数学奥林匹克

一讲一练

主编：熊 斌 冯志刚

初二年级

上海科学普及出版社

书香策划

数学奥林匹克

一讲一练

三年级

四年级

五年级

六年级

初一年级

■ 初二年级

初三年级

高一年级

高二年级

高三年级

ISBN 7-5427-2223-9

9 787542 722232 >

ISBN 7-5427-2223-9/O·55

定价：16.00元

数学奥林匹克

一讲一练

·初二年级·

主编　熊　斌　冯志刚

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克一讲一练．初二年级/熊斌,冯志刚主编．—上海：上海科学普及出版社，2002.7
ISBN 7-5427-2223-9

Ⅰ．数… Ⅱ．①熊…②冯… Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 045675 号

责任编辑： 文　道

书　　名　**数学奥林匹克一讲一练·初二年级·**
主　编　熊　斌　冯志刚
出　版：上海科学普及出版社（上海中山北路 832 号　邮政编码 200070）
发　行：新华书店上海发行所
印　刷：昆山市亭林印刷总厂
开　本：787×1092　1/16　　　印　张：12.25
字　数：298000
版　次：2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷
印　数：1-20000　　　定　价：16.00 元
书　号：ISBN7-5427-2223-9/O·55

前　　言

数学奥林匹克竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养创新能力、开拓视野有着非常积极的作用。通过开展数学奥林匹克活动，可以更好地发现和培养优秀学生，并能提高教师的教学水平，促进教学改革。

本丛书从小学三年级至高中三年级共10册，将数学奥林匹克的内容以“一讲一练”的形式系统地组织起来，目的是希望能为学生提供一套强化知识、开阔视野、提高数学素质和能力的教材，让学生能借助这套教材的学习，具备或提高参加各种数学竞赛的知识和能力，使学生不仅能把自己的课内成绩提高，而且能在数学竞赛中取得理想的成绩。

本书的每一讲都由“讲”和“练”组成，每一讲分设三部分内容：

1. 竞赛热点、考点、知识点。将数学竞赛的知识、内容以及当前的热点问题和历届数学竞赛中经常出现的问题给予分析、归纳、阐述和总结。

2. 典型例题精讲。围绕数学竞赛的热点、考点，选择典型的例题，通过对典型例题的分析、讲解，使学生能够掌握基本思想和基本方法，进而提高分析问题和解决问题的能力。

3. 能力训练习题。有针对性地选择一些名题、新题、好题给学生练习。通过这样的练习，使得学生能更好地掌握所学的知识，提高解题能力，培养创新意识。

参加本套丛书编写的作者既有长期在数学竞赛辅导第一线的教师，又有曾获国际数学奥林匹克金牌的选手，还有多次参与各级各类数学竞赛命题的专家，由于他们的参与，保证了本套教材的质量。

本套丛书的编写，得到了单墫先生、顾鸿达先生、刘鸿坤先生的热情关怀和指导，借此对他们表示衷心的感谢。

熊　斌　冯志刚

目　录

第一讲 因式分解(一)

竞赛热点、考点、知识点

多项式的因式分解是代数式恒等变形的基本形式之一，是我们解决许多数学问题的有力工具. 主要的方法有：提取公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法.

常用的公式有：

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.
2. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.
3. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
5. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.
6. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.
7. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为正整数.
8. $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$，其中 n 为偶数.
9. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$，其中 n 为奇数.

典 型 例 题 精 讲

例 1 分解因式：

(1) a^6-b^6；(2) $a^2+b^2+c^2-2bc+2ca-2ab$；(3) $a^7-a^5b^2+a^2b^5-b^7$.

解 (1)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(a^2-2ab+b^2)+(-2bc+2ca)+c^2\\&=(a-b)^2+2c(a-b)+c^2\\&=(a-b+c)^2.\end{aligned}$$

本题也可以直接利用公式 5.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=a^2+(-b)^2+c^2+2(-b)c+2ca+2a(-b)\\&=(a-b+c)^2.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(a^7-a^5b^2)+(a^2b^5-b^7)=a^5(a^2-b^2)+b^5(a^2-b^2)\\&=(a^2-b^2)(a^5+b^5)\\&=(a-b)(a+b)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\\&=(a-b)(a+b)^2(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).\end{aligned}$$

例 2 分解因式：

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$；(2) $x^3+y^3+3xy-1$.

