘裔宏　编著

责任编辑：胡　坚

湖南教育出版社出版发行（长沙展览馆路 3 号）

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：11.75　字数：268,000

1989年6月第1版　　1989年8月第1次印刷

印数：1—480

ISBN7—5355—0915—0／G·947

定　价：4.80元

序　言

随着电子计算机及计算技术的发展，现代数学方法，已大量地被引用到社会科学研究的各个领域中来。

现代数学方法在经济学研究中取得了举世瞩目的成就，近年来美国的一些学者又把数学方法引进到历史学的研究中，用数学方法来研究社会科学的热情方兴未艾。在国内，不仅数量经济学、人口理论，计量史学等方面的研究正在蓬勃开展，不少学者在其他许多社会科学研究中也尝试使用了数学方法。如有的学者在《红楼梦》研究中应用了概率统计方法；在汉语言学中应用了模糊数学；在封建王朝盛衰的研究中引进了微分方程；在《易经》的研究中引进了代数结构等等。应用的范围越来越广泛，使用的数学工具也越来越深刻。

数学方法对社会科学的渗透，推动了社会科学的发展：使大量的数量资料得到了充分的正确的运用，为研究工作中积累了宝贵资本，弥补了定性分析的研究的不足；开拓了诸如制度和结构一类的许多新课题；有利于解决社会科学研究中某些长期争论、悬而未决的问题；促进了社会科学研究队伍的现代化。

许多社会科学工作者已开始自觉地学习现代数学。选择一些迫切需要而又不必花费太多的时间与精力就能掌握的现代数

学知识，帮助社会科学工作者步入现代数学的殿堂，是我们编写这本书的目的。

本书介绍了集合与关系、矩阵与非负矩阵、布尔矩阵、组合论与图论、马尔可夫链、变分方法、差分方程等内容，对于微积分、微分方程、线性代数等传统数学的内容，因为在一般书中都可以找到，则省略了。对于一些定理的处理方法是：凡是不涉及太多的其它知识，根据本书中的定义和逻辑推理方法就可以证明的定理则详加证明，对于涉及太多数学预备知识或证明过繁的定理的证明被省略了。每章附有应用一节，着眼于这些数学方法在社会科学研究中，特别是一些看来与数学关系不够密切的学科研究中的应用。

本书第一、三、四章由欧阳维诚执笔；第二、六章由刘裔宏执笔；第五、七章由蔡海涛执笔。最后，由蔡海涛总其成。作者自知在数学和社会科学这两方面都水平有限。因此，写作本书只是一种力难胜任的尝试。难免有画虎不成之憾，但仍希望能有抛砖引玉之功。

作　者

1988年4月

目录

第一章　集合与关系

集合是现代数学的基本概念之一，在数学的各个领域中都有广泛的应用。1872～1897年，乔治·康托(Georg Cantor)发表了一系列有关集合论的文章，给集合论的发展奠定了基础．现在，集合论的观点不仅已渗透到数学的各个领域，也渗透到了许多自然科学和社会科学的领域．许多社会科学中的现象，用集合的观点来描述，就会更加精确而简明，有利于对它们进行数学处理．本章在介绍集合的基本概念之后，接着引入了关系、函数、序、代数系统等概念。

§1.1　集合及其运算

集合（简称集）是一个不精确定义的概念，一般只对它进行一些描述性的说明．一般地说，一些确定的客体的全部称为一个**集合**．例如，北京大学的学生组成一个集合；黄河所流经的省份组成一个集合；电话号码302154的 6 个数码也组成一个集合；等等．集合的客体称为集合的**元素**(简称元)．通常用大写的拉丁字母A、B、C……等表示集合，用小写的拉丁字母a、b、c……等表示集合的元素，记号“$a\in A$”表示a是集合A的元素，即a属于A；记号“$a\notin A$”表示a不是A的元素，即a不属于A。

我们总是在一定的范围内讨论问题的，这个范围就称为论

域。论域中全部元素所成的集合叫做**全集**，用U表示。此外，为了方便，把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\varnothing$。

描述一个集合常用两种方法：

第一种是列举法。即把一个集合的所有元素逐一列举在花括号内，例如：

$A=\{3,\ 0,\ 2,\ 1,\ 5,\ 4\}$

$B=\{$齐，楚，燕，韩，赵，魏，秦$\}$

第二种叫特征法。即说明集合的元素具有什么性质，用记号$\{x|x$具有…$\}$表示。例如：

$C=\{x|x$是黄河流经的省份$\}$

$D=\{a|a$是自然数$\}$

$E=\{y|y^2-3y+2=0\}$

集合A、B、C都只有有限个元素，称为**有限集**；集合D有无穷多个元素，称为**无限集**。有限集A如有n个元素，就称为n元集。并用记号$|A|$表示A中元素的个数，称为A的**基数**或**计数**。例如在上面所举的一些例子中，$|A|=6$，$|B|=7$，$|E|=2$，它们的基数分别为6，7，2。

