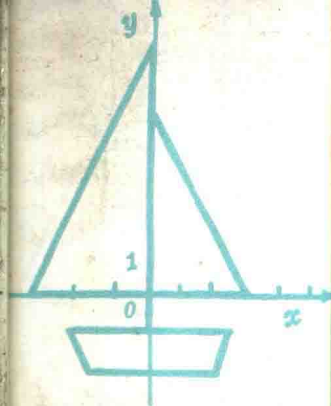
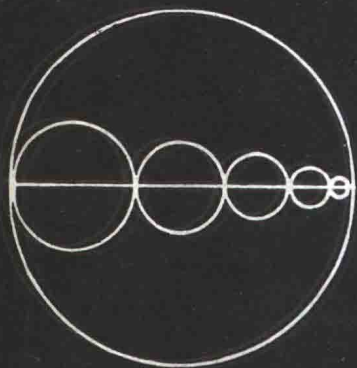
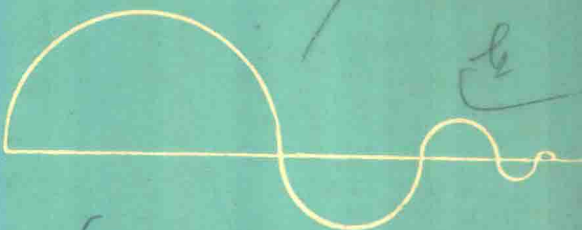


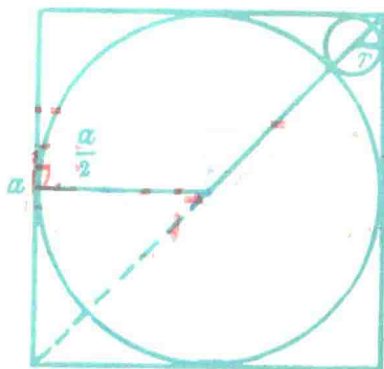
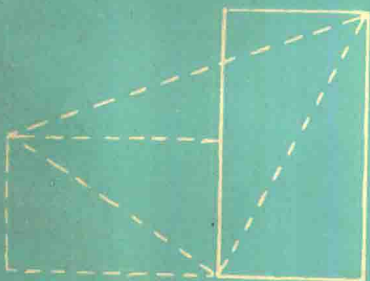


G633.6 / 28.5



# 中学数学 实验教材

第五册 上



北京师范大学出版社

## 前 言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产，特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限、连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积，

表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计），几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证

几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校，北京师院附中，上海大同中学，天津南开中学，天津十六中学，广东省实验中学，华南师院附中，长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾多次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八一年三月

# 目 录

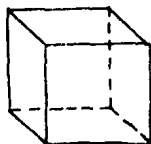
|                           |         |
|---------------------------|---------|
| <b>第一章 直线和平面</b> .....    | ( 1 )   |
| § 1 空间图形.....             | ( 1 )   |
| § 2 集合运算.....             | ( 18 )  |
| § 3 平 面.....              | ( 26 )  |
| § 4 直线与直线的位置关系.....       | ( 37 )  |
| § 5 直线与平面的位置关系.....       | ( 45 )  |
| § 6 平面与平面的位置关系.....       | ( 69 )  |
| § 7 空间的对称性.....           | ( 86 )  |
| § 8 章末提示.....             | ( 90 )  |
| <b>第二章 柱、锥、台、球</b> .....  | ( 99 )  |
| § 1 柱、锥、台、球的定义及性质.....    | ( 99 )  |
| § 2 柱、锥、台、球的全面积和部分面积..... | ( 141 ) |
| § 3 柱、锥、台、球的体积和祖暅原理.....  | ( 172 ) |
| § 4 附录 圆锥曲线.....          | ( 208 ) |
| <b>第三章 向量与向量运算</b> .....  | ( 213 ) |
| § 1 平面位移向量及其加法运算.....     | ( 213 ) |
| § 2 相似与向量的倍积.....         | ( 230 ) |
| § 3 长度、角度与内积运算.....       | ( 238 ) |
| § 4 空间向量及其运算.....         | ( 248 ) |
| <b>第四章 向量几何初步</b> .....   | ( 268 ) |
| § 1 平行与相似.....            | ( 268 ) |

