

# 平衡与统计力学

[比] R. Balescu 著

陈光旨 吴宝路 张 奎 安庆吉 译

熊吟涛 校



下册

(桂)新登字 04 号

EQUILIBRIUM AND NONEQUILIBRIUM  
STATISTICAL MECHANICS

RADU BALESCU

JOHN WILEY & SONS, INC. 1975

平衡与非平衡统计力学

(下 册)

[比] R. Balescu 著

陈光旨 吴宝路 译

张 奎 安庆吉

熊吟涛 校

责任编辑: 唐丹宁

封面设计: 温天生

---

广西师范大学出版社出版

邮政编码: 541001

(广西桂林市中华路 36 号)

广西新华书店发行

湖南省地质测绘印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 11.5 插页: 1 字数: 298 千字

1992 年 8 月第 1 版 1992 年 8 月第 1 次印刷

印数: 0001—1000 册

ISBN 7—5633—1311—7/G·1065

---

定价: 8.75 元

## 内 容 简 介

本书系根据 John Wiley & Sons, inc. 1975年出版的《Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics》一书译出,中文译本分上、下册出版。

作者系普里高津学派的一名重要成员,本书是他从事科研和教学工作的成果的一部分。

作者试图对现代统计物理学进行统一表述,平衡与非平衡统计的篇幅基本参半;经典统计与量子统计未严格分开,而是交替使用经典术语和量子术语,这是本书的特色。

全书包括统计力学的一般概念、平衡统计力学和非平衡统计力学三部分,共二十二章。

本书系下册,内容包括:非平衡现象的直观分析、动力学方程和流体力学、动力学方程的本征值和输运系数理论、相关动力学、理想系统的力学和子力学、相互作用系统的力学和子力学、子力学和动力学理论、弱耦合气体随时间的演化等十二章。

本书可供大学理科物理及化学专业师生参考,亦可供工科有关专业及广大自然科学工作者参考。

# 目 录

## (下册)

|                                     |         |
|-------------------------------------|---------|
| 第十一章 非平衡现象的直观分析 .....               | ( 1 )   |
| 11.1 引 言 .....                      | ( 1 )   |
| 11.2 布朗运动理论: 朗之万方程 .....            | ( 2 )   |
| 11.3 无规过程: 福克-普朗克方程 .....           | ( 7 )   |
| 11.4 稀薄气体: 玻耳兹曼方程 .....             | ( 15 )  |
| 11.5 推导玻耳兹曼方程中的假设 .....             | ( 22 )  |
| 11.6 均匀弱耦合气体: 朗道方程 .....            | ( 26 )  |
| 11.7 非均匀等离子体: 符拉索夫方程 .....          | ( 34 )  |
| 11.8 朗道方程和福克-普朗克方程的关系 .....         | ( 38 )  |
| 第十二章 动力学方程和流体力学 .....               | ( 42 )  |
| 12.1 动力学方程的矩方程 .....                | ( 42 )  |
| 12.2 玻耳兹曼 $H$ 定理和熵平衡: 不可逆性与耗散 ..... | ( 47 )  |
| 12.3 碰撞不变量 .....                    | ( 56 )  |
| 12.4 流体动力学平衡方程 .....                | ( 59 )  |
| 12.5 流体力学方程的唯象分析 .....              | ( 63 )  |
| 12.6 流体动力学简正模式 .....                | ( 69 )  |
| 12.7 等离子体力学的简正模式 .....              | ( 74 )  |
| 附录: 碰撞不变量的唯一性定理 .....               | ( 78 )  |
| 第十三章 动力学方程的本征值和输运系数理论 .....         | ( 83 )  |
| 13.1 均匀气体的线性化动力学方程的本征值 .....        | ( 83 )  |
| 13.2 非均匀气体的“正常”态 .....              | ( 89 )  |
| 13.3 非均匀气体的线性化动力学方程的本征值 .....       | ( 93 )  |
| 13.4 输运系数的微观表达式 .....               | ( 103 ) |
| 13.5 输运系数的明确计算 .....                | ( 107 ) |

