概率论与数理统计

主编　徐文科　仲莉娜
主审　温广玉

东北林业大学出版社

概率论与数理统计

主编　徐文科　仲莉娜
主审　温广玉

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/徐文科，仲莉娜主编．—3版．哈尔滨：东北林业大学出版社，2003.8

ISBN 7-81076-003-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．①徐…②仲…　Ⅲ．①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第043812号

责任编辑：卢　伟
封面设计：徐洪权

NEFUP

概率论与数理统计
Gailülun Yu Shuli Tongji
主　编　徐文科　仲莉娜
主审　温广玉

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路26号）
黑龙江省地质测绘印制中心印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张11.75　字数263千字
2003年8月第3版　2003年8月第1次印刷
印数1—3 730册

ISBN 7-81076-003-3
O·45　定价：15.00元

《概率论与数理统计》编委会

主　编　徐文科　仲莉娜

副主编　曲智林　顾凤岐　祝新宇

参　编　王文龙　顾海燕　胡　琳

　　　　武秀敏　于书鹏

主　审　温广玉

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律及其应用的学科，它理论深刻，内容丰富，在林业生产和科研实践中有着广泛的应用，是林业院校各本专科专业必不可少的一门基础课程。

目前出版的概率论与数理统计教材很多，它们各有特色，质量也很高，但多年教学实践使我们感到这些教材与林业专业的教学还不能完全适应，为此我们编写了这本教材。

本书由东北林业大学、北华大学、黑龙江大学和伊春广播电视大学部分多年从事概率论与数理统计课程教学的教师共同编写，由徐文科、仲莉娜同志任主编，曲智林、顾凤岐、祝新宇同志任副主编，参加编写的还有王文龙、顾海燕、胡琳、武秀敏、于书鹏等同志。本书的主审温广玉同志认真地审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵的修改意见，才使本书以现在的面目与读者见面。在本书编写过程中还得到了四校有关校系领导的关心和支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，虽经努力，错漏欠妥之处也一定不少，恳请读者不吝指正。

编者

2003 年 6 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象，一类是确定性现象；另一类是随机现象．

在一定条件下必然会出现或必然不会出现的现象称为确定性现象．例如，水在一个大气压下加热到 100 ℃时必然沸腾；向上抛一石子必然下落等等，这些都是确定性现象．

在一定条件下既可能出现也可能不出现的现象称为随机现象．例如，抛一枚质量均匀的硬币，可能正面向上，也可能反面向上．在固定射手、目标和枪支的条件下，其射击结果是可能命中也可能不命中．这些都是随机现象．

对于随机现象，虽然每次试验或观察结果具有不确定性，但在大量重复试验或观察下，其结果却呈现某种规律性，我们称之为随机现象的统计规律性．这种规律恰是本章要研究和揭示的．

§1.1　随机事件

一、随机试验、事件与样本空间

为了研究随机现象的统计规律性，人们总要进行试验与观察．我们把满足如下三个条件的试验或观察称为随机试验：

(1)试验可以在相同条件下重复进行．

(2)试验的所有可能结果不止一个，但却是事先已知的．

(3)每次试验总是出现这些结果中的某一个,但到底是哪一个结果出现预先是不能确定的.

为了研究随机试验,首先要知道这个试验的可能结果有哪些.随机试验可能出现的每一种结果称为基本事件,用 ω 表示.全体基本事件所组成的集合称为样本空间,用 Ω 表示.样本空间的元素即基本事件称为样本点.

对于具体问题,给出样本空间是描述随机试验的第一步.下面看几个例子.