# 第一章 直线和平面

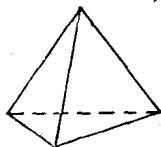
## §1 空间图形

在初中几何课中，我们讨论的几何图形和几何问题，主要局限在一个平面上。然而，我们生活着的现实世界却是具有长、宽、高的所谓“三维空间”。而平面只是我们生活空间的某个断面。我们日常所见的形体，如桌椅、房屋、球、漏斗等等，它们并不局限在一个平面上，都是立体的。为了精确地认识这些实际存在的形体，以便为我们的生产和生活服务，我们必须学习有关空间图形的知识。

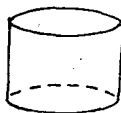
我们知道平面图形是同一平面上的点的集合，而**空间图形**却是**不全在同一平面上的点的集合**。例如正方体、三棱锥、圆柱、球等都是空间图形。空间图形也叫立体图形。我们将在平面几何知识的基础上，来研究空间图形的性质、画法以及有关的计算和应用。



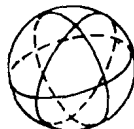
立方体



三棱锥



圆柱



球

图 1.1

空间图形是在平面上（纸上）画出来的表示立体的图。如在图 1.1 中，各图都表示出了某种立体。这种图形叫直观图。除了用直观图表示立体以外，还有其他表示立体的方法，如展开图和投影图等等。下面我们作些简要的介绍。

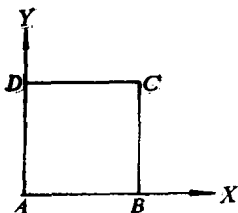
### 1.1 直观图

#### 1. 水平放置的平面图形的画法

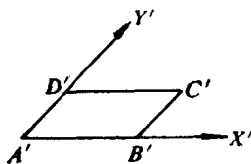
当我们把一个正方形和圆放置在水平位置观察时，我们的视觉会产生一些变化，总觉得它们像平行四边形和椭圆。它们会变成怎样的平行四边形和椭圆呢？由于观察的角度不同，会有不同的形状，这就涉及到了水平平面图形的画法问题，下面就是较常用的两种画法。

##### 第一种画法

例1 画正方形的直观图。



①



②

图 1.2

画法（1）在正方形  $ABCD$  上，分别取  $AB$ 、 $AD$  为  $X$  轴和  $Y$  轴，它们互相垂直于  $A$  点。

画对应的  $X'$  轴和  $Y'$  轴，使  $\angle X' A' Y' = 45^\circ$ 。

（2）在  $X'$  轴上截取  $A' B' = AB$ ，在  $Y'$  轴上截取  $A' D' = \frac{1}{2} AD$

(3) 以  $A'B'$ 、 $A'D'$  为邻边画平行四边形  $A'B'C'D'$  就是正方形  $ABCD$  的直观图。(图 1.2)

例2 画正五边形的直观图。

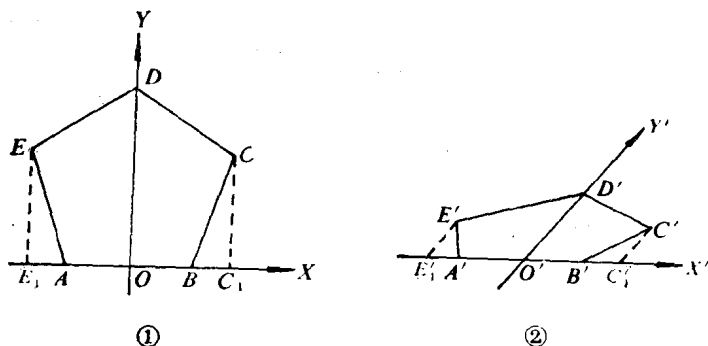


图 1.3

画法 (1) 取正五边形  $ABCDE$  的  $AB$  所在直线为  $X$  轴, 取  $AB$  的中垂线为  $Y$  轴 ( $Y$  轴必过  $D$  点), 两轴交于  $O$  点。

(图 1.3①)

画对应的  $X'$  轴,  $Y'$  轴, 使  $\angle X'O'Y' = 45^\circ$

(2) 作  $CC_1 \perp X$  轴于  $C_1$ , 作  $EE_1 \perp X$  轴于  $E_1$ , 在  $X'$  轴上取  $A'B' = AB$ , 且使  $O'$  为  $A'B'$  中点, 并在  $X'$  轴上分别取  $C_1'$  点和  $E_1'$  点, 使  $O'C_1' = OC_1$ ,  $O'E_1' = OE_1$ 。