|      |                                                             |       |
|------|-------------------------------------------------------------|-------|
| 13.6 | 非均匀等离子体线性化动力学方程的本征值 .....                                   | (112) |
| 第十四章 | 相关动力学 .....                                                 | (125) |
| 14.1 | 经典相关模式的时间演化 .....                                           | (125) |
| 14.2 | 经典相关力学 .....                                                | (130) |
| 14.3 | 量子相关力学 .....                                                | (136) |
| 第十五章 | 理想系统的力学和子力学 .....                                           | (149) |
| 15.1 | 未微扰的刘维方程的解 .....                                            | (149) |
| 15.2 | 预解算符 .....                                                  | (153) |
| 15.3 | 真空和相关: 子力学的概念 .....                                         | (155) |
| 第十六章 | 相互作用系统的力学和子力学 .....                                         | (163) |
| 16.1 | 刘维方程的形式解 .....                                              | (163) |
| 16.2 | 关于不可逆性的动力论纲要 .....                                          | (168) |
| 16.3 | 预解算符的进一步变换: 不可约演化算符 $\tilde{\mathcal{E}}(z)$<br>——主方程 ..... | (174) |
| 16.4 | $\Pi$ 算符的构造 .....                                           | (179) |
| 附录1: | 关系式 $\Sigma(t) = \Pi \mathcal{U}(t)$ 的证明 .....              | (189) |
| 附录2: | 关系式 $\Pi^2 = \Pi$ 的证明 .....                                 | (191) |
| 第十七章 | 子力学和动力学理论 .....                                             | (198) |
| 17.1 | 相关动力学分量 .....                                               | (198) |
| 17.2 | 一般动力学方程 .....                                               | (203) |
| 17.3 | 与时间无关的泛函关系式 .....                                           | (207) |
| 17.4 | 分布矢量的非动力学分量的演化 .....                                        | (210) |
| 17.5 | 子力学的初值问题 .....                                              | (212) |
| 17.6 | 空间均匀态 .....                                                 | (214) |
| 17.7 | 平衡态 .....                                                   | (217) |
| 17.8 | 非平衡定态 .....                                                 | (219) |
| 第十八章 | 弱耦合气体随时间的演化 .....                                           | (228) |
| 18.1 | 经典动力学方程 .....                                               | (228) |
| 18.2 | 经典动力学相关 .....                                               | (232) |
| 18.3 | 空间均匀的经典弱耦合气体 .....                                          | (234) |

|                          |                       |       |
|--------------------------|-----------------------|-------|
| 18.4                     | 非均匀经典弱耦合气体 .....      | (239) |
| 18.5                     | 分布矢量的非动力学分量 .....     | (243) |
| 18.6                     | 量子动力学方程和动力学相关 .....   | (250) |
| 18.7                     | 空间均匀量子弱耦合气体 .....     | (255) |
| 18.8                     | 量子动力学方程的性质 .....      | (259) |
| 第十九章 从一般体系到具体方程的变换 ..... |                       | (263) |
| 19.1                     | 动力学方程的简化 .....        | (263) |
| 19.2                     | 不可约演化算符的图形表示 .....    | (266) |
| 19.3                     | 动力学方程和相关函数的图形表示 ..... | (271) |
| 第二十章 特殊动力学方程 .....       |                       | (276) |
| 20.1                     | 微扰展开的重排 .....         | (276) |
| 20.2                     | 强相互作用粒子组成的稀薄气体 .....  | (278) |
| 20.3                     | 二体散射理论和玻耳兹曼方程 .....   | (281) |
| 20.4                     | 中等密度气体的动力学方程 .....    | (287) |
| 20.5                     | 偏离平衡的经典等离子体 .....     | (293) |
| 20.6                     | 经典等离子体的动力学方程 .....    | (303) |
| 20.7                     | 其它可解的问题 .....         | (308) |
| 第二十一章 涨落和相关力学 .....      |                       | (319) |
| 21.1                     | 相关函数的定义和分类 .....      | (319) |
| 21.2                     | 输运系数的格林-久保公式 .....    | (324) |
| 21.3                     | 涨落-耗散定理 .....         | (328) |
| 21.4                     | 热输运系数 .....           | (335) |
| 21.5                     | 相关函数中的“长尾” .....      | (342) |
| 21.6                     | 多时刻约化分布函数 .....       | (347) |
| 21.7                     | 二时刻分布函数的力学 .....      | (350) |
| 第二十二章 结束语 .....          |                       | (358) |