解 (1) 因为 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$，所以 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$. 于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\&=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)\end{aligned}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

(2) 利用上面已证的(1)，即公式6，我们有

$$\text{原式}=x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)$$
$$=(x+y-1)(x^2+y^2+1+x+y-xy).$$

说明 公式6是一个应用很广泛的公式，用它可以推出很多有用的公式和结论. 例如

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

当 $a+b+c=0$ 时，$a^3+b^3+c^3=3abc$.

例3 分解因式：$(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3$.

解 由于 $(x-1)+(x-2)+(3-2x)=0$，所以由上题的说明知

$$(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3=3(x-1)(x-2)(3-2x).$$

例4 分解因式：x^3-5x+4.

解

$$\text{原式}=x^3-x-4x+4=x(x^2-1)-4(x-1)$$
$$=x(x-1)(x+1)-4(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-4).$$

说明 本题的解法很多，这里用的是拆项、添项的方法. 至于如何添项、拆项，并无一定规律可行，需具体问题具体分析. 对于本题，我们也可以按如下方法来解.

另解一

$$\text{原式}=x^3-x^2+x^2-5x+4=x^2(x-1)+(x-1)(x-4)$$
$$=(x-1)(x^2+x-4).$$

另解二

$$\text{原式}=x^3-1-5x+5=(x-1)(x^2+x+1)-5(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-4).$$

例5 分解因式：$x^{5n}+x^n+1$.

解

$$\text{原式}=(x^{5n}-x^{2n})+(x^{2n}+x^n+1)$$
$$=x^{2n}(x^{3n}-1)+(x^{2n}+x^n+1)$$
$$=(x^{2n}+x^n+1)(x^{3n}-x^{2n}+1).$$

例6 分解因式：$(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$.

解

$$\text{原式}=[(x+1)^4+2(x^2-1)^2+(x-1)^4]-(x^2-1)^2$$
$$=\{[(x+1)^2]^2+2(x+1)^2(x-1)^2+[(x-1)^2]^2\}-(x^2-1)^2$$
$$=[(x+1)^2+(x-1)^2]^2-(x^2-1)^2$$
$$=(2x^2+2)^2-(x^2-1)^2$$
$$=3x^4+10x^2+3$$
$$=(x^2+3)(3x^2+1).$$

例7 分解因式：$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.

解

$$\text{原式}=(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2c^2a^2)-4c^2a^2$$
$$=(a^2-b^2+c^2)^2-(2ca)^2$$
$$=(a^2-b^2+c^2-2ca)(a^2-b^2+c^2+2ca)$$
$$=[(a-c)^2-b^2][(a+c)^2-b^2]$$
$$=(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c).$$

说明 若 a,b,c 是三角形三边长，S 为其面积，则由海伦公式知，

$$16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

能力训练习题

1．分解因式$-2x^{5n-1}y^{n}+4x^{3n-1}y^{n+2}-2x^{n-1}y^{n+4}$.

2．分解因式$(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$.

3．分解因式 $x^3-8y^3-z^3-6xyz$.

4．分解因式 x^4+4y^4.

5．分解因式 $x^9+x^6+x^3-3$.

6．分解因式$(m^2-1)(n^2-1)+4mn$.

7. 分解因式 $3x^3+7x^2-4$.

8. 分解因式 $x^4+9x^3+9x^2-49x+30$.

9. 分解因式 $x^4+x^3-7x^2-x+6$.

10. 分解因式 $(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$.

11. 证明具有如下性质的正整数 a 有无穷多个:对于任意的正整数 n, n^4+a 都不是质数.

12. 求能使 m^2+m+7 是完全平方数的所有整数 m.