(3) 在  $Y'$  轴上截取  $O'D' = \frac{1}{2}OD$ , 并引  $E_1'E' \parallel O'Y'$ , 且使  $E_1'E = \frac{1}{2}E_1E$ , 引  $C_1'C' \parallel O'Y'$ , 且使  $C_1'C' = \frac{1}{2}C_1C$ 。

(4) 连结  $A'E'$ 、 $E'D'$ 、 $D'C'$ 、 $C'B'$ , 则五边形  $A'B'C'D'E'$  就是正五边形  $ABCDE$  的直观图。(图 1.3②)

通过上面例题，我们可以得出这种画法的规则如下：

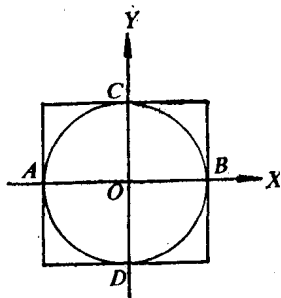
(1) 在图形上取互相垂直的 $X$ 轴、 $Y$ 轴，并画出与之对应的 $X'$ 轴、 $Y'$ 轴，使 $\angle X'O'Y' = 45^\circ$ （或 $135^\circ$ ）， $X'$ 轴和 $Y'$ 轴所确定的平面表示水平平面。

(2) 图形中平行于 $X$ 轴或 $Y$ 轴的线段（包括在轴上的线段）分别画成平行于 $X'$ 轴和 $Y'$ 轴的线段。

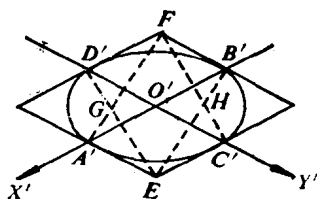
(3) 平行于 $X$ 轴的线段，长度不变；平行于 $Y$ 轴的线段，长度变为原来的一半。

第二种画法

例 画圆的直观图



①



②

图 1.4

圆的直观图是一个椭圆，常采用如下近似画法：

(1) 取 $\odot O$ 的一对互相垂直的直径 $AB$ ， $CD$ 分别为 $X$ 轴、 $Y$ 轴，并画出对应的 $X'$ 轴、 $Y'$ 轴，使 $\angle X'O'Y' = 120^\circ$ 。

(2) 在 $O'X'$ 上取 $O'A' = OA$ ，并取 $A'$ 关于 $O'$ 的对称点 $B'$ ，然后在 $O'Y'$ 轴上取 $O'C' = OC$ ，并取 $C'$ 关于 $O'$ 的对称点 $D'$ 。

(3) 过 $A'$ 、 $B'$ 作 $O'Y'$ 的平行线, 过 $C'$ 、 $D'$ 作 $O'X'$ 的平行线, 所作四条直线交出一个菱形, 设 $E$ 、 $F$ 是菱形关于 $O'$ 点对称的顶点。

(4) 连 $ED'$ 、 $FA'$ , 交于 $G$ ; 连 $EB'$ 、 $FC'$ 交于 $H$ 。

(5) 以 $E$ 为心, 以 $ED'$ 为半径, 作 $\widehat{D'B'}$ , 以 $F$ 为心, 以 $FA'$ 为半径作 $\widehat{A'C'}$ , 以 $G$ 为心, 以 $GA'$ 为半径作 $\widehat{D'A'}$ , 以 $H$ 为心, 以 $HC'$ 半径作 $\widehat{B'C'}$ , 则此四弧连接成一个近似椭圆。(图1.4②)

从上述画法中, 我们看出圆的中心 $O$ , 变成了椭圆的中心 $O'$ , 圆的一对互相垂直的直径(如 $AB$ 、 $CD$ )变成椭圆的一对直径(如 $A'B'$ 、 $C'D'$ ), 它们叫做椭圆的共轭直径, 实际上如果知道了一对椭圆的共轭直径, 就可以把椭圆近似地画出来了。

更省事的办法是用椭圆模板(图1.5)经过椭圆的一对共轭直径端点来画椭圆。

从上例中可以看到: 第二种画法与第一种画法不同的, 只是 $\angle X'O'Y' = 120^\circ$ ; 并且平行于 $Y$ 轴的线段的长度不变。

注意: 直观图画好以后, 要擦去辅助线。

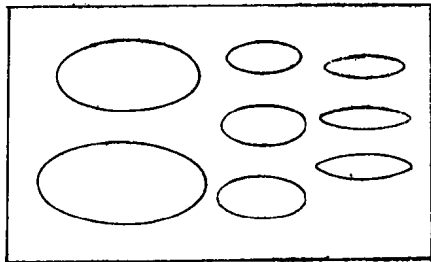


图 1.5

## 练 习

1. 任意画一个三角形,然后用两种方法画出它们的直观图.
2. 任意画一个长方形,然后用两种方法画出它们的直观图.
3. 已知椭圆的一对共轭直径 $AA'$ 、 $BB'$ ,近似地画出这个椭圆.
4. 画一个边长为 $1.5\text{cm}$ 的正六边形,然后用两种方法画出它的直观图.