## 第十一章 非平衡现象的直观分析

### 11.1 引言

在本书第三部分中，我们的目的在于了解大量分子组成的系统随时间演化的过程。采用适当的初始条件和边界条件，通过解刘维方程，在原则上是能够处理这一问题的。对刘维方程的解进行详细分析应能显示出宏观物理中所观察到的全部特征。这一论点是以下述推断所包含的基本原理为基础的：已知系统在 $t=0$ 时由任意系综分布所描述，就能用经典力学或量子力学的精确定律阐明其后的时间演化过程。该论点意味着不必对力学定律作实质性的修改，就可以解释大量分子集合的整体行为为什么似乎与运动的基本定律相矛盾。

我们主要指的是著名的**不可逆佯谬**，这种佯谬可以列举许多基本事实加以说明。例如，考虑被隔板分为两部分的一只箱子，这两部分均充以同一气体但处于不同的压强。若在 $t=0$ 时抽去隔板，则气体将从高压一边流向低压一边，直到箱内两边压强相等为止。这时气体达到平衡状态，宏观演化过程终止。我们还从未见过相反的流动过程。

另一方面，在无外力时，单个粒子向右的运动不会优于向左的运动。那么，我们又怎样用遵循可逆规律的各个分子的运动来解释整个系统所显示的不可逆演化过程的特定方向呢？

这是一个在上个世纪就很热门而且非常困难的问题。然而，近年来通过对刘维方程的严密分析，人们对它的认识逐渐明确。本书以下的篇幅将致力于这种分析。

不过，本章将首先对几个典型系统作较“传统”的直观分析。从这些初步分析中可以看到，我们所假设的分子运动规律故意偏

离了精确的力学规律,即在论证中的某些地方引入了概率性原理.以后几章的目的就在于解释并证明这种明显违反力学定律的作法是正确的.

尽管存在这种缺陷,但研究这类传统理论仍然是很重要的.它们为从更普遍的理论中得到各类方程指出了正确的方向.另外,这种粗略的方法所得到的基本方程,在它们的适用范围内被证明是完全有效的,而且现在这些方程可从普遍理论推导出来.这一事实本身就是对分子运动论的奠基人,特别是对路德维格·玻耳兹曼的非凡的物理直觉的一种颂扬.

如果接受了本章所提出的分子运动论方程,那么确切地使这些方程所描写的演化过程具体化,以及特别强调这种图象与“普通力学”所给出的图象之间的差异都是很重要的.

在着手讨论更普遍而必然更抽象的理论之前,必须弄清的一个同样重要的问题是:若已知描述系统随时间演化的动力学方程,我们从中能够得到何种信息?又怎样由此方程计算出具有真实物理意义的量?

这两方面将是以下三章的主题.待这些问题弄清之后,就会充分地激励我们对多体系统随时间演化的更基本的规律进行更深入的研究.

## 11.2 布朗运动理论:朗之万方程

我们首先研究一个非平衡统计力学的经典问题:关于重胶态粒子浸在由较轻粒子构成的流体中作布朗运动的问题.我们将看到,处理这个问题的传统方法,很明显地偏离了精确的力学.论证一开始人们就放弃对运动进行精确的描述而代之以慎密的概率定律,这样做很有好处.