定义1.1.1 如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，即从$x\in A$必定能推出$x\in B$，则称A是B的**子集**，记作$A\subseteq B$。又若B中至少有一个元素不是A的元素，则称A是B的**真子集**，记作$A\subset B$。

例1.1.1 设$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，则$B$是$A$的真子集，$B\subset A$。

下面几个集合经常用到，所以用特定的符号来表示它们，如无特别说明，它们的含义是不变的：

$C=$全体复数所成的集合；

$R=$全体实数所成的集合；

Q = 全体有理数所成的集合；

Z = 全体整数所成的集合；

N = 全体自然数所成的集合；

$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$，称为自然数的一个**片断**。显然，$I_n \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$。

定义1.1.2 两个集合A与B如果满足条件$A \subseteq B$，$B \subseteq A$，则称A等于B，记作$A = B$。

例1.1.2 $A = \{1, 2\}$，$B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$，集合$B$是由满足方程$x^2 - 3x + 2 = 0$的数组成，即$B$是方程$x^2 - 3x + 2 = 0$的根所成之集，因为这方程的根是1和2，所以$A = B$。

定义1.1.3 令A是全集U的一个子集，由U中不属于A的元素所作成的集合称为A的**补集**，记作$\bar{A}$。

设B是U的另一子集，B中不属于A的元素所成的集合称为B对A的**相对补**，记作$B \backslash A$。

例1.1.3 令$U = N$，$A = \{x | x = 2n$是偶数$\}$，则$\bar{A} = \{y | y = 2n - 1$是奇数$\}$。

例1.1.4 令$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B = \{2, 3, 5, 8\}$，则$B \backslash A = \{2, 8\}$。

定义1.1.5 由至少属于A和B两个集合中的一个的所有元素组成的集合称为A与B的**并集**，记作$A \cup B$。即

$$x \in A \cup B，当且仅当 x \in A 或 x \in B。$$

(注意：若x同时属于A和B，则x在$A \cup B$中只出现一次。)

例1.1.5 令$A = \{1, 2, 3\}$，$B = \{1, 5, 7\}$，则$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$。

定义1.1.6 由同时属于A和B两个集合的元素组成的集合，称为A与B的**交集**，记作$A \cap B$。即

$$x \in A \cap B，当且仅当 x \in A 并且 x \in B。$$

例1.1.6 令$A=\{$矩形$\}$,$B=\{$菱形$\}$,则$A\cap B=\{$正方形$\}$。

例1.1.7 令$A=\{1, 3, 5, \cdots\}$, $B=\{2, 4, 6, \cdots\}$, 则$A\cap B=\varnothing$。

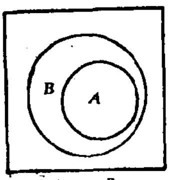
定义1.1.7 设A和B是两个集合，由一切属于A或B的一个但不同时属于两者的元素所构成的集合，称为A与B的对称差，记作$A\triangle B$。即：

$$x\in A\triangle B,\ \text{当且仅当}\ x\in A\cup B,\ \text{但}\ x\notin A\cap B。$$

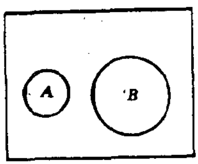
或者 $$A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

例1.1.8 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 5, 7, 9\}$, 则$A\triangle B=\{1, 2, 4, 7, 9\}$。

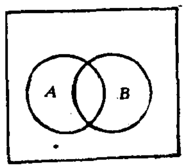
$\cup$、$\cap$、$\overline{}$可以看作集合之间的3种运算，$\subset$是集合与集合之间的一种关系。在讨论集合的运算与集合的关系时，常借助于一种专门的直观图来表示，这种图叫做文氏(Venn)图。通常用一个矩形的内部表示全集U，其它集合则用矩形内的圆面表示。例如，若$A\subset B$，那么表示A的圆将整个落在表示B的圆的内部，如图1-1(a)。如果A和B不相交(即$A\cap B=\varnothing$)，那么表示A与B的两个圆互相分离，如图1-1(b)。当A和B是两个任意的集合时，可能会有些元素在A中而不在B中，也有些元素在B中却不在A中，有些元素同时在A和B中，有些元素既不在A中也不在B中。这时，一般用图1-1(c)那样的两个圆来表示集合



(a) $A\subset B$



(b) $A\cap B=\Phi$



(c)

图1-1-1

A、B.