(注意:以上练习只要求精确而美观地画出图形,不求写作法.)

### 2. 空间形体的直观图

**例1** 画一个长、宽、高分别为 $3\text{cm}$ 、 $2\text{cm}$ 和 $1.5\text{cm}$ 的长方体的直观图.

第一种画法:

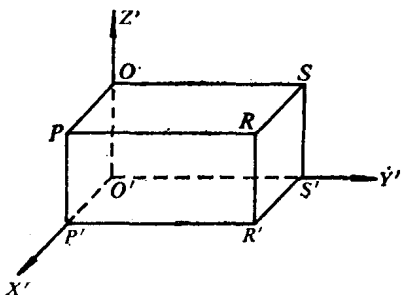


图 1.6

画法:

(1) 在水平平面上画 $X'$ 轴和 $Y'$ 轴,两轴交于 $O'$ 点,且使 $\angle X'O'Y' = 135^\circ$ .

(2) 在  $O'X'$  上取  $O'P' = 1\text{cm}$ , 在  $O'Y'$  上取  $O'S' = 3\text{cm}$ , 作  $S'R' \parallel O'X'$ ,  $P'R' \parallel O'Y'$ , 则平行四边形  $O'P'R'S'$  为已知长方体的底面的直观图。

(3) 过  $O'$  点作  $Z'$  轴垂直于  $Y'$  轴, 并在  $O'Z'$  上取  $OO' = 1.5\text{cm}$ , 过  $P'$ 、 $R'$ 、 $S'$  分别作  $PP' \parallel O'Z'$ ,  $RR' \parallel O'Z'$ ,  $SS' \parallel O'Z'$ , 并且,  $PP' = RR' = SS' = 1.5\text{cm}$ 。

(4) 连  $OP$ 、 $PR$ 、 $RS$ 、 $SO$ , 则  $PRSO - P'R'S'O'$  为已知长方体的直观图。(图1.6)

### 第二种画法

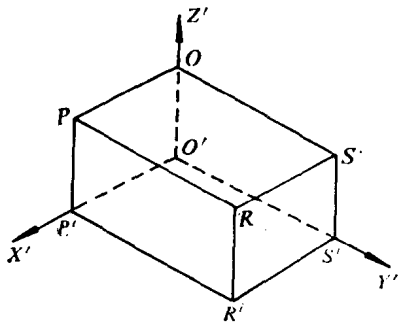


图 1.7

画法:

(1) 作  $\angle X'O'Y' = 120^\circ$ , 并取  $X'$  轴和  $Y'$  轴的对称轴  $Z'$  轴为铅直线。

(2) 作已知长方体底面的直观图  $O'P'R'S'$ , 在  $O'Z'$  上取  $OO' = 1.5\text{cm}$ 。

(3) 分别过  $P'$ 、 $R'$ 、 $S'$  作  $O'Z'$  的平行线  $PP'$ 、 $RR'$ 、 $SS'$ , 并使  $PP' = RR' = SS' = OO'$ 。

(4) 连结  $OP$ 、 $PR$ 、 $RS$ 、 $SO$ , 则  $OPRS - O'P'R'S'$  为

已知长方体的直观图。(图1.7)

通过例1我们看到,画空间形体的直观图规则是在平面图形的直观图画法的基础上发展起来的.它多了一个 $Z'$ 轴,并且平行于 $Z'$ 轴的线段的平行性和长度都不变.在第一种画法中, $O'X'$ ,  $O'Y'$ ,  $O'Z'$ 中,  $\angle X'O'Y' = 135^\circ$ ,  $\angle Z'O'Y' = 90^\circ$ ,并使 $O'Z'$ 在铅直位置.第二种画法中,使 $\angle X'O'Y' = \angle Y'O'Z' = \angle X'O'Z' = 120^\circ$ ,且使 $O'Z'$ 轴居铅直位置.在两种画法中,平行于 $O'X'$ 轴和 $O'Y'$ 轴的线段长度的变化与画平面图形的直观图的规定相同.在图中, $X'O'Y'$ 表示水平平面, $Y'O'Z'$ 平面和 $X'O'Z'$ 平面都表示直立的平面.