让我们来考虑浸入流体中的质量为  $M$  的布朗粒子.若作宏观处理,则流体力学定律告诉我们,粒子在运动中将受到由流体粘

滯性所引起的**摩擦**力，此力与粒子的速度  $v$  成正比。因此，牛顿方程可以写成<sup>①</sup>

$$\dot{v} = -\zeta v \quad (\text{宏观}) \quad (11.2.1)$$

式中摩擦系数  $\zeta$  假定为常数。

然而，我们感兴趣的是更精细的描述。因此还必须在系统力之外再加上所有单个分子对布朗粒子的作用，其结果是要增加一项  $A(t)$ ：

$$\dot{v} = -\zeta v + A(t) \quad (\text{微观}) \quad (11.2.2)$$

每次单个碰撞的效果是使粒子产生一个对其宏观轨道的微小偏离，如果不去追究多体动力学的细节，我们对碰撞唯一能够说的事情就是碰撞数极大且强度和方向非常不规则。与我们最初的印象相反，此论点决不是消极的或者令人失望的。相反，**只要我们愿意放弃对过程的决定性的描述**，它就会为我们应用大数定律和**概率论**提供必要的基础。虽然我们无法确定作为特定时间函数的力  $A(t)$ ，但却能对碰撞在大量相同的宏观情况（即对系综）下的**平均效应**提出合理的假设。同样，虽然我们不能预言布朗粒子在每一时刻  $t$  的速度或位置，但能断定在相同条件下，所进行的大量实验的平均效果。因此，求解方程 (11.2.2) 的总的原则就与传统的关于微分方程的决定性的初值问题不同。方程 (11.2.2) 是一类所谓**随机（或无规）运动方程**的典型例子。此方程以其发现者命名为**朗之万方程**。下面让我们看看如何求解这个方程。

首先必须定量地定义无规函数  $A(t)$ 。我们作如下假定：

1.  $t=0$  时，对具有已知速度  $v_0$  的布朗粒子系综， $A(t)$  的平均值为 0，我们把这一点写成如下形式：

$$\langle A(t) \rangle_{v_0} = 0, \quad t > 0 \quad (11.2.3)$$

这个条件确保布朗粒子的平均速度严格服从宏观规律 (11.2.1)，

---

① 为简单起见，我们仅限于一维情况，推广到三维并不困难。

亦即平均说来, 涨落将彼此抵消.

2. 假设在时间上完全分散的各次碰撞是统计独立的, 我们可以藉此表示无规性概念. 换句话说, 仅当  $t_1$  和  $t_2$  两时刻的时间间隔的数量级为一次碰撞的持续时间  $\tau_c$  时, 这两个时刻的  $A(t)$  值间的相关函数才不为 0. 显然,

$$\langle A(t_1)A(t_2) \rangle_{r_0} = \phi(t_1 - t_2) \quad (11.2.4)$$

式中  $\phi(t)$  是一个峰状函数, 它在  $t=0$  时有很尖锐的峰值, 当  $|t| > \tau_c$  时, 则实际上等于 0 (见图 11.2.1a).

3. 假定随机变量  $A(t)$  的所有高阶矩都可用二阶矩来表示. 更确切地说:

$$\langle A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_{2n+1}) \rangle_{r_0} = 0 \quad (11.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \langle A(t_1)A(t_2) \cdots A(t_{2n}) \rangle_{r_0} \\ &= \sum \langle A(t_1)A(t_2) \rangle_{r_0} \langle A(t_3)A(t_4) \rangle_{r_0} \cdots \langle A(t_{2n-1})A(t_{2n}) \rangle_{r_0} \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

此方程中  $\sum$  是对  $2n$  个变量  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{2n}$  分成  $n$  对的所有不同分法求和. 可以证明, 这一假设与  $A(t)$  按高斯定律分布的假设是等价的, 而高斯定律是与概率论的大数定律 (或中心极限定理) 相联系的.

现在我们能够很容易地求解朗之万方程. 假定布朗粒子开始在  $t=0$  时具有速度  $v_0$ , 若将 (11.2.2) 式当作一个常微分方程, 它的解应该是

$$v = v_0 e^{-\zeta t} + e^{-\zeta t} \int_0^t d\tau e^{\zeta \tau} A(\tau) \quad (11.2.7)$$

按照现在的情况, 由于  $A(t)$  不知道, 上述方程是无用的. 但若将所有各项对以上定义的系综取平均, 并利用假设 (11.2.3) 式便得到

$$\langle v \rangle_{r_0} = v_0 e^{-\zeta t} \quad (11.2.8)$$

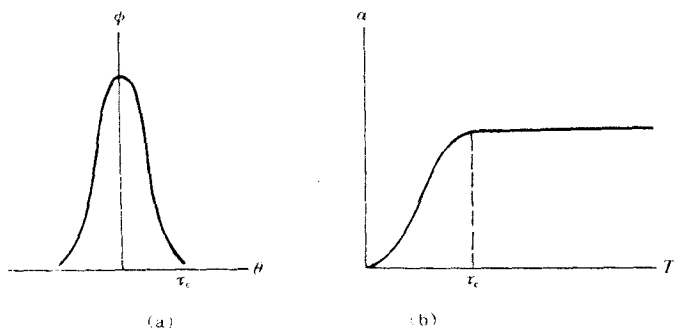


图 11.2.1

(a) 方程 (11.2.4) 中函数  $\phi(\theta)$  的曲线图;