例1.1.9 集合的运算，可用下列文氏图解来说明.图中阴影部分表示图下标出的集合：

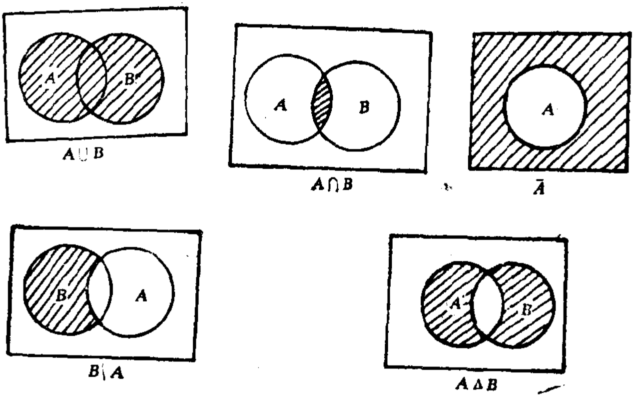


图1-1-2

关于集合的运算有许多重要性质，我们将其列举于下而省略其详细的证明：

1.交换律

(a) $A\cup B=B\cup A$, (b) $A\cap B=B\cap A$;

2.结合律

(a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

(b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

3.分配律

(a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

(b) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

4.幂等律

(a) $A\cup A=A$, (b) $A\cap A=A$;

5.幺元律

(a) $A\cup U=U$, (b) $A\cup\varnothing=A$,

(a) $A\cap U=A$, (b) $A\cap\varnothing=\varnothing$;

6.对合律

$\overline{(\overline{A})}=A$;

7.补元律

(a) $A\cup\overline{A}=U$, (b) $A\cap\overline{A}=\varnothing$,

(c) $\overline{U}=\varnothing$, (d) $\overline{\varnothing}=U$;

8.德·摩根(De Morgan)律

(a) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, (b) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

证明这些有关集合运算的等式通常用两种方法:第一种方法是分别讨论当x是等式两边中每一边的元素时的含义,证明x是任何一边的元素,必可推出也是另一边的元素。第二种方法是利用文氏图解。试以证明德·摩根律的两个等式为例来说明这两种证明方法:

(a) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

我们用第一种方法证明。

设$x\in\overline{A\cup B}$,则$x\notin A\cup B$,所以$x\notin A$并且$x\notin B$,从而$x\in\overline{A}$,$x\in\overline{B}$,即$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$。因此$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$。

反之,设$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$。则$x\in\overline{A}$,$x\in\overline{B}$,从而$x\notin A\cup B$,即$x\in\overline{A\cup B}$。因此$\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$。

因 $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$,

故 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

(b) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

我们借助于文氏图证明。

如图1-1-3,(a)是$A\cap B$的文氏图,故(b)为$\overline{A\cap B}$的文氏图。

图1-1-3(c) 表示$\bar{A}$，(d) 表示$\bar{B}$，故(e) 表示集$\bar{A}\cup\bar{B}$。

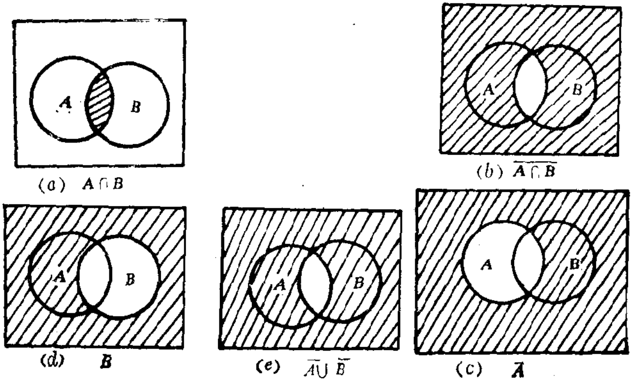


图1-1-3

例1.1.10 试证明，若$A\subseteq B$，则有：

(a) $A\cap C\subseteq B\cap C$，(b) $A\cup C\subseteq B\cup C$，

(c) $A\cap B=A$，　　(d) $A\cup B=B$。

证 (a) 任取$x\in A\cap C$，则$x\in A$，$x\in C$。由$A\subseteq B$推出$x\in B$，故$x\in B\cap C$。因此，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

(b) 任取$x\in A\cup C$，则$x\in A$或$x\in C$。若$x\in A$，则由$A\subseteq B$推出$x\in B$，得$x\in B\cup C$；若$x\in C$，亦有$x\in B\cup C$。故不论何种情况，都有$x\in B\cup C$。所以$A\cup C\subseteq B\cup C$。