例2 画底面半径为1.5cm,高为2.5cm的圆锥的直观图.  
画法(略)见图1.8.

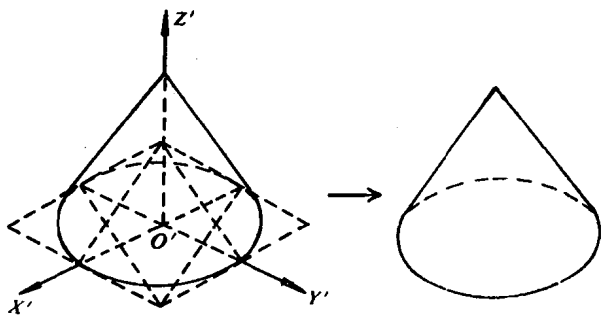


图 1.8

注意1. 如果要画的空间形体中的面上有圆,一般采用第二种画法来画它的直观图.

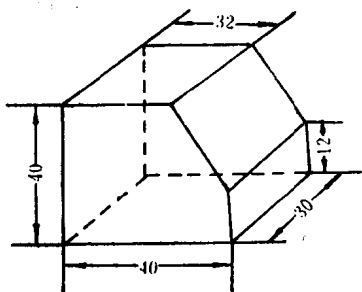
2. 第二种画法画圆的直观图,所得椭圆,由于较

宽，不直观，故有时用较扁的椭圆来代替。

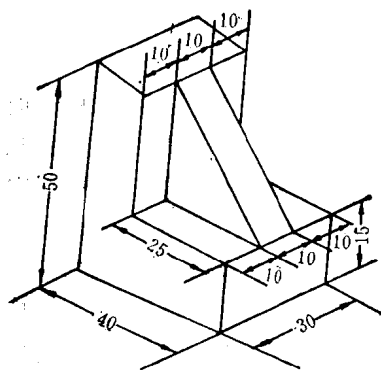
## 练 习

1. 用第一种画法画一个棱长为 $3\text{cm}$ 的立方体的直观图。
2. 用第二种画法画一个长、宽、高分别为 $4\text{cm}$ ， $3\text{cm}$ ， $2\text{cm}$ 的长方体的直观图。
3. 画一个底面半径 $1\text{cm}$ ，高为 $2.5\text{cm}$ 的圆柱的直观图。
4. 右面是用第一种画法画出来表示某立体的直观图，试根据图上标的尺寸，用第二种画法画出这个立体的直观图来。

(单位 $\text{mm}$ )



第4题



第5题

5. 左图是用第二种画法画出的某立体的直观图，试根据图上标的尺寸，(单位 $\text{mm}$ )用第一种画法画出该立体的直观图。
6. 画棱长为 $4\text{cm}$ 的正四面体的直观图\*。

\* 正四面体是由四个正三角形围成的封闭立体。

## 1.2 投影图

### 1. 二视图

在上一节我们谈到了画空间形体的直观图的方法，这种方法，立体感觉强，但立体的各个侧面的形状和大小不容易一下看清楚。因此，也需要从不同的方向来观察空间形体，从而画出表示该立体的方法。这种方法通常叫投影图法，是画机械和建筑物设计图的常用方法。