(b) 方程 (11.2.10) 中函数  $\alpha(T)$  的曲线图

这也就是宏观方程 (11.2.1) 的解, 也是意料中的结果. 更有意义的是速度的平方平均值. 将 (11.2.7) 式右边平方并取平均, 我们得到

$$\langle v^2 \rangle_{r_0} = v_0^2 e^{-2ct} + e^{-2ct} \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 e^{c(\tau_1 + \tau_2)} \langle A(\tau_1) A(\tau_2) \rangle_{r_0} \quad (11.2.9)$$

现在作积分变量的变换:

$$\tau_1 + \tau_2 = \xi, \quad \tau_2 - \tau_1 = \theta$$

再利用 (11.2.4) 式并引入函数  $\alpha(T)$ :

$$\alpha(T) = \int_{-T}^T d\theta \phi(\theta) \quad (11.2.10)$$

通过初等计算即可得到:

$$\begin{aligned} J(t) &\equiv \int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 e^{c(\tau_1 + \tau_2)} \langle A(\tau_1) A(\tau_2) \rangle_{r_0} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\xi e^{c\xi} \alpha(\xi) + \frac{1}{2} \int_t^{2t} d\xi e^{c\xi} \alpha(2t - \xi) \quad (11.2.11) \end{aligned}$$

函数  $\alpha(T)$  的行为给我们一个求此积分近似值的启示 (见图 11.2.1). 我们曾假定  $\phi(\theta)$  在  $\theta=0$  附近有极尖锐的峰, 而在  $\theta > \tau_c$

时实际下降为零, 这意味着它的积分  $\alpha(T)$  在  $t \sim \tau_c$  时达到一个恒定值  $\alpha \equiv \alpha(\infty)$ . 因此如果我们关心的是比一次碰撞持续时间长得多的时间  $t$ , 则在方程 (11.2.11) 右边可用恒定的渐近值  $\alpha$  代替  $\alpha(\xi)$  和  $\alpha(2t-\xi)$  而不会有明显的误差. 实际上, 仅在靠近  $\xi=0$  (对第一项积分) 和  $\xi=2t$  (对第二项积分) 的很小范围内宽度为  $\tau_c$ , 精确的被积函数才与近似的被积函数不一致. 所以, 当  $t \gg \tau_c$  时, 我们可以近似地写成

$$J(t) \approx \frac{1}{2} \alpha \int_0^{2t} d\xi e^{-2\xi} = \alpha \frac{e^{-2t} - 1}{2\zeta} \quad (11.2.12)$$

代入方程 (11.2.9) 便有

$$\langle v^2 \rangle_{r_0} = v_0^2 e^{-2\zeta t} + \frac{\alpha}{2\zeta} (1 - e^{-2\zeta t}) \quad (11.2.13)$$

这个公式本身是很有意义的. 它表明, 在  $t \ll (2\zeta)^{-1}$  的短暂时间内, 速度的涨落主要由初值  $v_0^2$  决定. 但经较长时间之后, 初值的影响便逐渐消失, 速度的平方平均值趋近于  $\alpha/2\zeta$ , 此值由碰撞机制唯一地决定而与初速度无关.

为了完善这一理论, 我们应该用一组分子参数来计算常数  $\alpha$  的值. 但是很显然, 我们的假设只有定性的性质, 因此它解决不了这样的问题. 然而, 我们可以通过下述“欺骗”方式, 避开通过基本原理来计算  $\alpha$  的困难. 我们有充分的理由相信, 演化过程的终点对应着流体温度为  $T$  的热平衡态.