第二讲　因式分解(二)

竞赛热点、考点、知识点

1. 换元法． 我们把一个较为复杂的代数式中的某一部分看作一个整体，并用一个新的字母来替代这个整体进行运算，从而使运算过程简洁明了．换元法是数学中的一个重要方法．它在代数式的求值、解高次方程、方程组等方面有广泛的应用．

2. 双十字相乘法． 对于多项式 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，常常可以用双十字相乘法进行因式分解．步骤是：(1) 用十字相乘法分解 $ax^2+bxy+cy^2$，得到一个十字相乘图(有两列)；(2) 把常数项 f 分解成两个因式填在第三列上，要求第二、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 ey，第一、第三列构成的十字交叉之积的和等于原式中的 dx．参见下面例 5．

3. 待定系数法． 根据已知条件，先假设一个等式，其中含有待定的系数，利用多项式恒等对应系数相等的性质，得到含待定系数的方程或方程组．解方程或方程组，求出待定系数，再代入到原等式中去即可．

典型例题精讲

例 1　分解因式：$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

分析　将原式展开，是关于 x 的四次多项式，较难进行分解因式．我们将 x^2+x 看作一个整体，用字母 y 来代替，于是问题就转化为关于 y 的二次三项式的因式分解问题了．

解　设 $x^2+x=y$，则

$$\begin{aligned}原式&=(y+1)(y+2)-12=y^2+3y-10\\&=(y-2)(y+5)=(x^2+x-2)(x^2+x+5)\\&=(x-1)(x+2)(x^2+x+5).\end{aligned}$$

说明　本题也可将 x^2+x+1 看作一个整体，比如设 $x^2+x+1=u$，一样可以得到同样的结果，有兴趣的同学不妨一试．

例 2　分解因式：$(x^2+3x+2)(4x^2+8x+3)-90$.

解

$$\begin{aligned}原式&=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90\\&=[(x+1)(2x+3)][(x+2)(2x+1)]-90\\&=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90.\end{aligned}$$

令 $y=2x^2+5x+2$，则

$$\begin{aligned}原式&=(y+1)y-90=y^2+y-90\\&=(y+10)(y-9)=(2x^2+5x+12)(2x^2+5x-7)\\&=(2x^2+5x+12)(2x+7)(x-1).\end{aligned}$$

例 3　分解因式：$6x^4+7x^3-36x^2-7x+6$.

解

$$\begin{aligned}原式&=6(x^4+1)+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6[(x^4-2x^2+1)+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6[(x^2-1)^2+2x^2]+7x(x^2-1)-36x^2\\&=6(x^2-1)^2+7x(x^2-1)-24x^2\end{aligned}$$

$$=[2(x^2-1)-3x][3(x^2-1)+8x]$$
$$=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)$$
$$=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3).$$

说明 本题的上述解法实际上是将 x^2-1 看作一个整体，但并没有设新的元来代替它．在熟练使用换元法后，可以不设新元．本题还可以按如下方法解．

另解 原式 $=x^2\left(6x^2+7x-36-\dfrac{7}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)=x^2\left[6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+7\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-36\right]$.

令 $x-\dfrac{1}{x}=t$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$，于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^2[6(t^2+2)+7t-36]=x^2(6t^2+7t-24)\\&=x^2(2t-3)(3t+8)\\&=x^2\left[2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right]\left[3\left(x-\frac{1}{x}+8\right)\right]\\&=(2x^2-3x-2)(3x^2+8x-3)\\&=(2x+1)(x-2)(3x-1)(x+3).\end{aligned}$$

例 4 分解因式：$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

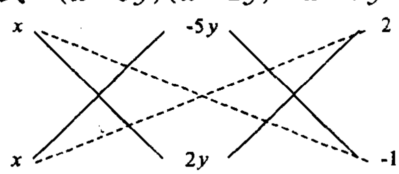
分析 本题含有两个字母，且当互换这两个字母的位置时，多项式保持不变，这样的多项式叫做二元对称多项式．对于较难分解的二元对称多项式，经常令 $u=x+y,v=xy$ 来分解因式．

解 令 $u=x+y,v=xy$，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(v-1)^2+(u-2)(u-2v)\\&=u^2+v^2+1-2u+2v-2uv\\&=(u-v-1)^2=(x+y-xy-1)^2\\&=[-(x-1)(y-1)]^2=(x-1)^2(y-1)^2.\end{aligned}$$

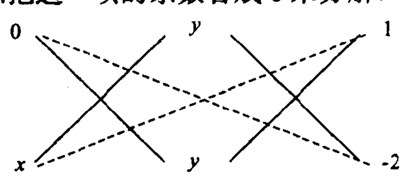
例 5 分解因式：(1) $x^2-3xy-10y^2+x+9y-2$；(2) $xy+y^2+x-y-2$.