例 1 抛一枚质量均匀的硬币,观察正反面出现的情况.这是个随机试验,其所有可能结果有二个,即样本点有二个:正(正面朝上),反(反面朝上).样本空间

$$\Omega=\{正,反\}$$

例 2 连续两次抛一枚硬币,观察正反面出现的情况.这同样是一个随机试验,样本点有四个:(正,正),(正,反),(反,正),(反,反).括号内的第一个字与第二个字分别表示第一次、第二次抛币的结果.样本空间为

$$\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$$

例 3 一口袋有编号为 $1,2,3,\cdots,n$ 的 n 个球,从中任取一球,观察其编号.这是一个随机试验,可能结果有 n 个,即取得编号为 $1,2,\cdots,n$ 的球.从而样本空间为

$$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$$

上述随机试验的样本空间都只有有限个样本点.

例 4 记录某电话交换台在一段时间内接到的呼唤次数.这个随机试验的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

这个样本空间含有无穷多个样本点,但这些样本点能和自然数建立一一对应关系,我们称它的样本点数为可列个.

例 5 在一批显像管中任取一只测试其使用寿命 t(从显像管开始使用直到损坏为止的时间).这一随机试验的样本空间为

$$\Omega=\{t|0\leqslant t<+\infty\}$$

这个样本空间的样本点也有无穷多个,它们充满了区间 $[0,+\infty)$.我们称这样的样本点数为不可列个.

在随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为随机事件,简称事件,用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.例如在例 2 中"二次都抛得正面朝上"、"至少一次抛得正面朝上",例 3 中"取得的球的号码不小于 6",例 4 中"呼唤次数为 2 次";例 5 中"显像管寿命少于 2 000 h"等,都是随机事件.我们可分别记为:

$A_1=$"两次抛得正面"

$A_2=$"至少一次抛得正面"

$B=$"号码不小于 6"

$C=$"呼唤次数为 2 次"

$D=$"显像管寿命少于 2 000 h"

有了样本空间的概念,就可以用集合来定义事件了.我们将随机事件看做样本点的集合也就是样本空间的子集.例如前面几例:

$A_1=\{(正,正)\}$

$A_2=\{(正,正),(正,反),(反,正)\}$

$B=\{6,7,8,\cdots,n\}$

$C=\{2\}$

$D=\{t:0\leqslant t<2\ 000\}$

样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 作为样本空间的特殊子集也看做事件.由于 Ω 包含所有样本点,故在每次试验中 Ω 必然发

生，因此称 Ω 为必然事件.而在任何一次试验中 $\varnothing$ 永远都不会发生，因此 $\varnothing$ 是不可能事件.这里仍用 Ω 与 $\varnothing$ 表示必然事件与不可能事件.它们可以作为随机事件的两个极端情形.

二、事件的关系与运算

随机试验中的事件都不是孤立的，而是彼此间相互联系的.对于事件间的关系的研究将帮助我们更好地去研究复杂的事件.

1. 子事件，事件相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.如图 1－1 所示.

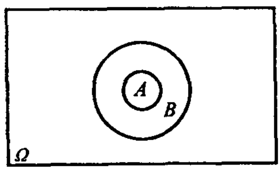

图 1－1

规定对任一事件 A，$\varnothing\subset A$，$\Omega\supset A$.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

2. 事件的和(事件的并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$，如图 1－2 所示.

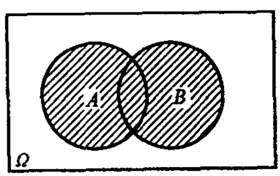

图 1－2

例如在例 3 中，令 $A=$“取得编号数小于 6 的球”，$B=$“取得编号数为小于 10 的偶数的球”，则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8\}$$

3. 事件的积(事件的交)

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件,记为 $A \cap B$,或 AB,如图 1-3 所示.

若在例 5 中取事件 A = "显像管使用寿命不超过 3 000 h", B = "显像管使用寿命多于 1 000 h",则显然有 AB = "显像管寿命 t 满足 $1\ 000 < t \leqslant 3\ 000$".

4. 互斥事件

若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB = \Phi$,则称事件 A 与事件 B 是互斥的事件(或互不相容的事件),简称事件 A 与事件 B 互斥.