在这种状态, 粒子的均方速度由能量均分定理确定 (见 5.2 节). 因此, 我们可以要求

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle v^2 \rangle_{r_0} \equiv \frac{\alpha}{2\zeta} = \frac{k_B T}{M} \quad (11.2.14)$$

借助于这个必要条件, 我们得到

$$\langle v^2 \rangle_{r_0} = \frac{k_B T}{M} + \left[ v_0^2 - \frac{k_B T}{M} \right] e^{-2\zeta t} \quad (11.2.15)$$

这个公式完成了我们的计算<sup>①</sup>。它以极其简明的形式描述了布朗粒子如何通过同流体粒子的碰撞作用而忘却其初始速度，并且被驱向平衡。在此例中，不可逆演化的所有因素都出现了。

不过，应该明白，布朗运动的传统理论只是一种半唯象的理论，最终的平衡并未**推导**出来，而是**硬塞**到理论中去的。确定演化时间尺度的重要参数 $\zeta$ 被假定是已知的，正如常数 $\alpha$ 一样，它掩盖了一切涉及到碰撞机制的复杂的动力学过程。

最后应该强调另一个方面，它在不可逆理论中是很重要的，而且以后还会遇到。在计算(11.2.11)式中的积分时，我们曾使用一个仅当**时间充分长**( $t \gg \tau_c$ )才适用的近似。因此，有必要将简单的方程(11.2.13)看成是一种**渐近**的结果。可以说(11.2.13)式不代表精确的运动(即使从一开始就接受简化假设)。相反，我们必须将它看成是一个“粗粒的”或“时间光滑”的图象，在此图象中运动的细节(在时间尺度 $\tau_c$ 内)已经抹掉。人们有理由认为通过时间光滑的手段已经将不可逆性明确地引入到理论中去了。以后我们就会看到，应该怎样在更普遍的框架内理解这个概念。

### 11.3 无规过程：福克-普朗克方程

布朗运动问题是应用**无规过程**或**随机过程**一般理论的一个特例。许多其它问题也可以应用这种理论以半唯象的方式加以处理。反过来讲，以后将证明，多体问题的精确分析证明这些方法在许多重要场合都是有效的。因此，回顾一下某些随机过程理论的一般概念和方法是很有意义的。

令 $y$ 代表我们感兴趣的变量。例如，它可以是布朗粒子的坐标或速度，也可以是有噪声的电路中的电流。如果 $y$ 是一种决定性的

---

<sup>①</sup> 我们没有计算 $\rho$ 的高阶矩，它非常类似于此处详细讨论的计算方法。当然，方程(11.2.5)和(11.2.6)在这种研究中起着重要作用。

量, 则给定了  $t=0$  时的适当的初始数据, 我们便可以构造一个时间函数  $y(t)$ , 此函数能够确定  $y$  在每一时刻  $t$  的数值. 可是, 如果  $y$  是一个无规变量, 这样的函数就不复存在了. 在每一给定时刻, 变量  $y$  可以取其变化范围内的任何数值. 然而, 对时刻  $t$  的每个可能值都赋予一定的几率, 该几率可在 0 与 1 之间任取一值. 当我们假设  $y$  是一个连续变量时, 用几率密度来表达是简便易行的. 确切地说, 如果发现变量的值处于无限小间隔  $(y; y+dy)$  内的几率为  $W(y;t)dy$ , 我们就说无规变量  $y$  在  $t$  时刻具有几率密度  $W(y;t)$ .

要得到无规过程的直观概念, 可以考察图 11.3.1. 在相继的一些时刻内,  $y$  的最可几值已用较大的黑点画出. 我们可以从这个图象中选出一条最可几轨迹, 但决不排除存在着两条或更多的等几率轨迹的可能性.

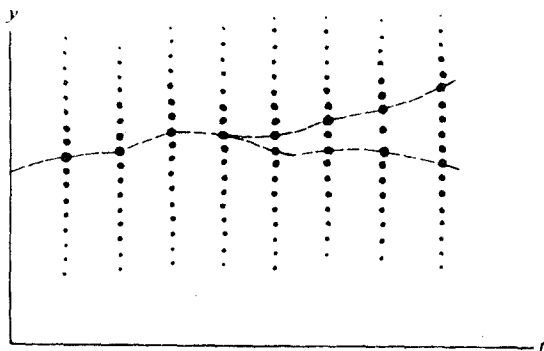


图 11.3.1 无规过程的图示

(图中较大的黑点代表  $y$  的最可几值, 虚线是几率最大值的轨迹)