解 (1) 原式 $=(x-5y)(x+2y)+x+9y-2$,



所以 原式 $=(x-5y+2)(x+2y-1)$.

(2) 原式中缺 x^2 项，可以把这一项的系数看成 0 来分解．



所以 原式 $=(y+1)(x+y-2)$.

例 6 求证：$x^2-2xy+y^2+x+y-4$ 不能分解为两个一次因式的乘积．

证明 用反证法．假设 $x^2-2xy+y^2+x+y-4$ 能分解为两个一次因式的乘积，设

$$x^2-2xy+y^2+x+y-4=(x-y+a)(x-y+b),$$

即
$$x^2-2xy+y^2+x+y-4=x^2-2xy+y^2+(a+b)x-(a+b)y+ab.$$

比较两边系数，得 $a+b=1,a+b=-1,ab=-4$，这不可能．

能力训练习题

1. 分解因式$(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1$.

2. 分解因式$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$.

3. 分解因式$(x^2-x-3)(x^2-x-5)-3$.

4. 分解因式$(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

5. 分解因式$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)-6$.

6. 分解因式 $6x^2-13xy+6y^2+22x-23y+20$.

7. 分解因式 $6x^2-5xy-6y^2-2xz-23yz-20z^2$.

8. 分解因式 $ab^2+bc^2+ca^2+a^2b+b^2c+c^2a+2abc$.

9. 分解因式$(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)$.

10. 分解因式$(x+y)^2+4(x+y)(3x-y)+4(3x-y)^2$.

11. 已知 $x+y-2$ 是二元二次式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式,求 a,b 的值.

12. 已知 $x^5-5qx+4r$ 能被$(x-c)^2$ 整除,求证:$r^4=q^5$.

第三讲　对称式和轮换对称式

竞赛热点、考点、知识点

1. 对称多项式

对于一个含有多个字母的多项式，如果将多项式中所含的任意两个字母互换，所得到的新多项式仍然与原多项式相同，那么这个多项式叫做关于这些字母的对称多项式.

例如，$x+y+z$，无论是 x 与 y 互换，或 y 与 z 互换，还是 x 与 z 互换，所得到的多项式仍为 $x+y+z$，所以 $x+y+z$ 是对称多项式. 再如 $(x+y)^6+x^3y^3$，互换 x 与 y，而多项式不变，故它也是对称多项式. $x+y+z$，$xy+yz+xz$，xyz 称为三元初等对称多项式.

不难证明，两个对称多项式的和、差、积仍是对称多项式. 例如，$x^3+y^3+z^3$ 是对称多项式，$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$ 也是对称多项式，可以证明它们的和、差、积都是对称多项式.

2. 轮换对称多项式

一个含有多个字母的多项式，把其中所含的字母按某种顺序（一般按字母表的先后顺序）排列后，把第一个字母换成第二个字母，第二个字母换成第三个字母，依次类推，并把最后一个字母换成第一个字母，如果所得到的多项式与原多项式相等，则称原多项式是关于这些字母的轮换对称多项式.

例如，$ab^2+bc^2+ca^2$，按 a、b、c 顺序依次轮换，变成 $bc^2+ca^2+ab^2$，仍与原多项式相等，所以 $ab^2+bc^2+ca^2$ 是关于 a、b、c 的轮换对称多项式.

容易看出，对称多项式一定是轮换对称多项式. 但轮换对称多项式不一定是对称多项式. 如 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ 是轮换对称多项式，但不是对称多项式，不过，只含有两个字母的轮换对称多项式都是对称多项式.