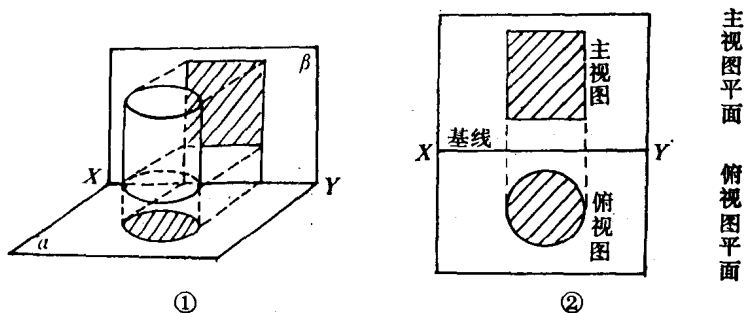


图 1.9

在图1.9①中，平面 $\alpha$ 是水平平面，平面 $\beta$ 是铅直平面。这两个平面的交线是 $XY$ 。当圆柱垂直于水平面的时候，从正上方向下看，它是一个圆，也可以这样想，在这种观察下，圆柱被视线投影成一个圆，这个圆在 $\alpha$ 平面上。如果我们从平面 $\beta$ 的正前方看圆柱，就看到一个矩形，可设想，这时圆柱被从 $\beta$ 平面正前方发出的视线投影成一个矩形，这个矩形在 $\beta$ 平面上。我们把 $\alpha$ 平面叫作俯视图平面， $\beta$ 平面叫主视图平面， $\alpha$ 和 $\beta$ 的相交的直线 $XY$ 叫基线。画在俯视图平面上的图叫俯视图，画在主视图平面上的图叫主视图，俯视图和主

视图合起来叫二视图。

通常把俯视图平面旋转 $90^\circ$ ，使俯视图和主视图画在同一个平面内，这就成了图1.9②。它表示的是圆柱的二视图。

## 2. 三视图

有些立体图形只用二视图表示还不够，例如像图1.10①那样摆法的圆柱的俯视图和主视图都是矩形，这个二视图也可看成是长方体的二视图了，为了区别起见，我们再设一个与俯视图平面和主视图平面都垂直的第三个平面 $\gamma$ ，从左侧面看这个圆柱，它在 $\gamma$ 平面上的投影是个圆。这第三个平面 $\gamma$ 叫左视图平面，在它上面画出的图叫左视图。

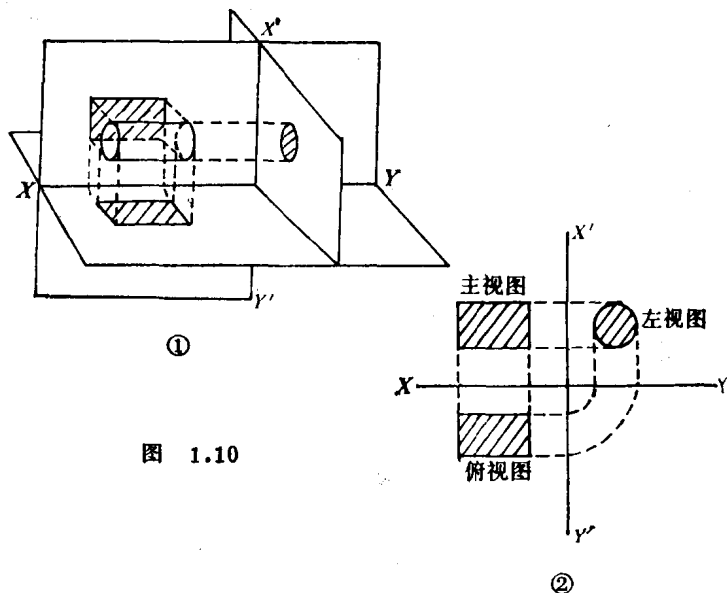


图 1.10

主视图、俯视图、左视图三个视图统称三视图。

图1.10②就是圆柱的三视图。主视图和俯视图或主视图和左视图都叫二视图。二视图和三视图也叫投影图。

在制图中投影图是不画基线的，如图1.11表示的就是由一个大长方体上挖去一个小长方体后的三视图。

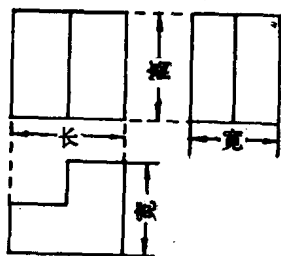


图1.11

从上面的三视图中，可以清楚地看出三个视图的关系是：

“主俯两图长对正，

主左两图高平齐，

左俯两图宽相等”

了解上述三视图的基本关系，我们常常可以从二视图画出第三个视图。

画出图1.12的左视图，并把这个三视图所表示的立体的直观图画出来。

画法：

(1) 画左视图（略解）。

根据“主左两图高平齐”和“俯左两图宽相等”，先画出左视图轮廓是个矩形，再观察主俯两图细部，看出这个视图所表

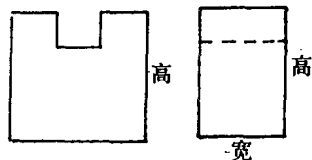


图1.12

示的立体是在一个大长方体的顶部正中贯通前后挖去一个小长方体。这样就必须要在左视图的轮廓矩形上加一条虚线，这就画出了左视图。

(2) 画直观图。