另一方面, 为了描述过程的特征, 只知道几率密度  $W_1(y;t)$  一般是不够的. 如果我们凑巧知道  $t_1$  时刻变量的值为  $y_1$ , 这个信息将影响它在  $t_2$  时刻取  $y_2$  值的几率. 因为各个点不一定是独立的 (即  $t_1$  时刻取什么值和  $t_2$  时刻取什么值之间存在相关性). 换句话说, 在  $t_1$  时刻发现  $y_1$  值和  $t_2$  时刻发现  $y_2$  值的**联合几率密度**  $W_2(y_2; t_2|y_1; t_1)$  未必能从  $W_1(y_1; t_1)$  中推断出来. 因此, 要完善地描述无

规过程的特征，原则上我们必须指出所有的联合几率  $W_1(y_1; t_1)$ ,  $W_2(y_2; t_2 | y_1; t_1)$ ,  $W_3(y_3; t_3 | y_2; t_2 | y_1; t_1)$  等等直到无穷<sup>①</sup>。

读者立刻会注意到，在这一点上，与第三章讨论过的约化分布函数问题类似，不过，还是稍有差异：这里的几率涉及到不同时刻发生的事件。函数  $W_n$  必须具备某些明显的特性：

(a)  $W_n \geq 0$ ，因为它们是几率密度。

(b) 就变量组  $(y_1; t_1)$  同其它变量组之间的置换而言， $W(y_n; t_n | y_{n-1}; t_{n-1} | \dots | y_1; t_1)$  必须是对称的，这可从  $W_n$  代表联合几率的概念得到。

(c)  $W_n$  必须与所有较低阶的联合几率相容：

$$\int dy_{k+1} \dots dy_n W_n(y_n; t_n | \dots | y_1; t_1) = W_k(y_k; t_k | \dots | y_1; t_1) \quad (11.3.1)$$

无论是时刻  $t_{k+1}, \dots, t_n$  取什么值，这个关系对一切  $k < n$  的情况都应该成立。

为了进一步讨论，我们引入无规过程的**分类**。这种分类的想法在于，人们可以设想，在某些情况下，为了表征问题，只需知道一个、两个或有限个  $W_n$  就足够了。换句话说，在一定的情况下，较高阶的  $W_n$  可以表示成一些较低阶  $W_n$  的组合。这里的思想和 3.3 节及 7.4 节所叙述的作为约化分布函数序列截断程序的基础的思想是相同的。不过，我们不打算系统地详尽地研究这种分类，而仅仅讨论前两类。

最简单的情况是（有时称为**纯无规过程**），知道  $W_1(y; t)$  就足以解决问题。特别是以下的情况：

---

① 极限情况相当于将时间轴分为越来越小的间隔，并相应地说明越来越高阶的联合几率。因此，完整的描述是赋予  $y-t$  平面上每一条路径以一定的几率，几率密度则成为函数  $y(t)$  的一个泛函  $W\{y(t)\}$ （见 7.5 节）。无规过程理论实际上是（主要由维纳（Wiener）建立的）泛函积分这一数学技术发展的起点，在本书的框架内，我们不能论述这些有兴趣的问题。

$$W_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) = W_1(y_2; t_2) W_1(y_1; t_1) \quad (11.3.2)$$

这样, 时间上的相关性在这里便完全不存在了. 然而, 在连续的物理过程中, 这将是—个很不现实的假设; 实际上, 对于足够短的时间间隔来讲, 相继事件之间必然存在着因果关系 [参见我们较早的假设(11.2.4)].

第二个最简单情况在统计物理中具有十分重要的意义, 它被称为**马尔可夫过程**. 这时, 全部信息都包含在前两个函数  $W_1$  和  $W_2$  中. 为了精确表征这种过程, 引入由下述关系定义的**跃迁几率**  $w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1)$  的概念是方便的:

$$W_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) = w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) W_1(y_1; t_1) \quad (11.3.3)$$

定义  $w_2$  的这个关系告诉我们, 在  $t_1$  时刻发现  $y_1$  及在  $t_2$  时刻发现  $y_2$  的联合几率密度等于在  $t_1$  时刻发现  $y_1$  的几率密度与在时间  $t_2 - t_1$  内从  $y_1$  跃迁到  $y_2$  的几率的乘积.