两个轮换对称多项式的和、差、积仍是轮换对称多项式.

由于对称多项式和轮换对称多项式的特殊性，它们的因式分解也有其特殊方法. 因为如果一个对称（或轮换对称）多项式有一个次数较低的因式，那么与这个因式同类型的式子也是原多项式的因式. 这样就可以借助因式定理和待定系数法进行因式分解.

典 型 例 题 精 讲

例 1　已知 $\alpha=x_1+x_2+x_3$，$\beta=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$，$\gamma=x_1x_2x_3$. 用 α，β，γ 表示出对称多项式 $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$.

解

$$\begin{aligned}
&x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2\\
&=x_1(x_1x_2+x_1x_3)+x_2(x_1x_2+x_2x_3)+x_3(x_1x_3+x_2x_3)\\
&=x_1(\beta-x_2x_3)+x_2(\beta-x_1x_3)+x_3(\beta-x_1x_2)\\
&=x_1\beta+x_2\beta+x_3\beta-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)\beta-3\gamma\\
&=\alpha\beta-3\gamma.
\end{aligned}$$

说明　任一个三元（字母为 x_1,x_2,x_3）对称多项式都能用三元初等对称多项式 α，β，γ 表示出来. 在求表达式时，要对原式进行“凑”、“配”.

例 2 把 $x^4+(x+y)^4+y^4$ 分解因式.

分析 这是一个二元对称多项式,分解因式时,一般先将该式用 $x+y, xy$ 表示出来,再进行分解.

解
$$\begin{aligned} x^4+(x+y)^4+y^4 &=(x^4+y^4)+(x+y)^4 \\ &=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4 \\ &=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2+(x+y)^4 \\ &=2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2 \\ &=2[(x+y)^2-xy]^2 \\ &=2(x^2+xy+y^2)^2. \end{aligned}$$

例 3 分解因式:$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$.

分析 这是一个五次对称多项式,只要找到它的一个因式,就能找出它同类型的另两个因式.如果在多项式中令 $a=-b$,则原式 $=c^5-c^5=0$,根据因式定理,则 $a+b$ 是原式的一个因式.于是 $(b+c)$、$(c+a)$ 也是它的因式.

解 因为当 $a=-b$ 时,
$$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5=0,$$
所以原式有因式 $(a+b)(b+c)(c+a)$.由于原式是 5 次对称多项式,根据其特点,可设
$$\begin{aligned} &(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5 \\ =&(a+b)(b+c)(c+a)[k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)]. \end{aligned} \quad ①$$
其中 k、m 是有待确定的系数.令
$$a=1, b=1, c=0,$$
代入①式得 $30=2(2k+m)$,

即 $2k+m=15$.

又令 $a=0, b=1, c=2$,

代入①式得 $210=6(5k+2m)$,

即 $5k+2m=35$.

由此解得 $k=5, m=5$.所以

$(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5=5(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$.

例 4 设 $P=(x+y+z)^{2n+1}-x^{2x+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$($n$ 为正整数),
$$Q=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2+2xyz.$$
求证:Q 是 P 的因式.

证明 P 与 Q 都是齐次对称多项式.当 $x=-y$ 时,有
$$P=z^{2n+1}-(-y)^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}=0,$$
$$Q=(-y)^2y+(-y)y^2+y^2z+yz^2+z^2(-y)+z(-y)^2=0,$$
所以 $x+y$ 是 P, Q 的一个公因式.

由对称性知,$y+z, z+x$ 也是 P, Q 的公因式.

因为 Q 是三次齐次对称多项式,故 $Q=k(x+y)(y+z)(z+x)$,易知 $k=1$,即
$$Q=(x+y)(y+z)(z+x).$$
从而 Q 是 P 的因式.

能力训练习题

1. 分解因式$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

2. 分解因式 $xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)$.

3. 求证：

$$\frac{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{16}+\frac{4b^2a^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{16}+\frac{4c^2b^2-(-a^2+b^2+c^2)^2}{16}$$

$=3s(s-a)(s-b)(s-c)$,其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

4. 化简$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$.

5. 分解因式　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.