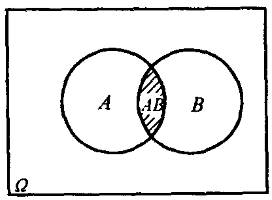

图 1-3

例如在例 3 中令 A = "取编号为偶数", B = "取编号为奇数的球",则 $AB = \Phi$,即 A 与 B 互斥.

5. 对立事件

若两个事件 A、B 满足 $A \cup B = \Omega$, $AB = \Phi$,则称事件 A 与事件 B 对立(或互逆),并称事件 A 是事件 B(B 也是 A)的对立事件(或逆事件、余事件),如图 1-4 所示,记 $A = \overline{B}$(或 $B = \overline{A}$).

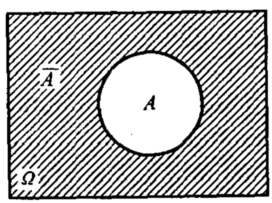

图 1-4

对任一事件 A,显然有

$$A\overline{A} = \Phi, A + \overline{A} = \Omega, (\overline{\overline{A}}) = A$$

例如,例 1 中令 $A=$"正面朝上",则 $\bar{A}=$"反面朝上".

6. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$,如图 1-5 所示.

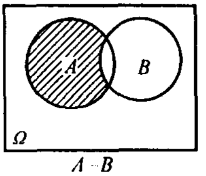

图 1-5

例如,例 3 中令 $A=$"取编号为偶数的球",$B=$"取编号大于 5 的球",则 $A-B=$"取编号为 2、4 的球".

7. 事件的和与积的推广

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生的事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n$,即$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_n$,或记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$为可列无限多个事件,则用$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示$A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$中至少一个发生的事件,并称之为 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$的和.

事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生的事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,即$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 或记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.

若 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$为可列无限多个事件,则用$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示$A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$同时发生的事件,并称之为 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$的积.

我们利用集合的概念描述了事件的概念、关系及运算,现将它们与集合论中相应部分作对照.

符号	概率论	集合论
Ω	必然事件,样本空间	空间(全集)
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件,样本点	集合中的元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	A 是 B 的子事件	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少一个发生	集合 A 与集合 B 的并集
AB	事件 A 与事件 B 都发生	集合 A 与集合 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$AB=\Phi$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 无公共元素

从上表知,事件、事件的关系及运算与集合、集合的关系与运算是相当的,因而由集合的运算性质可推得事件的运算性质如下:

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$

$AB=BA$

(2)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(AB)C=A(BC)$

(3)分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4)对偶原理 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对偶原理对于 n 个事件的和或积同样成立.

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

例 6 随机抽检 3 件产品,设

$A=$“三件中至少一件是次品”

$B=$“三件中至少二件是次品”

$C=$“三件都是正品”

问$\overline{A}$,$\overline{B}$,$A\cup C$,AC,$A-B$各表示什么事件?

解 $\overline{A}=$“三件全部是正品”,显然$A=C$.

$\overline{B}=$“三件中至多一件是次品”.

$A\cup C=\Omega$,即$A\cup C$为必然事件.

$AC=\Phi$,即AC为不可能事件.

$A-B=$“三件中恰有一件次品”.

例 7 用A,B,C将下列诸事件表示出来.在A,B,C三个事件中:

(1)只有A发生;

(2)只有A不发生;

(3)三个事件都发生;

(4)三个事件都不发生;

(5)恰有一个发生;

(6)恰有二个发生;

(7)至少有一个发生;

(8)至少有二个发生;

(9)至多有二个发生.

解 (1)“只有A发生”$=A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2)“只有A不发生”$=\overline{A}BC$;

(3)“三个事件都发生”$=ABC$;

(4)“三个事件都不发生”$=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

(5)“恰有一个发生”$=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}$;

(6)“恰有二个发生”$=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

(7)“至少有一个发生”$=A+B+C$;

(8)“至少有二个发生”$=AB+BC+AC$;