前述关系式(a)和(c)则意味着  $w_2$  具有下述性质:

$$(a') \quad w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) \geq 0 \quad (11.3.4)$$

$$(b') \quad \int dy_2 w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) = 1 \quad (11.3.5)$$

$$(c') \quad W_1(y_2; t_2) = \int dy_1 w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) W_1(y_1; t_1) \quad (11.3.6)$$

此外, 我们还考虑第  $n$  阶跃迁几率

$$w_n(y_n; t_n | y_{n-1}; t_{n-1} | \cdots | y_1; t_1)$$

这几率被定义为已知在  $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1$  各时刻  $y$  的值分别为  $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ , 而在  $t_n$  时刻发现  $y$  值为  $y_n$  的**条件几率密度**. 这里假定时间序列的顺序为  $t_n > t_{n-1} > t_{n-2} > \cdots > t_1$ . 现在我们准备用下述条件定义马尔可夫过程:

$$w_n(y_n; t_n | y_{n-1}; t_{n-1} | \cdots | y_1; t_1) = w_2(y_n; t_n | y_{n-1}; t_{n-1}), n \geq 2 \quad (11.3.7)$$

此方程意味着在马尔可夫过程中, 从  $t_{n-1}$  时刻的  $y_{n-1}$  值到  $t_n$  时刻的  $y_n$  值的跃迁几率 (除了  $y_n, t_n$  之外) 只与跃迁时刻  $t_{n-1}$  的  $y$  值有关,

与系统以前的历史完全无关。

不难验证, 当  $n \geq 3$  时马尔可夫过程的联合几率密度  $W_n$  都可以用  $W_2$  和  $W_1$  来表示. 例如:

$$\begin{aligned} W_3(y_3; t_3 | y_2; t_2 | y_1; t_1) &= w_3(y_3; t_3 | y_2; t_2 | y_1; t_1) W_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) \\ &= w_2(y_3; t_3 | y_2; t_2) W_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) \\ &= \frac{W_2(y_3; t_3 | y_2; t_2) W_2(y_2; t_2 | y_1; t_1)}{W_1(y_2; t_2)} \quad (11.3.8) \end{aligned}$$

利用方程(11.3.1)和(11.3.8)可以写出

$$\begin{aligned} W_2(y_3; t_3 | y_1; t_1) &= \int dy_2 W_3(y_3; t_3 | y_2; t_2 | y_1; t_1) \\ &= \int dy_2 w_2(y_3; t_3 | y_2; t_2) w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) W_1(y_1; t_1) \end{aligned}$$

结合(11.3.3)式我们得到

$$w_2(y_3; t_3 | y_1; t_1) = \int dy_2 w_2(y_3; t_3 | y_2; t_2) w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) \quad (11.3.9)$$

跃迁几率所遵从的这个重要的积分方程常用来作为马尔可夫过程的定义. 它被称为**查普曼-哥尔莫戈洛夫** (Chapman-Kolmogorov) 方程(有时称为**斯莫卢绰夫斯基方程**). 此方程的物理意义是清楚的. 从  $t_1$  时刻的  $y_1$  到  $t_3$  时刻的  $y_3$ , 其跃迁几率可以这样计算<sup>①</sup>, 用跃迁至某一中间时刻  $t_2$  具有值  $y_2$  的几率乘以由  $y_2$  跃迁到  $t_3$  时刻具有  $y_3$  的几率, 然后对所有可能的中间值求和.

现在让我们专门讨论一种物理上的重要情况, 其跃迁几率  $w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1)$  与跃迁发生的时刻  $t_1$  无关而只与时间间隔  $t_2 - t_1$  有关<sup>②</sup>:

$$w_2(y_2; t_2 | y_1; t_1) = w(y_2 | y_1; t_2 - t_1) \quad (11.3.10)$$

我们现在来证明, 在某些假设下, 可以导出跃迁几率  $w$  的偏微分

① 此句原文误为“从  $t_1$  时刻的  $y_1$  到  $t_2$  时刻的  $y_2$  其跃迁……”这里已经改正——译者注.

② 因为双事件跃迁几率  $w_2$  是马尔可夫过程中唯一独立的跃迁几率, 下标 2 显然是多余的, 以后将省掉.