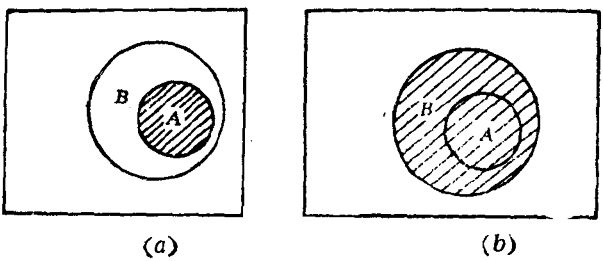


图1-1-4

(c) 由图1-1-4(a)，显然有$A\cap B=A$。

(d) 由图1-1-4(b)，显然有$A\cup B=B$。

集合的并与交运算可以推广到更多的集合上去。

定义1.1.8 令S是由某些集合组成的集合，由至少属于S中一个集合的那些元素所组成的集合，称为S中诸集合的**并集**，记作

$$\bigcup_{S_i\in S} S_i$$

由属于S的每一个集合的那些元素所组成的集合，称为S中诸集合的**交集**．记作

$$\bigcap_{S_i\in S} S_i$$

例1.1.11 令$S=\{S_1, S_2, S_3\}$，而

$S_1=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$S_2=\{1, 4, 7\}$

$S_3=\{1, 5, 8\}$

则
$$\bigcup_{S_i\in S} S_i=\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

$$\bigcap_{S_i\in S} S_i=\{1\}.$$

§1.2 二元关系

为了研究集合的元素的性质，只讨论元素的本身是不够的，常常要了解元素之间的相互关系。本节我们将介绍集合与集合之间的一个重要概念——二元关系．为此，先介绍“序偶”的概念．

设A与B是两个集合，A的元素用a表示，B的元素用b表示，

在A中取元素a，在B中取元素b，作成有次序的元素对(a,b)，称为**序偶**。

例1.2.1 设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{8,9\}$，则$(1, 8)$，$(2,8)$，$(3, 9)$等都是A与B之间的序偶。

必须注意，序偶(a, b)与两个元素的集$\{a, b\}$是根本不同的概念，前者的a和b是有次序的，一般地，$(a, b)\neq(b,a)$，a是第一个，b是第二个，a和b可以相同也可以不同；后者的a和b没有次序，$\{a, b\}=\{b, a\}$，而且a和b必须是不同的元素，即$a\neq b$。

定义1.2.2 设A和B是两个集合，由集合A与B的所有序偶$(a, b)(a\in A, b\in B)$作成的集合，称为A与B的**笛卡儿积**，记作$A\times B$。

例1.2.2 令$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b\}$。那末，我们有

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\};$$

$$B\times A=\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\};$$

$$A\times A=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

例1.2.3 某厂举行正、副厂长选举，正厂长候选人有$A=\{$赵，钱$\}$ 2 人，副厂长候选人有$B=\{$孙、李、周、吴$\}$4人。选举正副厂长各一人，则可能的领导组成情况就构成$A\times B$：

$$A\times B=\{(\text{赵}, \text{孙}), (\text{赵}, \text{李}), (\text{赵}, \text{周}), (\text{赵}, \text{吴}), (\text{钱}, \text{孙}), (\text{钱}, \text{李}), (\text{钱}, \text{周}), (\text{钱}, \text{吴})\}$$

即可能有 8 种不同的组成。

从上述例子看出，有两点值得注意：

1. $|A\times B|=|B\times A|$

一般地，$A\times B\neq B\times A$，但$A\times B$与$B\times A$的元素个数是相同的。

2. $|A\times B|=|A||B|$

一般地，若集合A与B分别有m、n个元素，那么$|A\times B|$有mn个元素（见定理1.3.1）。

例1.2.4 令R是实数的集合，那末$R\times R$就由一切有序的实数对(x,y)组成。把(x,y)看作平面上点的坐标，则$R\times R$中的每一个元素，都有而且仅有平面上的一个点同它对应，换句话说，$R\times R$就是笛卡尔坐标平面上的点集。

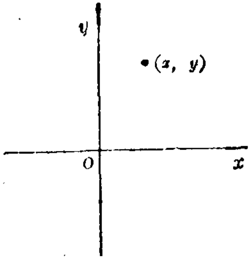


图1-2-1

定义1.2.2 集合A与B的笛卡尔积$A\times B$的一个子集T称为A与B的一个**二元关系**。

例1.2.5 令$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，那么$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$，若$T=\{(1,4),(2,5)\}$，则$T$是$A$与$B$的一个关系。

例1.2.6 令A是某大学毕业生的集合，B是用人单位的集合，则一个分配方案是A与B的一个二元关系。

例1.2.7 设$A=\{$月，落，乌，啼，霜，满，天$\}$，$B=\{$平仄$\}$，现在将A中每一个字标明是平声或仄声，得：

$T=\{$(月，仄)，(落，仄)，(乌，平)，(啼，平)，(霜，平)

(满，仄)，(天，平)$\}$

则T是A与B的一个二元关系。

例1.2.8 假定R是实数的集合，T是包含一切$a<b$的序偶(a,b)的子集，则T是$R\times R$的一个二元关系，即通常的小于关系。

例1.2.6与1.2.7等二元关系可以看作实际问题的数学模型，实际关系中的每一数学的或逻辑的性质都可以在二元关系